上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.77-88.

数学のコミュニケーション活動における子どもの理解過程の特徴について
― 文字に関する理解の深まりを通して ―

早川　英勝
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

「生きる力」「人間形成」という面で，学習におけるコミュニケーション活動が重視されている。中学校数学科における授業場面でも例外ではない。筆者は，数学の授業の中で，子どもの考えを個別に認めながら，子ども同士が自由に自分の考えを交流し合うコミュニケーション活動を，授業の中心に据えてきた。授業アンケートの結果から，授業が楽しいという子どもは増え，授業の中で楽しかったこととして，仲間との交流が 1 位となった。金本（1998）が「自分の考えた内容が評価されれば，仲間とのコミュニケーション活動があれば授業は楽しくなる」（p.　18）と述べるように，数学が楽しいという子どもは増加したと捉えられた。日野（1998）は，コミュニケーション活動を授業の中心に据えることで，次の 4 つの点で学習が豊かになることを，アメリカの授業実践を例にして示している：①数学の理解が深まる；②数学が子どもの身近なものとなる；③子どもの一人ひとりの発想や工夫が生きる；④数学を通して人とやりとりすることを楽しむ。先に述べたようなアンケートの結果からは，日野の示す②，④の点で学習が豊かになったと考えられる。しかし，積極的に仲間とコミュニケーション活動に取り組み，授業プリントの記述もしっかりと行っている子どもでも，テストで点がとれなかったり，教師の質問に答えられなかったりといった実態が見られた。日野の示す①，③の点では学習が豊かになっているとは捉えられなかったのである。江森（2000）は次のように述べている。

> 数学の学習には，他者とのコミュニケーション活動が不可欠であるという多くの研究者に支持された強い信念があるにもかかわらず，コミュニケーションの導入が，必ずしも子どもたちの数学理解を深めるわけではないという問題に私たちは直面している。（p. 51）

本稿の目的は，数学のコミュニケーション活動における，子どもの理解の深まりを捉え，その理解過程の特徴を明らかにすることを通して，数学のコミュニケーション活動と理解過程に関わる知見を得ることである。

2．コミュニケーション活動と理解過程の関わりに関する研究の課題

金本（1998）は，「数理的な事象について考えている」というコンテクストの中で，数学におけるコミュニケーション能力に関する重要な視点として，「算数・数学の多様な表現・表記が使える」という視点を挙げている。しかし，数学的な表現や表記の使用を重視してきたコミュニケーションの研究に対して江森（2000）は，「思考された結果を記号に置き換えるのがコミュニケーションではなく，コミュニケーションは人間の思考そのものなのだという認識が，これまでの研究には欠落していた」（p.　28）と述べている。実際，金本

(1998)は，学習者がコミュニケーション活動を通して考えを生成していくような場合についてはほとんど論じることができなかったことを課題として残している。一方，江森(2000)は，コミュニケーション活動に参画する学習者が考えを生成していく場面を研究の対象とし，その認知過程を同定した。その際，一つの題材について，小学 5 年生の事例，6 年生の事例，中学 1 年生の事例，大学生の事例を，段階的に分析し，それらを統合した上で，認知過程を 5 つの相で記述し，その特性を明らかにした。しかし，本来 1 人の認知過程の変容として扱わなければならない 5 つの相を，学年の異なる事例のつなぎ合わせとして描き出したことについては，研究方法の課題としている。そして，これらの認知過程やその特性は，完全ではあり得ず，他の視点での考察の積み重ねが必要であるとしている。

これらのことから，次のことが考えられる。数学のコミュニケーション活動における子どもの理解過程の研究には，一人の子どもが，コミュニケーション活動を通して考えを生成していく場面における，理解過程の特徴を探る研究の積み重ねが必要であるということである。また，そうすることによって，コミュニケーション活動の導入によって子どもの理解が深まるのかどうかに関する豊かな知見につながると考えられる。

3．理解過程を捉える手だて

小山(1997)は，子どもの理解を捉えるためには，「内面的で直接見ることのできない理解という現象を，何らかの方法で顕在化させることが必要」(p. 136)だと述べている。実際に子どもの頭の中を覗いてみることはできい(銀林，1985)がゆえ，子どもから表出されたものから判断するより他にないのである。

数学のコミュニケーション活動を，「数学に関わりのある情報あるいは数学に関わりのある情報の媒体を用いてなされる情報の伝達や交流」(中原，1999)と捉えるならば，コミュニケーション活動において，子どもから表出される情報や情報の媒体からその理解過程を捉えることが考えられる。また，理解が深まるということは，その前後で理解が変化するということであり，理解の変化に伴って，表出される情報や情報の媒体にも変化が生じると考えられる。「数理的な事象について考えている」というコンテクストにおいては，数学に関わること全てが情報として捉えられる。また情報の媒体としては，聴覚を介するものとして言語が，視覚を介するものとして，その場面における題材に関わる数学的表記が挙げられる。

本稿では，子どもの理解の深まりを，コミュニケーション活動の中で子どもから表出される，情報の媒体の変化から捉えていくことにする。つまり，子どもから表出される言語や，表記の変化で捉えるのである。そのためには扱う題材の中に，理解の深まりに伴って変化する情報の媒体を含むことが重要となる。逆に考えると，コミュニケーション活動の中で子どもの理解過程を捉えようとするならば，理解の深まりに伴って，どのような情報の媒体の変化が生じるかについて，それを捉える側が，扱う題材との関わりで検討しておくことが重要になると考えられる。

以上から，子どもの理解過程を捉えるための題材に関わる視点として，①子どもから表出される情報の媒体の変化で理解の深まりを捉える，②題材の中に理解の深まりに伴って変化する情報の媒体を含む，という 2 つの視点が得られたことになる。

一方，学習において相手の存在が前提となるコミュニケーション活動では，子どもと子どもの組み合わせに関わる検討が必要となろう。井出・志水(2002)は，「あれ？」「え？」という瞬間をずれの発生，「あっ，そうか」という瞬間をずれの修正と呼び，教師と子ども，子どもと教材，子ども同士の 3 つの「ず

れ」について，その発生と修正が子どもの理解に影響していると述べている。また，「ずれ」によって，「多面的な見方が促進され，子どもの理解が深まるという側面もある。」（p.　630）と述べている。つまり，「ずれ」が修正されることで，理解が深まる可能性を示唆している。また子ども同士の「ずれ」は，子どもが示す理解と題材の正しい理解との「ずれ」がある場合に生じやすいと考えられる。このような「誤った理解の仕方」に，ミスコンセプションという捉え方がある。原田（1991）は，子どものミスコンセプションを克服させる手段の一つに，コミュニケーションの場の提供を挙げている。これは逆に考えると，ミスコンセプションを伴っている子どもが，コミュニケーション活動の場でそれを克服し，理解を深めていく過程が顕在化する可能性を示唆していると考えられる。

これらのことから，子どもの組み合わせの面で，Ⅰ：子どもと子どもの「ずれ」，Ⅱ：子どもの題材に関する理解と，題材の正しい理解との「ずれ」，の2つの視点が得られる。

以上で挙げた題材と子どもに関する4つの視点に，題材の理解に関する分析・考察の視点を加えることで，理解過程を捉える枠組みとする。

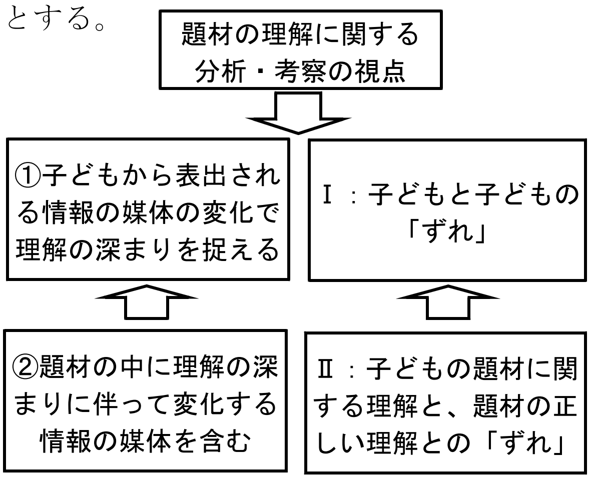

図1　理解過程を捉える枠組み

4．具体的な題材について

数学において子どもがミスコンセプションを伴いやすいものとして，文字や文字式の学習がある（藤井，1992）。文字の学習は，「同じ文字には同じ数が入る」という規約のもとに行われるが，子どもの中には「文字には任意の数が入るから，同じ文字にも違う数が入ることがある」また，「違う文字には違う数が入る」というようなミスコンセプションが伴いやすいのである。そして，文字の理解には，「いろいろな値をとる文字」として捉えられる「不特定性」と，文字が一貫して同じ値を保つという前提で計算の対象になる「特定性」の2つの側面を，文脈によって使い分けたり捉え分けたりすることが重要であると指摘されている。藤井（1992）は，文字の理解にこのような2つの側面があることを，文字の変数概念の2面性と呼んでいる。中学校数学では文字の学習は重要であり，文字や文字式の正しい理解のもとに学習が進められることが望まれる。鈴木ら（1998）は，「中学校数学においては，文字を理解しているかどうかは，文字式による論証の場面ではじめて分かるのであり, 逆に文字を理解させるためには, 文字式による論証の場面が重要な指導場面となる」（p.　221）と述べている。このことは，文字を扱ういろいろな場面のうち，論証の場面をコミュニケーション活動の場面とすることで，文字に関する理解の深まりが顕在化しやすいことを示していると考えられる。

これらのことから，本稿では文字式による論証の場面において，子どもが文字に関する理解を深めていく過程を捉えることとする。

具体的には，命題「奇数と奇数の和は偶数となる」の文字の論証を題材とする。この命題は現行のいくつかの教科書でも扱われている。しかし，平成17年2月に実施された国立教育政策研究所による特定の課題に関する調査では，奇数を文字で表すことができた子どもは，第2学年で41．0%，第3学年で58．5%であったと報告されている。授業の中で扱われているにもかかわらず，論証の前提と

なる式表現がなかなか定着しないということが示されていると考えられる。また，小関ら(1988)は，文字に対する中学生の認識様式と，そこに見られる文字概念の形成過程を発達的に分析する際に，この命題を用いている。そこでは，証明で文字を使わない段階を水準Ⅰ，文字を不適切に使用する段階を水準Ⅱ，２つの文字を正しく使用する段階を水準Ⅲとしており，水準Ⅱでも，その文字に対する理解状況によって，次の３つの水準に分けている。

<水準Ⅱａ>奇数や偶数をｎとするもの
<水準Ⅱｂ>２つの奇数を２ｎ＋１とするもの
<水準Ⅱｃ>２つの奇数を２ｎ＋１，２ｎ＋３とするもの

この水準Ⅱで別の式表現を示す子どもが，互いにコミュニケーション活動をしながら適切な証明を完成させていく協同の活動では，その「ずれ」を修正していく過程で，式表現を変容させ，適切な証明を完成させるに至ることが期待される。そういった意味では，理解の深まりに伴って変化する情報の媒体を含んでいると捉えることができる。

５．調査の方法

5.1．データの収集

調査は，平成 17 年 12 月上旬に，岐阜県公立中学校 3 年生 77 名に対し事前調査を行い，その実態から，コミュニケーション活動で「ずれ」が生じると予想される 2 人ずつのペアを選出し，文字の論証の場面で互いの「ずれ」を修正しながら適切な証明を完成させていくという本調査の対象とした。本調査では，2 人のコミュニケーション活動に教師が適宜介入することとし，2 台のビデオカメラを活用し，全体の様子と 2 人の子どもが記述する様子を記録した。また，2 人の子どもそれぞれにＩＣレコーダーを持たせ，音声も記録した上で詳細なプロトコルを作成し，分析・考察の対象とした。

5.2．調査の概要

事前調査では，文字に関するミスコンセプションについて，命題「奇数と奇数の和は偶数となる」の証明記述，命題の論証に対する文字使用の意識の 3 項目について調査した。調査結果から選出した 3 組のペアのうち，本稿で分析・考察の対象とする幸脇と畑山のペアの実態は次の表 1 のようであった。

表１　幸脇と畑山の実態

	幸　脇	畑　山
文字に関するミスコンセプション	文字には任意の数が入る	同じ文字には同じ数，違う文字には違う数が入る
2 奇数の式表現	＜Ⅱｂ＞２ｎ＋１，２ｎ＋１	＜Ⅱｃ＞２ｎ＋１，２ｎ＋３
文字使用の意識	文字と具体例を併用	文字と具体例を併用
具体例の示し方	2 奇数の文字式の計算結果２（２ｎ＋１）にｎ＝５を代入して偶数２２を得る	2 奇数の文字式の計算結果４ｎ＋４にｎ＝３，４，５を代入してそれぞれ偶数を得る。

2 人の実態から，文字のミスコンセプションと 2 奇数の式表現で「ずれ」があることが分かる。また，具体例を示す際に，2 人とも計算結果の文字式のｎに数を代入しており，奇数＋奇数の具体例を示していないという特徴がある。

本調査では，2 人よりも水準の低い式表現を用いた次のような不適切な証明記述を与え，これについて 2 人で考えさせ，適切な証明を考えていくという課題を与えた。

郷田君は，奇数と奇数の和は偶数であることを説明する問題で，文字を用いて次のように説明しました。

2 つの奇数をｎ＋１，ｎ＋１とすると，
奇数＋奇数は，（ｎ＋１）＋（ｎ＋１）
　　　　　　＝ｎ＋１＋ｎ＋１

＝ｎ＋ｎ＋１＋１
＝２ｎ＋２
となるから，奇数＋奇数＝偶数　となる。
これについてあなたはどう思いますか。

６．幸脇の式表現の変容

本稿では 5.2 で挙げた幸脇と畑山のペアから，幸脇を抽出生徒として，その理解過程を追っていくこととする。幸脇は与えられた不適切な証明に触れ，畑山とのコミュニケーション活動を通して，次の表 2 ように式表現を変容させていった。

表2　幸脇の式表現の変容

変容	２奇数の式表現	文　字
	ｎ＋１，ｎ＋１	ｎの１文字
ア）	２ｎ＋１，２ｎ＋１	ｎの１文字
イ）	２ｎ＋１，２ｎ＋３	ｎの１文字
ウ）	２ｎ＋１，２ｎ＋７	ｎの１文字
エ）	２ｘ＋１，２ｙ＋１	ｘ，ｙの２文字

本稿では，この式表現が変容していく過程を，理解が深まっていく過程と捉えており，以下に示す式表現の変容過程の中に理解過程を捉えようとするものである。このような式表現の変容に沿って，文字の変数概念の 2 つの側面を使い分けたり捉え分けたりできるか，また，文字に関するミスコンセプションが解消されるかどうかという視点を，図 1 で示した枠組みの，題材の理解に関わる分析・考察の視点として，考えていくこととする。

７．幸脇の式表現の変容過程

7.1．変容ア）について

幸脇は，まず最初に与えられた証明記述の文字式の計算結果，２ｎ＋２に着目し，そのすぐ下に記述１を書いた。一方畑山は，計算前の式表現（ｎ＋１，ｎ＋１）に注目し，ｎに奇数が代入された場合に，この式表現では偶数を示すことになってしまい，命題と整合しないことを指摘した。そして，ｎが奇数，偶数どちらの場合でも奇数を表す式表現として，（２ｎ＋１，２ｎ＋１）を提案した。この式表現は，幸脇が事前調査の段階で示していた表現でもあり，幸脇は違和感なく受け入れた。そのあと幸脇は，この式表現で文字式を計算しはじめ，畑山と計算過程を確認しながら，記述 4-2 を書いた。このとき畑山も同様の記述を書いた。しかし幸脇は，自ら二重下線を引いた計算結果の括弧の中身（２ｎ＋１）について，「奇数でも偶数でもない数」「ある数」というように捉えていた。事前調査で文字には任意の数が入ると捉えていたことを踏まえても，「不特定性」が強調されていることが分かる。ｎを計算の対象としてはいるものの，一貫して同じ値が入るとは捉えておらず，「特定性」については意識されていない状態だと言える。しかし，畑山が，２（２ｎ＋１）のｎに数を代入してみることを促すと，ｎ＝１を代入して括弧の中身の２ｎ＋１が３となることから，他の数を代入した場合も２ｎ＋１は奇数となることが確認できた。

幸脇　記述１
２（ｎ＋１）

幸脇　記述 4-2
（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋１）
＝２ｎ＋１＋２ｎ＋１
＝４ｎ＋２
＝２$\underline{\underline{（２ｎ＋１）}}$

畑山が指摘した代入の活動を通して計算前の式表現の変容を受け入れ，計算結果の括弧の中身の文字式２ｎ＋１についても，畑山の促した代入の活動を通して奇数と判断したのである。畑山の指摘と促しが，計算結果への注目が大きかった幸脇に，計算前の文字式と計算結果の文字式の両方に注目する経験をさせた場面であったといえよう。そして，記述 4-2 で示した証明について，郷田の証明に代わる適切な証明を得たと判断した。

7.2. 変容イ）について

変容ア）の段階で，郷田の証明より記述 4-2 の方が適切であると判断した 2 人に，教師が記述 4-2 が本当に適切な証明かどうか確かめてみるように促すと，具体的にｎに数を代入して確かめていく活動となった。ここで 2 人は事前調査の実態にもあったように，計算結果の２（２ｎ＋１）に注目した。そしてｎに数を代入することを確認し合い，幸脇はｎ＝４を，畑山はｎ＝３を代入し，それぞれ記述 5-2，記述 5-1 を書いた。

幸脇　記述 5-2
ｎ＝４
２（２×４＋１）
２（８＋１）
＝２（９）
＝１８

畑山　記述 5-1
ｎ＝３
２（２×３＋１）
＝２×７
＝１４

幸脇は，自分の記述からも畑山の記述からも，奇数＋奇数の具体例が見えてこないことに違和感を感じた。そして，記述 4-2 の最初の行にあたる，計算前の（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋１）のｎに数を代入する活動へ転換しようとした。そして，（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋１）と，計算結果の２（２ｎ＋１）を指しながら見比べ，ｎには同じ数が入るから，（２ｎ＋１，２ｎ＋１）が同じ奇数同士であると判断した。文字式を計算結果から計算前にさかのぼったことで，文字が一貫して同じ値を保つという前提のもとに計算の対象となっていることを認識したと考えられる。つまり，「特定性」に関する意識がなされるようになったと考えられる。このことには，変容ア）の段階で，コミュニケーション活動の相手である畑山の指摘や促しによる，事前調査の段階にはなかった計算前の式表現の文字に数を代入する経験と，事前調査の段階でも示していた計算結果の文字式に代入する経験の両方があったことにも，起因していると考えられる。

このようにして，計算前の奇数＋奇数の文字式に目が向けられたことにより，その具体例となる，連続する奇数同士の具体例「３＋５，５＋７，７＋９」が，畑山を中心に挙げられた。ここで 2 人は，再度ｎには同じ数が入るから，（２ｎ＋１，２ｎ＋１）が同じ奇数同士であることを確認した。そして，この表現では異なる奇数同士を表すのは無理であると判断され，幸脇から，2 つの２ｎ＋１の一方を２ｎ＋３にし，（２ｎ＋１，２ｎ＋３）とすることが提案され，連続する奇数の組み合わせに整合する式表現に至った。この式表現は，畑山が事前調査で示していた式表現であり，畑山はこれを受け入れた。この後，記述 8 のように，畑山がｎ＝３を代入することを促し，７＋９を例とする連続する奇数がこの式表現で表現できると 2 人で判断した。

畑山　記述 8
（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋３）
＝　７＋９
＝　１６

これまでは意識されていなかった，奇数＋奇数の具体例と，奇数を文字で式表現することのつながりについても意識されることとなり，その整合性を確かめながら，納得の伴った式表現の変容があったと捉えられる。

7.3. 変容ウ）について

変容イ）で，連続する奇数に整合させた（２ｎ＋１，２ｎ＋３）で，（５＋１１）が表現できるかと教師が問うと，2 人はｎ 1 文字を使用する表現で対応していった。

幸脇はそれまで連続奇数に整合させていた（２ｎ＋１，２ｎ＋３）について，まず（２ｎ＋１，２ｎ＋５）と変え，これにｎ＝２を代入した。しかし，その結果が（５＋９）となったことから，２ｎ＋５の，５を７とし，2 つの奇数表現を記述 9-2 のように（２

幸脇　記述 9-2
（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋~~５~~）
７

ｎ＋１，２ｎ＋７）としていった。

この変容は，（２ｎ＋１，２ｎ＋ａ）のａの部分で2つの奇数の具体例の差をとって対応しているという点で，変容イ）と同様の活動と言えよう。変容イ）で，奇数＋奇数の具体例を示すことと，式表現のつながりを意識した活動が有効に働き，納得の伴った式表現の変容があったことで，次の活動でもその意識が継続していると考えられる。

7.4. 変容エ）について

変容イ）変容ウ）で，具体例「３＋５」「５＋１１」に対して，奇数表現（２ｎ＋１,２ｎ＋ａ）のａの部分で2つの奇数の差をとって対応してきた2人であったが，どんな奇数同士の組み合わせも表現できる式表現であるかと教師が問うと，このままでは一つ一つの具体例について対応を考えていかなくてはいけないと判断した。そして70秒ほど2人で，ｎを2乗する，ｎに違う数を入れる，２ｎとしている部分を４ｎにする，といった検討をするが，ｎ1文字の使用では限界であることを共感しながら，活動が停滞した。2つの文字を使って2つの奇数を表現していくという，小関ら(1998)でいえば，水準Ⅱから水準Ⅲへ上がるアイデアがなかなか出てこなかったのである。そこで，2つの数を表すのに，ｎ1文字を使っているからこのようなことが起きているということを明確にする意図で，70秒近く検討して限界を感じていた2人に対し教師が介入すると，畑山はｎとｍ，幸脇はｘとｙを使用するアイデアを挙げた。その後2人で，幸脇の挙げたｘとｙを使って記述10-2を記述した。

> 幸脇　記述10-2
> （２ｘ＋１）＋（２ｙ＋１）
> ＝２ｘ＋１＋２ｙ＋１
> ＝２ｘ＋２ｙ＋２
> ＝２（ｘ＋ｙ＋１）

しかしながら，「違う文字には違う数が入る」というミスコンセプションを持っている畑山にとっては，この式表現（２ｘ＋１，２ｙ＋１）では，同じ奇数同士が表せないのではないかという疑問が生じた。それに対して幸脇は，違う文字に同じ数が入ってもいいのではないかという認識を示した。その後，教師が，畑山のようにこれでは同じ奇数同士の組み合わせが表現できないと考える相手への説明を促す介入をした。すると幸脇は，畑山とのコミュニケーション活動を通して，1次関数でｙ＝１ｘのときの，ｘ＝ｙ＝１となる場合を示し，「違う文字には違う数が入る」というミスコンセプションに対する反例とした。これには畑山も納得し，文字の正しい理解につながった。このことは同時に，幸脇が文字には任意の数が入るというミスコンセプションを解消し，文字を正しく理解したことが顕在化したと考えることができる。

8．コミュニケーション活動における抽出生徒の理解過程の考察

7節では，抽出生徒，幸脇の式表現の変容過程を示した。本節では，そこでの理解過程の特徴を，コミュニケーション活動との関わりで検討していく。

8.1. 特定性と不特定性，双方の意識化

幸脇の理解過程には，これまで文字の変数概念の「不特定性」が強調されていた状態から，「特定性」についても意識するようになるという変化があった。それは，式表現の変容イ）で，記述4-2に示された文字式の計算結果２（２ｎ＋１）に数を代入する活動を通して，そこに奇数＋奇数の具体例が見えてこないことへの違和感が起因していた。その場面では次のようなコミュニケーション活動があった。

3313 幸脇：こっち＜２（２ｎ＋１）＞にあてはめちゃっていいんじゃないの？
3114 畑山：そっか，じゃあ。
3115 幸脇：え，どうしよう。どっちか偶数入れてどっちか奇数入れる？
3116 畑山：じゃあ，奇数入れる。

3117 幸脇：じゃあ４にしよ。
3122 幸脇：だめじゃん。あれ，いいか？ｎ，奇数偶数どっち入れてもいいんだよね。
3123 畑山：うん。イコール１４になったよ。奇数入れると。
3125 幸脇：１８・・あれ？もし，これ式<（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋１）>からやんなきゃいけないんですか？
3126 教師：うん？
3127 畑山：これ<２（２ｎ＋１）>に入れちゃっていいの？

2 人は，文字式の計算結果に数を代入することを確認した後，代入する数を奇数と偶数で分担し，その結果の偶数について互いに確認するコミュニケーションを通して，計算結果ではなく，奇数＋奇数の式に代入することへ目を向けた。このことは，奇数＋奇数の具体例が見えないことに対して，2 人が共に違和感を感じていることと捉えられる。そして，奇数＋奇数の文字式（２ｎ＋１）＋（２ｎ＋１）と，結果の偶数にあたる２（２ｎ＋１）を指しながら見比べ，

3134 幸脇：奇数＋奇数，同じ数ってことですか？
3115 畑山：同じ数。
3116 幸脇：同じ奇数ですよねえ。

というように，2 つの奇数表現（２ｎ＋１，２ｎ＋１）が，同じ奇数同士だと判断したのである。相手とのコミュニケーションで感じた違和感が，計算の対象となっている文字を捉え直すことにつながっており，ｎに一貫して同じ数が入るという「特定性」が意識され始めたと捉えられる。

8.2. 具体例を示すことと，文字式で表現することのつながりに関する意識化

8.1 で示したように，奇数＋奇数の具体例が見えてこない違和感を感じたコミュニケーション活動を契機に，「不特定性」が強調されていた状態から，「特定性」についても意識されるようになったことで，奇数＋奇数の文字式に目が向けられた。このことは同時に，2 つの奇数を文字によって式表現することと，その具体例を示すこととのつながりを意識する契機になったと捉えられる。実際，奇数＋奇数の具体例として連続奇数「３＋５，５＋７，７＋９」が畑山を中心に挙げられると，

3157 畑山：例えば２ｎ＋１の２ｎ＋１でしょ。
3158 幸脇：うん。でこれどうすればいいの？
3159 幸脇：これ同じ数って意味じゃない。
3160 畑山：ｎとｎでしょ。
3161 幸脇：ｎ同じ数入るでしょ？
3162 畑山：うん。
3163 幸脇：＋１したら同じ数じゃないのこの両方（２ｎ＋１，２ｎ＋１）って。・・・そうでもないか，＋３とかやったら変わるけど。
3164 畑山：あれ？＋３，ああそうやなぁ。

というように，再度ｎには同じ数が入るという「特定性」に関する確認をした上で，幸脇は連続奇数の具体例と式表現を整合させようと，式表現を（２ｎ＋１，２ｎ＋３）とすることを提案した。相手から得た具体例に対して自らの式表現を整合させ，式表現のレベルを上げている。幸脇の式表現の変容に，相手の畑山の存在が影響しているのである。３＋５の具体例に焦点を当てた会話では，

3181 幸脇：３じゃない？
3182 畑山：２ｎ＋３？
3183 幸脇：３。
3184 畑山：にすると，一つとんだ奇数が表せる。
3185 幸脇：ああ，表せる。連続奇数ってやつ？
3186 畑山：だねぇ。

というように，連続奇数の具体例を示すことと，（２ｎ＋１，２ｎ＋１）では同じ奇数同士しか表現できないという「ずれ」を，式表現を変容させていくことで修正し，連続奇数

に整合する式表現（２ｎ＋１，２ｎ＋３）で共通理解したのである。この後には，

3188 畑山：てことは，ここ（ｎ）にもし３が入ったら，にさんがろくの７プラス。
3189 幸脇：にさんがろくの，３。
3190 両者：９。
3191 畑山：てことは連続した。
3193 幸脇：うん。
3194 畑山：やもんで，７プラス９は１６？
3195 幸脇：１６。できるねぇ。
3196 畑山：うん。
3197 教師：納得？
3198 幸脇：はい。

というように，ｎ＝３を代入することを通して（２ｎ＋１，２ｎ＋３）が連続する奇数の具体例に整合する表現であることが，「７＋９」の具体例で互いに確認された。具体例と文字による式表現のつながりを意識したことに起因して，次の具体例で確認するコミュニケーション活動が生じていると考えられる。また，そのことが，共感を伴った互いの納得のいく理解の進展につながったと捉えることができる。

このような納得の伴った理解の進展は，次の活動にも影響していた。次の変容ウ）で，連続しない異なる奇数同士の具体例「５＋１１」に整合する式表現を考える際にも，同様に（２ｎ＋１，２ｎ＋ａ）のａの部分を変えて，（２ｎ＋１，２ｎ＋７）と，式表現を対応させたのである。コミュニケーション活動で有効だった活動が，共感を伴った共有知識となったことで，その意識が継続し，共有知識を活用して共通理解を図っていると捉えることができよう。

8.3. 相手と共有可能な類似の既有知識を関連づけるということ

変容エ）で全ての奇数＋奇数の具体例に整合する式表現が必要となったときには，2 つの文字の使用が必要となった。その場面では次のような会話があった。

3256 畑山：違う・・・・
3257 幸脇：違うの，何・・ｎ 2 乗しちゃうとか，・・ダメや。
3258 幸脇：でもｎいっしょだもんね。
3259 畑山：うーん，違う数入れちゃうとか。
3260 幸脇：４ｎにしちゃだめ？・・・なにしようか・・だめや。えー，どんな数でも当てはめれるようにする？

2 人のコミュニケーションからは，これまで同様にｎ 1 文字の使用で対応しようとするが，その限界を共感しあっている様子が伺える。2 人には，これまでにも例えば連立方程式などのように，2 つの文字を使った経験はあるが，この場面では 1 つの文字の使用に対する 2 つの文字の使用というアイデアにつながらなかった。そこで教師は，〔3256 畑山〕から，〔3260 幸脇〕までの約 70 秒間での限界が，ｎ 1 文字の使用にこだわっていることによるということを明確にする意図で，次のような介入をした。

3261 教師：例えば，ああそうか。2 つの数を両方ともｎ使ったから，今みたいなことが起きてるから・・・

すると，2 人ははっとした様子で，

3263 畑山：ｍとかにすればいいんだ。
3264 幸脇：え，ｘとかｙとか？

というように，2 人のコミュニケーション活動で既に話題となっている 1 文字の使用では限界だということが，焦点化されることとなり，2 つの文字を使用するアイデアにつながったと考えられる。そして 2 人は，幸脇の挙げたｘとｙを使用することとし，幸脇は記述 10-2 を書いた。このとき畑山も同様の記述をした。2 人はこの式表現で違う奇数

幸脇　記述 10-2
（２ｘ＋１）＋（２ｙ＋１）
＝２ｘ＋１＋２ｙ＋１
＝２ｘ＋２ｙ＋２
＝２（ｘ＋ｙ＋１）

同士の組み合わせが全て表現できると考えた。しかし，教師がこの表現で同じ奇数同士も表せるかどうかと問うと，

3302 畑山：あっはは。今度は同じ数はってこと？

3303 幸脇：入れればいいんじゃない？

3304 畑山：え，でもさぁ。

3305 幸脇：え？

3306 畑山：ｘとｙだと違う数が入るってこと？

3307 教師：そこはねぇ。2 人で，

3308 幸脇：一緒の数入れてもいいんじゃないの？・・ｘとｙって・・・同じ数。

3309･3310 畑山：ｘとｙで違う数，・・・入れる，入れなきゃいかんのか，同じ数入れてもいいのかってこと？

3311 幸脇：入れてもいいんじゃない？

3312 畑山：いいかなぁ。

3313 幸脇：え？だめかなぁ。

というように，コミュニケーション活動の中で 2 人の「ずれ」が顕在化した。この会話からは，畑山が「違う文字には違う数が入る」というミスコンセプションを持っていることが分かる。幸脇については，違う文字でも同じ数を入れてもいいと捉えているが，それが「文字には任意の数が入る」という事前調査の段階でのミスコンセプションが根強く残っていることによる可能性も考えられた。この後幸脇は，畑山に対して具体例で説明しようと試みた。実際には記述 10-2 にｘ＝ｙ＝３を代入して７＋７の具体例を示したが，ｘとｙに同じ数を入れてもよい根拠については触れられず，畑山は納得のいかない様子を示していた。既に畑山から〔3306 畑山〕や〔3309・3310 畑山〕で挙がっている，「ｘとｙに同じ数を入れてもいいのか」という疑問に対する説明に焦点が当てられなかったと捉えられた。そこで教師は，畑山のように，「違う文字には違う数が入る」と考える相手にどう説明したらよいかと介入した。つまり，幸脇が畑山に共通理解のために説明する焦点を，畑山から既になされた発話から明確にするための介入を行ったといえる。すると幸脇は，次のように話し始めた。

3329 幸脇：おかしくないんじゃない？

3330 教師：おかしくない。

3331 幸脇：こういう式に表しちゃうときあるよねぇ。同じ式に入ること。こういうなんとか数とか，2 次関数とかでもさぁ。

3332 畑山：ああ，えっとぉ。

3333 幸脇：ｙ＝　（記述 11 を書く）

幸脇　記述 11
~~ｙ＝ａ~~

3334 畑山：うん，２ｘ？イコール２とか？

3335 幸脇：だとしてぇ，(記述 11 を線で消し，記述 12 のｙ＝２ｘを書く）

3336 畑山：うん，

3337 幸脇：１ｘで出せばいいのか。(記述 12 の２を斜線で消す)

幸脇　記述 12
ｙ＝~~２~~ｘ

3338 畑山：ふん。

3339 幸脇：ｘが１のとき，ｙが１でしょ？

3340 畑山：あそうだねぇ。

3341 幸脇：同じ数はいるときあるよねぇ。

3342 畑山：ある，ある。

3343 幸脇：はい。

このように，幸脇が相手に根拠を説明しながら，お互いの「ずれ」が修正された。ここで幸脇は，「違う文字には違う数が入る」に対する反例を，まず 2 次関数の場面で探ろうとした。しかし，幸脇の「ｙ＝。」の発話に続いて，畑山から「２ｘ？」というように，2 人の発話を組み合わせると，1 次関数（ｙ＝２ｘ）の例が出されることとなった。このように，幸脇は畑山の発話に合わせて，2 次関数ではなく 1 次関数で反例を示すことになったと捉えられる。「ずれ」を修正して共通理解するためには，相手にも分かる既有知識で

説明することが考えられる。実際，最初に試みたｘ＝ｙ＝３を記述 10-2 に代入することは，文字に数を代入して具体例で確かめるという点で，これまでに畑山との活動を通して有効に働いた共有知識であったと考えられる。「ｘとｙに同じ文字を入れてもよい」という根拠に焦点化された後の説明では，互いの過去の経験をさかのぼり，関数の場面から根拠を探ろうとした。さらに，2 次関数で説明しようとした幸脇が，畑山から挙げられた 1 次関数の例での説明に切り替えたのは，相手とより共有しやすい既有知識と関連づけて説明しようという意識につながったからだと考えられる。その結果，畑山にとっては自分の既有知識として持っていた，幸脇の示す 1 次関数の例が，自身の「違う文字には違う数が入る」というミスコンセプションの反例となり，文字の正しい理解につながった。また同時に，幸脇自身が文字に関するミスコンセプションを解消し，正しい文字の理解に至ったことも顕在化したと捉えることができる。自分が説明しようとすることを，互いに共有可能な類似する既有知識とつなげて説明するというコミュニケーション活動が生じ，共通の理解の深まりにつながったと考えられる。

8.4. 見出された抽出生徒の理解過程の特徴

以上 8.1 から 8.3 のように，大きく３つのことが幸脇の理解の深まりに関わっていることと，そこでのコミュニケーション活動について述べた。ここでは，それらを順を追って振り返ってみる。

8.1 では，相手とのコミュニケーション活動を通して共感した違和感が，証明記述の文字式の計算を，計算結果の偶数を表す文字式から，計算前の奇数＋奇数を表す文字式へとさかのぼる契機となり，そこから変数概念の「不特定性」と「特定性」の両方を意識することにつながったことが示された。

8.2 では，「不特定性」と「特定性」の双方を意識したことによって，奇数＋奇数の文字式に目が向けられるようになったことが，同時に奇数＋奇数の具体例と，文字式のつながりを意識することとなったことについて述べた。ここでは，相手が中心となって挙げられた具体例に対して，式表現を整合させるという形で，具体例と式表現の「ずれ」を修正させながら式表現の変容が生じ,それがさらに,具体例を用いて確認していく次のコミュニケーション活動につながっていた。また，具体例を通して式表現について確認したことが，互いの共感を伴った理解の進展となり，次の同様の活動にもつながったことが示された。

8.3 では，2 文字を使用するアイデアがなかなか出ない場面と，幸脇が畑山に「ｘとｙに同じ数が入ることがある」ということを説明しようとする場面の双方で，既にコミュニケーション活動の中で話題になっているが，焦点化されていない部分に目を向けさせる教師の介入が，その後の理解の深まりにつながるコミュニケーション活動に有効に働くということが示された。また，これまでのコミュニケーション活動を通して，共感を伴った共有知識が有効に働いたことを背景にして，相手に説明する場面で，より相手と共有可能な類似の既有知識を関連付けて相手に説明を試み，「ずれ」を修正させながら共通の理解の深まりにつながるコミュニケーション活動が展開されるということが示された。

8.5. 考察から得られる知見

ここまでに幸脇の理解過程を考察したことをまとめると，次のような知見が得られる。

数学のコミュニケーション活動における子どもの理解過程の特徴として，まず，それまでは十分に意識していなかった，あることと別のこととのつながりを明確に意識するようになることが挙げられる。そして，それらのつながりを意識した活動が，コミュニケーション活動の中で有効に働くことによって，共感を伴った共有知識となり，その後のコミュニケーション活動でもその知識が活用され，

互いの納得の伴った理解の進展につながる。

また，コミュニケーション活動の中でそこで生じた共有知識を有効に働かせた経験は，別の場面における，類似の共有可能な知識を関連づけて，相手との「ずれ」を修正して共通理解を図るコミュニケーション活動を生じさせ，互いの理解を深める要因となりうる。

教師の役割としては，コミュニケーション活動の中で既に表出しているが，焦点化されない理解の深まりにつながることを，焦点化させる介入が，そのコミュニケーション活動に即した，理解の深まりに有効に働く。

また，今回題材とした文字の理解の深まりに特化した場合,次のような知見が得られる。

文字の論証の場面で，子どもに協同で問題解決をしていくコミュニケーション活動を生じさせることで,「変数概念の特定性と不特定性」や,「具体例と式表現の整合性」に関する意識がされやすくなる。また，特に具体例を意識したコミュニケーション活動を生じさせることが，文字や文字式に関する理解を深めていくために有効であると考えられる。

９．おわりに

本稿では，コミュニケーション活動における情報の媒体の変化に着目し，題材と子どもの組み合わせの面から，理解過程を捉える枠組みを設定した。また，そこに題材の理解の深まりに関する分析・考察の視点を取り入れることで，コミュニケーション活動における子どもの理解過程の特徴を見出すに至り，そこから教師の役割や，題材に特化した知見を得ることができた。今後は，他の題材についても本研究の枠組みを活用しながら，研究を積み重ね，それらを総合的かつ統合的に捉え直していくことで，コミュニケーション活動と子どもの理解過程に関する豊かな知見につなげていくことが重要だと考える。

＜引用・参考文献＞

江森英世．（2000）．数学的コミュニケーション参画者の認知過程．数学教育学論究, *73-74*, 27-54.

藤井斉亮（1992）．児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査. 数学教育学論究, *58*, 3-27.

銀林浩．（1985）．算数･数学における理解．佐伯胖（編）, 理解とは何か（pp. 37-61）. 東京大学出版.

原田耕平．（1991）．学校数学における子どもの misconception の同定と克服:Balacheff の教授理論を手掛かりとして．数学教育学論究, *55*, 3-15.

日野圭子．（1988）．コミュニケーションは算数の学習をどう豊かにするのか．新しい算数研究, *323*, 22-25.

井出誠一・志水廣．（2002）．算数科の授業における教師と子どもの「ずれ」に関する一考察．日本数学教育学会第３５回数学教育論分発表会論文集, 629-630. 鳥取大学.

金本良通．（1998）．数学的コミュニケーション能力の育成. 明治図書.

小関熙純･国宗進･中西知眞紀．（1988）．中学生の文字認知について:基本調査．日本数学教育学会第 21 回数学教育論文発表会発表要項, 46-51.

小山正孝．（1997）. 数学学習と理解過程．日本数学教育学会（編），学校数学の授業構成を問い直す（pp.135-144）. 産業図書.

中原忠男.（1999）.生きる力と数学的なコミュニケーション．CREAR 生きる力をはぐくむ算数授業の創造, *6*（pp. 172-177）. ニチブン.

鈴木裕・中西知眞紀・熊倉啓之他.（1998）.文字式による論証（第 6 次報告）:指導上の問題点とそれらを克服するための留意点. 日本数学教育学会誌, *80*（11）, 8-15.