上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.123-132.

割合学習における子どもの理解の過程について

家内　慧
上越教育大学大学院修士課程１年

1．はじめに

筆者は以前、比例の単元において納得できないことがあった。それは、なぜ y=ax という一般式を使うのかということであった。この式を使わなくても対応表を用いれば求められるし、その信用度は高かったのである。しかし、グラフを学習したときに、一般式がグラフに描かれる直線の式であることを知ることになった。このときに、一般式はグラフを表すものとして見られるようになり、これを使うことを受け入れるようになった。この一般式を受け入れられないときの筆者の中には、y=ax という式とグラフの関連がまだできていなく、y=ax という式がひとり歩きしている状態だったといえる。その後、式とグラフが結びついたことによって、筆者は y=ax という一般式を受け入れられたことになる。

このように、新しいことを受け入れるためには、さまざまな考え方を結びつける場合が出てくる。Hiebert & Carpenter（1992）は、心的表象をさまざまな結びつけることで、理解というものを捉えようとしている。つまり、新しいことを受け入れるために必要な考えというものは心的表象であるといえる。

本研究は、Skemp（1973）いうところのの理解に関わる理論、及び、数学的なアイデア、手続き、あるいは事実という心的表象が内的なネットワークを形成すれば理解されるという、Hiebert & Carpenter（1992）の定義する理解の理論を主だった参考とする。

本研究では、小学校第５学年の割合の単元を取り上げることによって、割合の考えを通して、比例的推論の理解のプロセスがどのような様相にあるのかを探求するものとする。

本研究の目的は、子どもが新しい情報をどのように理解し、既有のネットワークを形成していくのかを、学習過程から分析し考察することである。

そのためにまず、基本的な理解についての先行研究を整理する。また単元として割合を取り上げ、比例的推論について何が重要な情報となるのか先行研究を整理することにより捉える。そして分析し考察するものとする。

2．先行研究における理解について

Skemp（1973）は、何かを理解するとは、それを適切なシェマのなかに同化することであると述べている。つまり、あることを理解することとは、それを既有の心的構造であるシェマと関係づけることであると考える。

また、理解過程は人間の内面で生起されていく複雑な現象であるから、それを直接見ることが容易ではない。そうした内面的な現象を外面化させる何らかの方法と、理

解の構造や機能を、明確に捉えられるような理論枠組みが必要になる。

2. 1. 数学的概念

Skemp(1973) は、概念について以下のような原理があるとしている。

(1) ある個人がすでにもっている概念よりも高次の概念は、単なる定義によっては理解されない。唯一の方法は、適切な範例の集合を示すことである。

(2) 数学においては、これらの範例とは、ほとんど常にまたほかの概念であるから、これらの概念がすでに学習者のなかに形成ずみであることが確認されねばならない。

(Skemp, 1973, p.21)

(1)は高次の概念は理論的な説明で理解されるものではなく、具体的な複数の事例によって形成されたものによって理解されるものであるということである。(2)は高次の概念は、他のもととなる概念がなければ形成されないので、そのもととなる概念の存在が必要となるということである。これをたどっていくことで、理解していくことに対して、どの概念が不足しているかがわかれば、うまく対応することができるのではないか。

Skemp（1992）は、緑、黄、赤、三角形、円、長方形などを一次的概念とし、これらは感覚的経験から導かれるものであると述べている。色は二次的概念であり、それは緑、黄、赤などの概念が共通にもっているものを理解したとき形成されると述べている。

このように、概念には、一次的概念という感覚的経験から抽象される概念と、二次的概念という一次的概念または、他の二次的概念から抽象される概念とがある。この過程が繰り返すことによって、概念はより抽象的になり感覚的経験から離れるようになる。この抽象されることが、概念を捉えることであり、理解することであると捉えられる。

2. 2. 心的表象のネットワークと理解

Hiebert & Carpenter（1992）は、新しく理解する対象を情報とよび、情報を既有のネットワークに結びつけることを理解することであると捉えている。情報を既有のネットワークに結びつけることを、ネットワークを再形成することであるとし、認知科学の立場から以下のように述べている。

現在、正確なネットワークの形を指定することは不可能である。しかし、言語でネットワークについて考えると 2 つの比喩として以下のようなものが想像できる。

1．ネットワークは垂直階層のように構築されるものかもしれない。

2．ネットワークは蜘蛛の巣のように構築されるものかもしれない。

（Hiebert & Carpenter, 1992, p.67）

彼らは、ネットワークとは数学的なアイデアの表象間に構成された結びつきであり、時に、情報間に構成された結びつきとしている。そのつながれかたは、直接結ぶことができる単純なものかもしれないし、あるいは、多くの節である情報が各々から発散してとても複雑になるかもしれないとも述べている。

また、Hiebert & Carpenter（1992）は理解することを、以下のように定義している。

情報が表象され構造化される仕方によって、理解を定義しよう。数学的なアイデア、手続き、あるいは事実は、もしそれが内的なネットワークの一部であれば理解される。より詳しくは、数学は、その心的表象が表象のネットワークの一部であるならば理解される。理解の深さは、結びつきの数と強さによって決定される。数学的なアイデア、手続き、あるいは事実は、もしそれがより強くあるい

は多くの結合によって、既存のネットワークと結びつくならば、より完全に理解される。

（Hiebert & Carpenter, 1992, p.67）

この定義で Hiebert & Carpenter（1992）は、理解の深さは情報の結びつきの仕方と強さによって決定されるとし、結びつきの構築過程を次のように述べている。

心的表象のネットワークは、新しい情報が存在しているネットワークに結合されながら、あるいは、新しい関係がそれまでは結びついてなかった情報間で構築されながら、徐々に構築される。理解は、ネットワークがより大きく、そしてより組織化されながら成長する。

（Hiebert & Carpenter. 1992. p.69）

つまり、理解を深めることとはネットワークをより大きくすることと、ネットワークをより組織化することである。

このネットワークをより大きくすることとは、新しい情報を既有のネットワークに結びつけるように生成することであり、結びつく新しい情報の数がより増えれば、理解は深まるということである。Hiebert & Carpenter（1992）による事例を拡張して考えると、以下の図１のように整数で、桁の値の計算するネットワークをすでにつくった小学校第４学年の児童を考える。このネットワークは、筆算の加減算である。二つの整数を右にそろえて縦に書き、同じ単位の数を結びつけるような加減の手順を知っている子どもがいたとする。この子どもが小数で加減に遭遇したとき、子どもは今までの手順と今回の課題をつなぐ良い立場にある。子どもは小数点を縦に並べ同じ位を結合することで処理しようとする。彼らがこの関連を築くならば、加減算の手順は既有のネットワークの一部になり、ネットワークは豊かにされ、そして、小数の加減算は理解される。

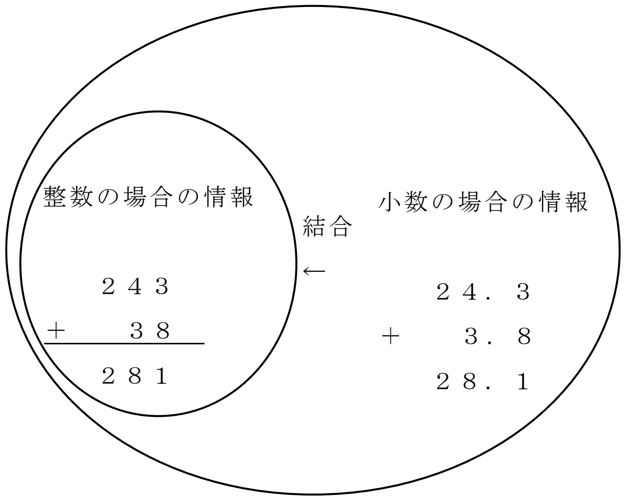

図１　結合によるネットワークの広がり

また、ネットワークをより組織化するとは、情報間で新たな関係を構築することであり、これによってネットワークは、再組織化される仕方で変化する。情報間でより関係づけがされれば、理解はより深まるということである。たとえば、方程式を学習する中学校第１学年の生徒を考える。図２のように、等号（＝）で表された式では、問題文を左側に、答えを右側に書くことを知っている子どもがいるとする。その子どもが、等号（＝）で表された式は、移項すると符号が変わることを新たに知ったとする。このとき、等号を天秤の支点として扱うような活動をしていると、これらの式では等号はともに同値を表すことを知り、等号に関する理解は深まる。

┏━情報Ａ　問題文を左側に、答えを右側に書く。
┃　　　　３４＋４２＝７６
関係
┃　等号は、右側と左側が同値であることを表す。
┃
┗━情報Ｂ　移項すると符号が変わる。
　　　　４ｘ－３＝３ｘ＋５
　　　　４ｘ－３ｘ＝５＋３

図２　再組織化されたネットワーク

これらのように、情報間のネットワークを結びつけ、より広く、より精緻化することを理解することとらえることによって、それぞれの情報同士の関係を図で表すことができ、情報間をつなぐ架け橋を見ることができるようになると考える。

Skemp（1973）は、どんな既有のシェマにも関連させることができない経験にぶつかったことを仮定して、以下のような図３、図４の認知地図を用いて考えている。

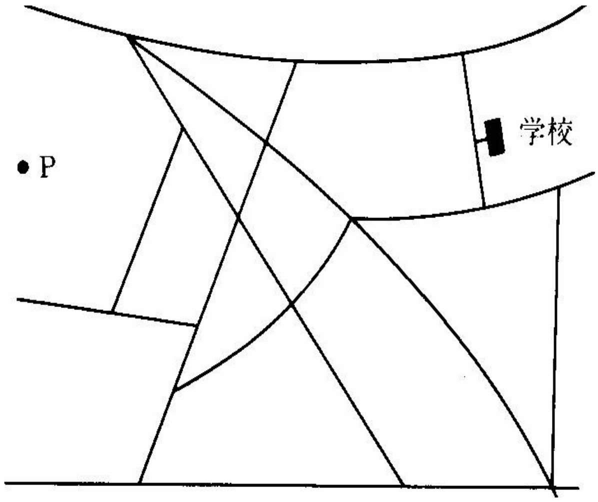

図３　理解できないときの心の状態

もしこの地図が認知地図やシェマを表現しているのなら、図３に表すような経験では、これは知的に、道に迷っているということになる。つまり、目的を達成するのに何をすべきなのかわかっていない。一般的に言えば、これは理解できない対象、経験、場面やアイデアに出会ったときの心の状態である。

図４は、理解を達成したときの心の状態である。このように点Ｐが結びつくことによって、自分がどこにいるのかを知り、行きたい場所へ行けるようになる。この知的状態の変化によって、前にはもちえなかった場面を、ある程度コントロールできるようになる。つまり、Skemp（1973）は、理解を達成するとは、既有のシェマと結合することであると述べている。これは、Hiebert & Carpenter（1992）の述べる、情報間のネットワークの形成というものに相応するものであると考える。

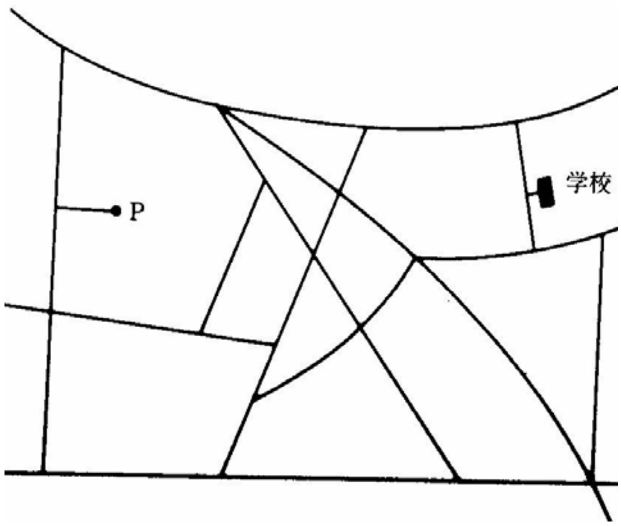

図４　理解を達成したときの心の状態

３．比例的推論の先行研究

ここでは、比例的推論の先行研究として日野（1997, 2002a, 2002b）を取り上げる。

日野（1997）は、比例的推論はある日突然に獲得されるのではなく、幼少の時分に既に芽生え、学校での学習等を通して徐々に発達していくものであるが、実際に子どもの比例的推論が、関連する概念等の学習を通していかに発達していくのかについては、わかっていない部分が多いと述べている。

日野（2002a）は、比や比例の内容は、日常生活における重要性はいうまでもなく、科学の分野での重要性、進んだ数学の理解の支柱としての重要性等から、数学教育において重要な位置を占めていると述べている。さらに、子どもは学校での指導を通して、素朴な推理をより逞しいものに変容させていくという過程と数学的表記の関わりに注目している。子どもは、教師が導入した表記が大きな役割を持って変容していく者と、その子ども自身が導入した表記が鍵となって変容していく者があると述べてい

る。

日野（2002b）は、児童 H の発達に関わりの深い２量の対応の表記が、「単位量あたりの大きさ」の授業を通して使われていく様子を追跡した結果、初期の自己中心的な使用が、同値な比を作り出すための使用へと変容していくと述べている。また、変容に重要な場面では、児童 H による表記の問い直し、見直しが繰り返し行われていたと述べている。

3. 1. 比の三用法

比の三用法を一般的にいうと、同種の２つの量 A、B があり、A の B に対する割合を P とするとき、次のような関係が成り立つ。

$$\frac{A}{B}=P$$

このとき、A を比較量、B を基準量、P を割合という。このうち、２つが与えられて、残りの１つを求めることを比の三用法という。

＜割合を求める場合＞

A÷B＝P……第１用法

＜比較量を求める場合＞

B×P=A……第２用法

＜基準量を求める場合＞

A÷P＝B……第３用法

金井（2002）は、一つの演算だけで答えることができる「基本的な割合の問題」を取り上げ、割合の理解を正答率でとらえている。その結果、比の第２用法の問題の正答率は他の用法と比べて高く、また、問題中の数値の順序が「基準量」「割合」「比較量」の順になっている問題の正答率は比の三用法に関わらず高いことが見出されている。これは、基準量に対する割合を求めることは、整数倍することに小数倍することを結び付けやすいとも考えられる。また、逆に言えば、わり算で基準量や割合を求めることに難しさがあると考える。それは、子どもに小さい数÷大きい数という式に抵抗感があるからだと考える。

3. 2. 割合

土屋（2002）は、児童が割合を理解することを次のように述べている。

> ２量の A と B という関係で表された割合は、A’と B’、A”と B”……というようにたくさんの同じ割合の関係を作れないと理解したとは言えないと考える。また A→A’、B→B”の間の比例関係を見抜いて初めて理解できると考える。いわば２量を用いて同値の比をつくることができなければならないと思う。
>
> （土屋. 2002. p.30）

また、土屋（2002）は、数表を用いて同じ割合をつくる活動を行っている。数直線のかき方を指導した後には、比の三用法の問題を扱っている。そこでは、数直線上に数量関係を記述し、倍関係を把握してから、立式の根拠とする児童の事例が以下の図４に挙げられている。

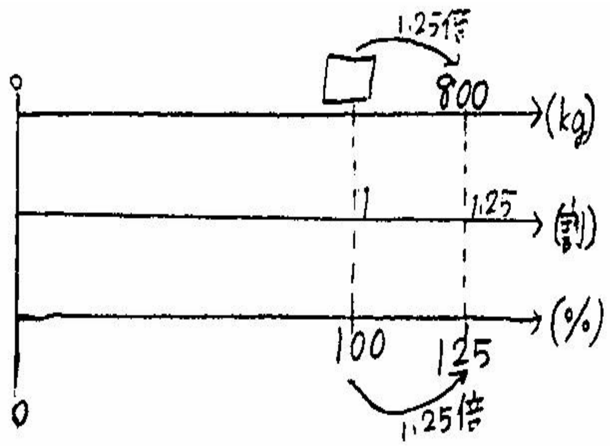

図４．土屋（2002）での数直線の使用例

これは、数直線上に数量を表し、矢印などで倍関係を表すことで、割合の概念を視覚化し、割合、基準量、比較量の関係をとらえやすくしている。

４. 分析の方法として

人は新しく得た情報を理解するために、既有のネットワークからその情報を結びつけるものであると考える。本研究では、Hiebert & Carpenter (1992) の立場から、子どもが新しい情報をどのように理解し、既有のネットワークを再形成していくのかを学習過程から分析し考察することである。その過程の中で、既有のネットワークへの結びつけを誤ることがあるが、それは誤った理解をしたことになる。こういった児童に対しては、正しく理解しなおす過程で、どのようにネットワークを修正するのかも見ていくこととする。また、新しい情報を理解するためには、どの程度のネットワークが形成されていなければならないかも考えていく。

５. 児童が割合における情報をネットワークに結びつける過程の分析と考察

割合の単元の授業において、児童が割合についての情報、及び、比例的推論の情報を既有のネットワークに結びつける過程を、実際に行われた授業のプロトコルを用いて分析する。この時、T は教師を表し、C は子どもたちを表し、他のアルファベットは特定の子どものイニシャルを表している。尚、本研究では、溝口（2006）のプロトコルを用いることとする。

以下に示す２つの場面は、第５学年の１５時間にわたる割合の単元の３時間目の授業である。この授業は、表の縦の関係によって、たくさんの同じ割合の関係を作ることが目標である。場面１では投げた数と入った数が半分であるという見た目にも簡単に関係を考え出せるような数値になっているが、場面２では入った数と投げた数の関係が考え出しづらくなっている。

この２つの場面での子どもが受け入れることになる新しい情報は、１０本中５本シュートが入る、または、１０本中４本シュートが入るという、うまさを考えることである。この２つの場面で主に jin と noga の活動から分析してみる。

場面１:「１０本中５本シュートが入る A さんと同じうまさを作ってみよう。A さんのシュートのうまさと同じにするなら、$\boxed{}$の中はいくつにすれば よいでしょうか？」

入った数		5					‥	
投げた数	2	10	20	30	40	50	‥	100

T　　１０本中５本は入る A さんは、２０本投げたら何本入るんでしょうかね？
hira　１０本。
T　　はい。じゃあ、発表してくれますか？はい、hira さん。
hira　１０本。
T　　１０本。はい、他にどうですか？
C　　（挙手なし）
T　　じゃあ、１０本で同じだという人？
C　　（大多数が挙手）
T　　じゃあ、hira さん。どうして１０本ですか？
hira　投げた数の半分だから。
T　　あー、１０本投げて５本入るということは、半分…
hira　入っている。
T　　入っているから、２０本だったら…２０本の？
hira　半分。

・・・・・・・・・・・・・・・・

T　　じゃあ、３０本のときは何本ですか？jin さん。
jin　１５本です。
T　　１５本。どうですか？
C　　いいです。
T　　はい、jin さん。どうして１５本ですか？

jin　半分になるから。

T　あー、半分になるから。･･･３０の半分になるから。･･･で１５。

・・・・・・・・・・・・・・・・

T　２本投げたら？…はい、じゃあ noga さん。

noga　０本です。

T　じゃあ､noga さん､どうして０本ですか？

noga　２本入っても、いくらやっても０。…５本、５本の下がりで、０になる。

T　５の下がりで、０になる。…

yana　あっ、そういうことか。２本から５本を引いたわけだ。

T　nogaさん、ここ（投げた数が２０本の場合）いくつにしました？

noga　１０の半分だから、…５だから、５を引いたら、０になる。

T　ここ（投げた数が２０本の場合)、でも１５じゃあ、ないんじゃないんですか？１０本じゃないですか？

noga　･･･

・・・・・・・・・・・・・・・・

T　じゃあ、nogaさん、ここ（投げた数が１００本の場合）はどうしました？ここは何本にしました？

noga　５０本。

T　５０本。･･･どうして５０本にしましたか？

noga　半分だから。

T　１００の半分だから５０本？

noga　はい。

T　ここ（投げた数が５０本の場合）は？ここ？

noga　そこは、２５本。

T　２５本。ここはどうして２５本にしましたか？

noga　うーんと、半分だから･･･

T　あー、５０の半分だから。･･･ここ（投げた数が４０本の場合）は？

noga　２０。

T　それはどうして、半、あ、いやっ、どうして２０本にしましたか？

noga　半分。

この場面１で教師は、入った数と投げた数が半分であるいう表の縦の関係を強調している。この問題の割合としての考え方は、比の第１用法の入った数は投げた数の 0.2 倍になるという考え方を、5÷10 から導き出すことである。

hira は１０本中５本入るという部分に着目し、入った数は投げた数の半分であるという表の縦の関係を見つけている。これは、第１用法の考えではなく、10÷5 という計算から導いた、入った数と投げた数の関係である。hira がこのような考え方ができたのは、投げた数が１０本で入った数が５本であり、見た目からもすぐに半分の関係を考えられるような問題であるからだと考える。

jin もまた､半分という表の縦の関係から入った数を求めている。jin も見た目から半分と見ている。もしくは、直前の hira の発表に影響されているとも考えられる。

ところが、noga は、それまでに求めた入った数が５ずつ増えているということに気づき、その関係から累加的に、２本投げたときの入った数を求めている。これは、入った数だけに着目してしまっているために、投げた数の表の横の関係を見ることができていない。また、noga は割合を表の縦の関係で考えるものだということが結びついていないと考える。

場面２：「１０本中４本シュートが入る C さんと同じうまさを作ってみよう。C さんのシュートのうまさと同じにするなら、□の中はいくつにすればよいでしょうか？」

入った数		4					‥	
投げた数	5	10	20	30	40	50	‥	100

T　じゃあ、ここ（投げた数が２０本の場合）を考えてみようか。まず･･･じゃあ、２０本シュートを撃ったら、C さんは、何本入るかな？
はい、fuji さん。

fuji　８本。

T　８本。はい。同じだ。８本だいう人は？

C　（半数以上が挙手）

T　じゃあ、fuji さん、８本の理由は？

fuji　投げた数が１０本で、入った数が４本だから、それを倍にすれば、２倍にすればいいから。

T　２倍にすればいい。ああ、そうかそうか。２０本ということは、もう１０本投げるから、そうするともう４本入るはずだ。４本と４本でね。そうすると８本だと。･･･あーなるほど。

・・・・・・・・・・・・・・・・

T　･･･今度はどう考えますかね。１００本投げたら？･･･はい jin さん。

jin　１００、･･･100÷2.5＝40 だから、４０本。

T　2.5 ってなんですか？

jin　えーっと、･･･投げた数が入った数の 2.5 倍の数だから、･･･だから逆に 100÷2.5 をして･･･入った数を出しました。

T　はい jin さんの考えはわかりましたか？･･･えーと、ここ（４→１０）かな。これが 2.5 倍、4 を 2.5 倍すると１０になって、この（入った数→投げた数）関係かな？全部 2.5 倍だからってことね、それから、でも、ここ（１００本投げたときの入った数；□）がわからないんだけど、･･･どうして 2.5 に、何に 2.5 をかけたんですか？

jin　かけたんじゃなくて、逆にして、100÷2.5 をした。

・・・・・・・・・・・・・・・・

T　１０本投げたら４本入る C さんというのは、５本投げたら何本入るんでしょうね？
はい、noga さん。

noga　２。

T　２本？

noga　２本。

T　２本？ほー、はい、どうして２本になりましたか？

noga　･･･2×2.5 をかければ、５になって･･･

T　2×2.5 を･･･えっ、でも、今ここ $\boxed{2}$ がわからなかったんだよね。そうすると、どこから、２が出てきました？

noga　半分に･･･

T　半分にした？

noga　･･･

場面２でも T は、場面１と同様に表の縦の関係を使って求めることを期待している。この問題の割合としての考え方は、入った数は投げた数の 0.25 倍になるという考え方を 4÷10 から導き出すことである。

fuji は２０本投げるときの入った数は、１０本中４本入るという事象が２回起ることだと考えている。これは表の横の関係から答えを導いている。

jin は場面１と同様に表の縦の関係を見ている。しかしこれもまた、割合の考え方ではなく、10÷4 という計算によって、投げた数は入った数の 2.5 倍になっていることに着目し、入った数を求めている。

noga も jin と同じように 2.5 倍という関係を使おうとしているが、実際に求めた方法は、表の隣にある１０本中４本という数を利用して、投げた数が半分の５本になっていることから、入った数も半分にして２本を求めている。noga は、この場面２でも表の横の関係に着目している。今回は場面１と違って、投げた数と入った数の両方を同時に、表の横の関係で見ることができて

いる。
２つの場面を通して、jin は場面１で表の縦の関係を見つけたことと、教師が入った数と投げた数の表の縦の関係が半分であるということを強調していることから、場面２でも、表の縦の関係に着目するということが結びついたと考えられる。表の縦の関係が考えづらくなっている場面２で jin は、場面１の半分という考え方は、10÷5＝2 という式をもとに考えている。この２つの場面を通して jin は、シュートをうつうまさというものを、投げた数÷入った数という式を用いて考えることと結びつけることによって、ネットワークを形成していると考える。
２つの場面を通して、noga は、場面１で見つけた関係が表の横の関係である。発表の後、noga は直接教師の指導によって入った数と投げた数の表の縦の関係が半分であるという情報を確認させられている。そこで場面２では表の縦の関係に着目しようとしている。しかし noga は、入った数から投げた数の計算は考えられていたが、その式から逆の投げた数から入った数への計算が考えられなかった。これは、2×2.5＝5 と 5÷2.5＝2 という情報が結びついていないと考えられる。つまり、noga の場面には、これらの情報間を結び付けなければならない。noga は、表の縦の関係はうまくいかなかったが、表の横の関係から正答を導いている。場面１では投げた数を考えていなかったが、場面２では投げた数の増え方と入った数の増え方を同時に関係づけることができている。noga は、土屋（2002）で述べている A→A'、B→B'の間の比例関係を見つけることができていると考える。この２つの場面を通して noga はうまさというものを、累加的に考える表の横の関係を用いることと結びつけることによって、既有のネットワークを形成したと考える。

以上のように、Hiebert & Carpenter（1992）のネットワークの組織化の考え方を用いて分析すると、形成されたネットワークの組織図を考えることができるようになる。そこで、その形成されたネットワークの組織図を一般化することができれば、子どもが新しい情報を理解し、既有のネットワークを再形成するためには、他にどのような情報があればよいのかがわかるようになると考える。それぞれ子どもたちによって、ネットワークに必要な情報には多少のズレがあるかもしれないが、おおまかな概観だけでもわかれば、授業構成や個別の指導にも対応できるようになると考える。

7. おわりに

算数の授業の中で子どもが新しい情報を理解することは頻繁に起こりうるものである。情報を理解するためには、必ず情報同士の関係性を考え、ネットワークとして組織化する過程があるはずである。算数を理解しようとする過程を見るとき、このネットワークを組織化することに焦点を当てることによって、さまざまなネットワークの形成が見出され、ネットワークの組織図を考えることができるようになる。
今後の課題は、子どもがどのように新しい情報を既有のネットワークに結びつけるのか、どのようにネットワークを組織化しているのか、小学校第４学年の「ともなって変わる量」の単元での実際の授業場面を分析し、子ども一人ひとりの活動を見ていくことである。

引用・参考文献

加藤康順．(1980)．割合の指導についての一考察―２本の数直線を組み合わせた図の利用―．日本数学教育学会誌，*62*, 第 10 号, 25-30.

金井寛文.(2002). 割合に関する児童・生徒の理解の実態についての一考察. 日本数学教育学会誌, *84*, 第 8 号, 3-13.

Skemp,R. (1973). 数学学習の心理学. (藤永保, 銀林浩訳). 新曜社.

Skemp,R. (1992). 新しい学習理論にもとづく算数教育―小学校の数学―. (平林一榮監訳). 新曜社.

田端輝彦. 同種の量の割合と異種の量の割合の指導順序に関する考察. 日本数学教育学会誌, *84*, 第 8 号, 22-29.

高橋裕樹. (2002). 比の三用法を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について. 上越数学教育研究, 第 18 号, 101-110.

土屋利美.(2002). 比例の見方を用いた「割合」の指導実践. 日本数学教育学会誌, *84*, 第 8 号, 30-37.

中村享史. (2002). 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌, *84*, 第 8 号, 14-21

Hiebert,J. & Carpenter,T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A.Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.65-97). New York, NY:Macmillan.

日野圭子. (1997) . 一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析 -比例的推論との関わりにおいて-(Ⅰ). 日本数学教育学会誌, *79*, 第 2 号, 2-10.

日野圭子. (2002a). 授業における個の認知的変容と数学的表記の役割:「単位あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して. 数学教育学論究,*79*, 3-22.

日野圭子. (2002b). 比例的推論の発達に関与した数学的表記の産出過程. 第35回数学教育論文発表会論文集, p.331-336.

藤田尚徳. (1998). 数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究. 上越教育大学大学院修士論文, 未公刊.

溝口英麿. (2006). 割合の学習における児童の思考過程についての研究. 上越教育大学大学院修士論文, 未公刊.