上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.55-64.

問題解決過程における算数的な表現の有効利用の一考察

中澤　和仁
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

今までの筆者の実践を振り返ってみると、効率的な解決をめざしすぎていたと反省することがある。効率的な解決は、算数科において大切なことである。しかし、これが子どもの「どうして？」という問題意識の高揚やじっくりと考える機会を奪う場合もある。

こうした問題は、TIMSS2003 や PISA2003 の調査結果を受けて、鈴木（2006）が指摘した無答率の高さとも関係がある。

このことについて、布川（2005）は、適切な理解は一度に達成されるとは限らず、問題場面の一部に関する情報が見出される場合も多く、情報を継続して見出していけることは、解決にとって重要であると述べている。効率的な解決ではない解決のよさを強調している。

また、解決の手がかりとして中村（2002）は、書くことは、考えることと密接な関係があり、問題を考える時、式を書いたり、図形に補助線を引いたり、言葉や図をかいたりして、問題の構造を分析すると述べている。式や図、言葉などの表現をすることで、子どもは解決を進めていくのである。

実際、菊池(1996)や草野(1997)、廣井(2003)は、図や式などの表現が子どもの解決過程にどのように影響を与えているかをインタビュー形式で調査している。そして、図や式が問題解決に有効にはたらくことを立証した。

しかし、子どもの問題解決は１つの表現だけが単独にはたらくわけではない。式が浮かばない子どもは多い。また、問題を解く際、身振りや手振りなどの動作をする子どももいる。このことから、絵や図、式という表現だけではなく、動作も含めて算数的な表現とし、それを分析や考察の対象に含めていく必要がある。

そこで、本稿では、問題解決する過程で、子どもは、絵や図、式、動作などの算数的な表現をどのように有効利用しているかを明らかにすることを目的とする。

２．絵や図、式の役割やはたらきと問題解決

子どもの問題解決過程を詳細に分析することは重要である（Davis＆Maher,1993)。そこで、本節では、子どもが絵や図、式などの表現を用いて解決している過程を詳細に分析した先行研究を概観する。

2.1. 文章題の解決過程における絵の役割

花形（1990）は、誤った絵と問題文の部分とを比較することで、解決者が自分の考えがまちがいであることに気付き、絵を修正して正しい絵に至ったことから、次の知見を得た。

> （中略）このことは、文章題解決過程において必ずしも正しい絵をかく必要がな

いことを示唆している。むしろ、自分の考えに忠実な誤った絵の方が、その絵と問題文の内容との不一致が顕在化され、自分の考えを反省的にとらえ直すことができるので有効と言えるかもしれない。（p.35）

子どもは、かける範囲で精一杯に表した絵を通して問題場面にかかわっていくことで、理解が深まっていくのである。

2.2. 図的表現の働きに関する研究

菊池（1996）は、どのような図が問題解決において役立つかを検証することを目的に、情景図と中間図の有効性について調査した。そして、調査の結果として次の結論を得た。

○　情景図は、子どもに過去の具体的場面を想起させて現実的な解法をさせたり、非現実的な形式的計算から現実的な解法に移行させたりしている。

○　正答率や子どもによる書き込み、つぶやきなどから情景図の延長のような中間図は、線分図に比べて子どもの構造把握を援助している。

そこで使用した問題は、次のとおりである。

つるをおるので、きよしさんとあきこさんは、60 まいの色紙を2人で分けます。あきこさんのほうが 12 まい多くなるようにします。それぞれの色紙の数はなんまいになりますか？

菊池（1996）の事例では、児童は、始めは「２人の差は 12 で、その和は 60」という条件ではなく、もう１つの条件である「60 枚を２人に分けること」にしか着目できなかった。だから、60÷２という式を立てて解決しようとした。その後、30 という数と問題文とがかみ合わないことに情景図から気付き、新たに差の 12 を最初に引くことで、きよしさんの枚数が得られることをとらえていった。

2.3. 図による問題把握と教師の支援

廣井(2003)は、学習者が解決の過程で図にどのようにかかわったかについては明らかにされていないとして、研究を進めていった。そして、次の２つの知見を得た。

○　子どもは、問題の条件を１つの図にまとめることで不整合となっている考えに気付いた。

○　子どもは、計算結果を図に当てはめることで、不整合となっている考えに気付いた。

そして、これらの気付きが、問題構造を把握するきっかけとなることを示した。

そこで使用した問題は、次のとおりである。

親のライオンと子どものライオンがいます。2頭のライオンの体重の合計は 252kg で、親のライオンの体重は、子どものライオンの体重の3倍です。親のライオンと子どものライオンの体重は、それぞれ何 kg ですか？

廣井(2003)の事例では、２人の子どもは、当初自分がかいた図によって、条件に対する２つの考えの不整合や計算結果との不整合に気付くことになった。また、自分の考えを修正しながら、新たな解決方法を生み出して解決に向かっていった。そして、全体の体重に関わる条件と双方の体重にかかわる条件を図に表したり、式から求められた数をその図にかき込んだり、さらに図の意味付けを変更したりという解決過程を踏むことで、「全体を４で割る」という新たな解法を導き出し、４で割る意味をとらえていった。

３．先行研究からの示唆と研究の方向

以上の先行研究をまとめると、次のことが言える。

かくことに代表される表現と理解の関係は密接である。ただし、表現をしたか

らといってすぐに理解が深まるかと言えばそうとは限らない。問題場面にはたらきかけることで情報を少しずつ入手し、理解を深めていくこともある。そこでは、算数的な表現の使用の有無が問題ではなく、問題場面にどのようにはたらきかけているかが重要となる。

絵や図、式などの表現の重要性及び、それらを通して、問題場面に継続的にはたらきかけること、また、そのはたらきかけの様相の重要性がとらえられた。

ところで、茂呂（1988）は、「われわれは、書くこと、描くこと、語ること、身振りすることを別々の表現手段と考えているが、子どもたちはそうは考えていないようだ」（p．15）と述べている。

実際の子どもの解決過程を思い返すと、茂呂が言うように身振りなどの動作をする場合がよくある。そこで、本稿では、絵や図、式に動作も含め、それらを算数的な表現としてとらえて分析や考察を行っていくことにする。

４．インタビュー調査の概要

2006 年３月に新潟県の公立小学校５年生９名に問題に取り組んでもらった。記録には、ＩＣレコーダーとＶＴＲ２台（全体とプリントに分けて撮影）を使用し、プロトコルを作成した。

問題は、菊池（1996）と廣井（2003）と同様で、２人の折り紙の枚数を求める問題（問題１）と、親子のライオンの体重を求める問題（問題２）である。問題１は、折り紙を２人で不均等（差）に分けるという、子どもが過去の経験に基づいて操作が可能と思われる問題である。問題２は、ライオンの親子の体重を不均等（倍）に分けるという、子どもが過去の経験に基づいて直接的に操作できない問題である。

なお、石田（1985）は、表現の対象を視覚を媒介としたものだけに限定した。聴覚は表現とはとらえなかったのである。その理由は、話し言葉による表現の重要な部分は、例えば書き言葉などの視覚を通しての表現方法で代替が可能であると考えたからである。動作も視覚ではあるが、その場限りの表現となってしまう可能性がある。そこで、動作をしたら、それを視覚的に残るようにかき表すようにした。

５．インタビュー調査の分析と考察

本稿では、美春（仮名）が取り組んだ活動を分析・考察する。美春（成績上位）の取組は、教師が言葉で介入したほか、用意した情景図や中間図を渡すなどの介入を行いながらも、解決者が絵や図、式などを用い、動作も交えながら正答を得た事例である。

なお、以下に述べる（　）の中の数は発話番号、＜　＞の中はかいた順番を表す。

5.1. 算数的な表現を通した解決過程の様相

美春は、最初に浮かんだ天秤のイメージが最後まで残っていた。後半になり、問題文を読んで天秤の動作をし、最終的には今までにない縦に伸びた帯図をかいて解答を導いていった。本節では、この解決過程を時系列で追い、美春が算数的な表現を利用しながらどのように思考を深めていったかを探っていく。

問題１と同様の解決方法（252÷2＝126、126×1.5＝189、126＋189＝315、親ライオン 315 kg・子ライオン 189kg）で満足している美春に、教師は「フワーと頭に…なんか…浮かんだようなことを…」（321）と言った。そこで美春は図１をかき、「天秤」（334）と言う。

図1

＜支点→横線→「子」→「親」→「差3」＞

これは、親子のライオンを天秤に乗せると親の方が重いので、親が下がっているという図である。

それでも解決が進まないので、教師は親子のライオンの絵（情景図）がかかれたプリントを渡す。美春のイメージは天秤なので、絵の下には親が子よりも下に位置する天秤や、親子の体重の関係を表す矢印などがかき入れられた（図２）。

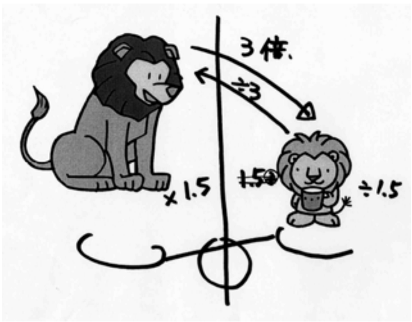

図２

＜支点→横線→子の受皿→親の受皿→親から子へ矢印「3倍」→子から親へ矢印「÷3」→真ん中の線→右に「1.5」→左に「1.5」→親の「1.5」の左に「×」→子の「1.5」の右に「÷」→「1.5÷」に二重線→子ライオンの絵の右に「÷1.5」＞

しかし、また解決が行き詰まったので、教師は中間図がかかれたプリントを渡した。美春は、図３をかき、「これ（大楕円）を３つに分けたのが、…これ（小楕円）なんでしょ。」（474）と言って、大楕円を３等分し、右の小楕円と結びつけ、それを１つずつ対応させた。また、３つの小楕円を囲み、そこから大楕円に向かって矢印を引いた。

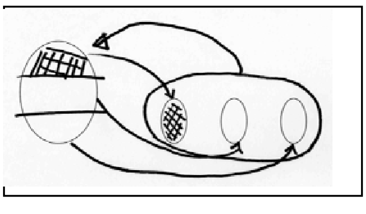
図３

＜大楕円に2本の直線（3等分）→上1/3に斜線→左の小楕円に斜線→上1/3から左の小楕円に矢印→真ん中の1/3から真ん中の小楕円に矢印→下の1/3から右の小楕円に矢印→小楕円3つを囲み大楕円に向かって矢印＞

このことから、美春は、親を３でわった部分と子どもを表す小楕円がそれぞれ対応して等しいこと、また、親を表す大楕円と子どもを表す小楕円３つ分が等しいことをとらえていることがうかがえる。

教師の「それってこの問題で使えそう？」（479）を受け、美春は今までかいた式と関連させるように、図４のようにかきくわえた。

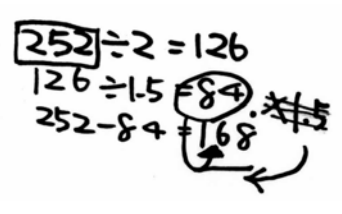

図４

＜84の右に「×1.5」→1.5から168に向かって矢印→×1.5に二重線→84に丸→84から168に矢印＞

そして、「ねえねえ、これ（84）３倍すると、これ（252）になっちゃうんですよ。」（486）、「はい…。う～む…。」（490）と言う。この発言から、84×３＝252で、子を３倍すると全体の252になってはいけないことに気付いていることがわかる。

しかし、その後、全体、つまり親子の体重の和の252kgのとらえ方が変更されてしまう。美春は、「ああ、いいこと思いついちゃったよ！」（492）と言い、図５と図６を交互にかき加えながら次のように言った。

図５

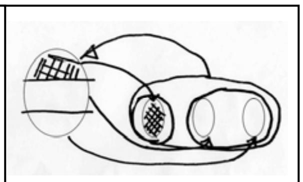
図６

４９４　これ（図５の84）が１つ分じゃないですか…。

４９６　（84を丸で囲み、線を引っ張る）あと…あとこれだけだったら、（図６の左の小楕円１つを囲み）…２つ足りないんですよ。（中・右の小楕円２つを丸で囲み…２つ足りないから…かける２をしたらどうでしょうか？（図５の84から引かれた線の横に「×２」とかく）

５００　そうすると…ジャジャーン。（84・横線・×２を丸で囲み、それから168

に向かって矢印を引き）この答えになります。

美春は、大楕円の上 1/3 と左の小楕円が子どもで、大楕円の下 2/3 と中・右の小楕円が親だととらえたのである。図３の段階では親を意味しているととらえた大楕円が、図６の段階では大楕円が全体と変化したのである。

さらに、美春は図６の小楕円を左から順に指しながら、「同じ体重の…。で、今１人しかいないから…後の２人は足りないので…これ（中・右の小楕円２つ分）を…２かければいいと思います。…これ（左の小楕円）はもういっている（大楕円の上の 1/3 に結びつけ）ので。…後、これもかけてあげれば…（中と右の小楕円のセットから大楕円に矢印をかき「×２」とかく）なると思います。」(512）と言い、図７をかく。

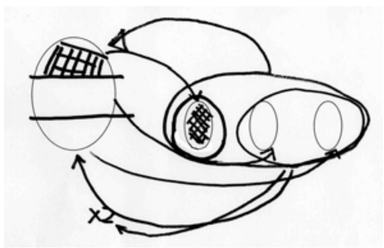

図7

小楕円から大楕円に向かっての矢印と「×２」から、子（小楕円）×２＝親ととらえていることがうかがえる。

その後、美春は、「だから…親１に対して…子３で等しいと思うんですよ。」(514）と言いながら、吊り合った天秤の図８をかく。この時点では、また、子×３＝親というとらえ方に変わっている。

図8

＜支点→横線→右の受皿→左の受皿→「親1」→「子3」→支点の上に縦線＞

しかし、美春はこの直後、さらに図９をかいた。それは、図５～７と同様に、子×２＝親の説明であった。

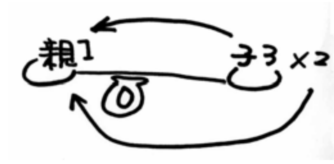

図9

＜「子3」の右に「2」→2の左に「×」→×2から親へ矢印→子3から親に矢印＞

さらに、次のように言いながら、図 10 をかいた。そして、子×２＝親であることを強調した。

５２７　84 は…１つ…１つ…子どもライオンの 84 は一人はもうこん中（大楕円の上 1/3）に入っているからかける３しなくても…２人いればいいだけだから…。(小楕円２つを囲んだ丸をなぞる）かける…じゃなくて…２をすればいいと思います。

５２９　もしかける３をしたら、…もうあとこのくらい（大楕円の下に 1/3 相当の大きさの楕円をかく）子どもがいるじゃないですか。（下線、筆者）

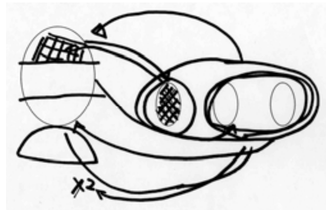

図 10

＜大楕円の上 1/3 から左の小楕円に矢印→中と左の小楕円のセットに丸→×２の「×」をなぞる→大楕円の下に大楕円 1/3 相当の枠を付け足す＞

ここで美春は、大楕円を全体ととらえ、その下に子どもを表す枠を１つ付加している。しかし、美春は、子ども４つ分で 252kg になっていることを表したのではない。あくまでも、大楕円は全体で、上の 1/3 は子どもで、下の 2/3 は親という考えの説明のために表した図なのである。だから、下線のように「もしかける３をしたら…」と言って、ありえない状態としてはみ出してしまうことを示した。

その後、美春は「う～ん。わからない時はどうすればいいでしょうか？」(618) と言い、

疲れ切った表情をして動きが止まる。

そこで、教師は「もう１回問題をよく読んでみますか？」(619) と言い、声に出して問題文を読ませた。読み後わると、美春は「252 ÷３＝」とまでかくが、しばらく考えた後、「そんなことをすると、252 に親が入らなくなってしまうので･･･。」と言って、「÷」「３」「＝」を順に黒く塗りつぶす。ここでは、252kg を３で割っても子どもは求められないという考えが登場する。

教師はまた、「で、今さあ、問題読んでどんなことが浮かぶ？」(623) と言うと、美春は「浮かぶ？…親の方が重たくって…親の体重は子どもの…３倍。」(624) と言って、両手を受け皿のように持ち上げて天秤の動作をする。

その動作の後、教師は、４のインタビュー調査の概要で教師の介入としての配慮事項で書いたように、「それを…今そう言ってるのをかける？」(625) と言った。すると美春は、縦に伸びた帯（図 11）をかいた。

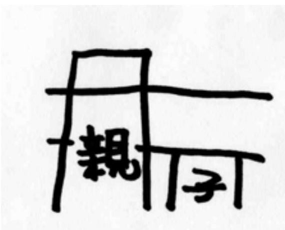

図 11

＜縦長の帯→「親」→右に小さな帯→「子」→親の帯から子の高さと等しい横線→その上に 2/3 の高さの横線＞

続いて、図 12 のようにかき加える。

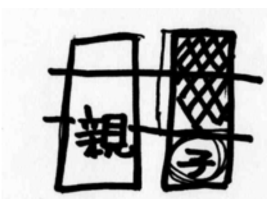

図 12

＜「子」の上に 2 マス分の帯→2 マスをなぞり、斜線→子の上の 2 マス分の周りを囲む→親とかいた帯をなぞる→「子」を丸で囲む＞

教師がもう一度、「後は…読んでわかることない？」(636) と尋ねると、美春は問題文の中の「２頭のライオンの体重の合計は 252 キログラム」(639) と言い、図 13 をかいた。

その後、「252 わる３をしたら子が出るじゃないですか…ああ、ならないか、ならないよね。」(645) と言う。この段階では、全体の 252 の認識が変化し、親＋子＝252 となっていることがわかる。

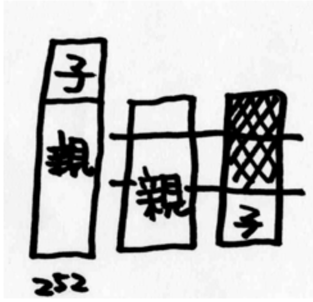

図 13

＜親の帯の左に長い縦長の帯→親と同じ高さに線→その中に「親」→その上の帯に「子」→帯の下に「252」＞

そして、長い縦帯を４つに輪切りにするようにペンを横に３回動かし、252÷４＝63 をかいた。続いて、図 14 のように、「子」の下に「63」をかき、「子」の３つ分の帯の横に３つをくくる線をひき、63×３＝189 と立式した。さらに、「親」の帯の下に「189」とかき、189 と 63 を四角で囲み、その下に「252!!」とかいた。

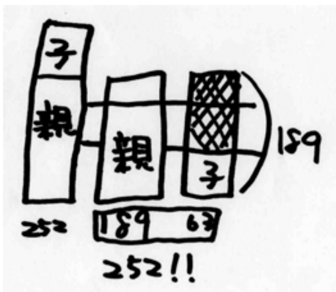

図 14

5.2. 考察

最終的には、問題文を読み直し、図 11～14 がかかれ、わる４が導入された。美春は、図 11 をかく直前に天秤の動作をしたが、そこには２つの場面があった。

【場面１】

「親の方が重たくって･･･」と言いながら、左手が下で右手が上のポーズをとる。(図 15)

図 15

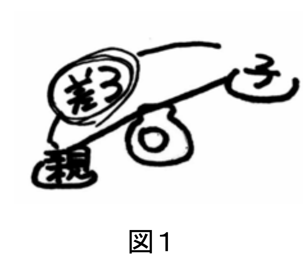

図１

次に、「親の体重は子どもの･･･」と言って、下げた左手を右手の方にかぶせる（図 16)。

図 16

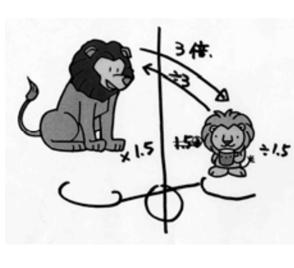

図２

【場面２】

「３倍･･･。」と言いながら、上げた右手を１段上げていったん止め、さらに右手を上げてそのまま左手にかぶせる（図 17)。

図 17

図 11

※図 15～17 は、撮影したＶＴＲから、美春の動作を筆者がかき表したものである。

場面１の最初のポーズ（図 15：左手が下、右手が上）は、左右は逆だが、図１の状態と似ている。そして、図 16 の重い方を軽い方にかぶせるという動作は、これも左右は逆だが、図２の親ライオンから子ライオンに向かう矢印と似ている。

図２がかかれた後、教師から、「この３倍ってどういうことなの？」（436）と質問された美春は、「この３倍は…あっ、逆だった。こっちじゃなくて、こっちが３倍。子どもから見て、親の体重は子の３倍で…、親から見て子どもは…1/3 ですか？」（437）と言い、図 18 のように矢印の向きを黒く塗りつぶし、反対側に矢印をかき足した。

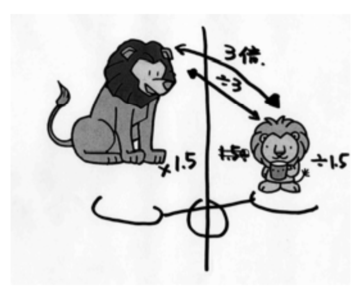

図 18

この時点では、矢印の向きはすぐに修正された。しかし、約 27 分後に修正される前の図２と同様の意味を表す場面１の動作をするということは、単に矢印の向きのかき間違いではないととらえられる。

「３倍」を「増える」というイメージでとらえた美春は、子を３倍することで子の体重が増え、天秤の子の方が右側に下がり、等しくなると考えたのだろう。だから、図２では、親から子どもに向かった「矢印」と「３倍」をかき込み、そうすることで親子の体重が等しくなることを表した。

27 分という時間は経過しているが、これと同じ発想で、場面１で親から子どもへ「かぶせる」という動作をする。こう考えると、この場面での「かぶせる」という動作は、「矢印」と「３倍」を意味していることになる。つまり、子を３倍すると重くなり、親子の体重が等しくなることを表していると考えられる。

親子の体重が等しくなるという意識は、以前にもあった。図８である。美春は、図１から図２、図３・６・７をかくことで、親子の体重の関係を少しずつ理解し、図８をかき表わした。ここでは、かいた図に関係性を示す矢印をかき入れることで、新たな情報を入手した。そして、天秤の図、情景図、中間図という異なる表現を前述の関係性をもとに１つにまとめて表したものが図８になる。また、図８は、天秤をイメージする図１を「等しい重

さ」という視点をクローズアップして表した図でもある。

場面２の子どもを表す右手が高い位置にあり、その右手を１段上げ、さらにもう１段を親の方にかぶせるという動作は、これも左右は逆だが､その直後にかいた図 11 の状態と似ている。最初の動作の右手の位置は｢子｣の上の線であり、その位置から「子」の上の２番目の線にいったん上がり、さらにその上の「子」の１つ分は、親にかぶせている。｢かぶせる」という動作は、親子の体重が等しくなることを表しているので、この場面では、子の３つ分で親と等しくなることを表しているととらえられる。動作をし、それをかき表すことで、親子のライオンの体重の関係性が明確になったのである。

しかし、図 11 では、親を表す帯は長く、子どもを表す帯は短い。重さを量として帯の長さで表している。この図をそのまま表せば、親を表す左手の位置は上、子を表す右手の位置は下になる。重さと量のイメージが重なり、場面１と２というように右手と左手の動作が混同するが、最終的に、美春は動作で子の３つ分で親と等しくなることを表した。

また、図 11 は、単に天秤というイメージや「親子の体重が等しくなる」ことを表す「かぶせる」という動作だけで生まれたのではない。教師が提示した中間図でも親子の体重の関係のとらえ直しが行われていた。

例えば、図６を回転（大楕円を上下、３つの小楕円を左に 90 度）させると、図 12 の帯図と同じ構造になっているのがわかる。図 12 の親を表す左の帯と図 19（図６の大楕円を上下反転)、また、図 12 の子どもを表す帯と図 20(図６の３つの小楕円を左に 90 度回転)は、それぞれ対応している（図 12 と図 20 の斜線が引かれた部分は逆)

図６の段階では、大楕円は全体で、斜線部分は子ども一人分、残った白い部分が親ととらえていた。図 12 をかいた直後、美春は､｢問題は…｣と言って親とかいた帯をなぞり､｢ここが 84」と言って｢子｣を丸で囲んでいる。このことから、子の３つ分が親になることはとらえられたが、252 の意味がまだよくとらえられていないことがうかがえる。

図 12

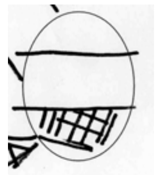
図 19

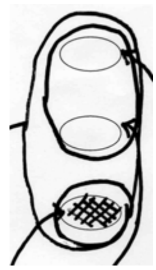
図 20

その後、教師の指示で再度問題文を読み返し、図 13 がかかれる。この図も、前の算数的な表現である図10と関係している｡図10は、「もしかける３をしたら･･･」(529) と言うように例え話的にかかれているが、これは小楕円１個分が大楕円に付加してかかれることが可能になることを表している。また、図 10 の大楕円を上下反転させると､図 21 のように図 13 の左の帯図と同じ構造になっているのがわかる。

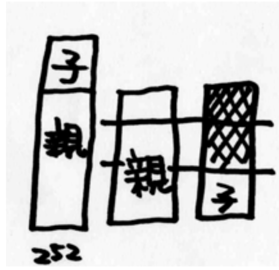

図 13

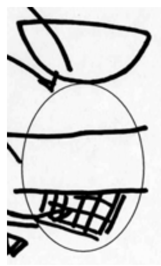
図 21

この後、美春は、図 13 をよく見て、左の親子の帯を４つに輪切りするように、ペンを横に３回動かす動作をし、割る４を導いた。

以上のことから、解決の後半に見られるように、割る４というアイデアが出て正答を導き出したのは、問題文を読み直したからだけではないことがわかる。そして、単に、縦に伸びた帯で表した図 11〜14 の表現によるものだけではないということもわかる。

子の３つ分が親という動作が、子×３＝親という条件をとらえることに有効にはたらいていた。また、それを表した図 11・12 が、もう１つの条件である「親子の体重の合計は 252kg」を導き出すきっかけになっていた。そして、図 13 がかかれ、ペンで横に輪切りにするよう動作によって、252 の意味が理解され、252÷４が行われた。

美春は､解決後に図 15 の親子が一緒になった帯図のそれぞれを囲みながら､｢親と子の体重ということを忘れてて…だけど、実際は親たす子が…252 で…子は親の３倍で…で…できた。」(662)、(子の高さを指で取り、さらに上に２つ分動かしながら)「この合計（｢252｣) は、子が３つだと思ってたんですよ。」(664) と解説した。

美春は、252 の意味をよくとらえていなかった。もう１つの条件である「子×３＝親」の方ばかりに着目していた。解決途中では、子×２＝親という考えも登場する。図７～９のように、「子×３＝親」と「子×２＝親」という２通りの考えが出入りする場面がある。

しかし、美春は、子の３つ分が親であることを動作で表現し、それを、図 11･12 のようにかき表した。そして、１つの条件だけでは解答を得ることはできないとわかり、もう１つの条件を図 11･12 と同様の表現でかき表すことで、252 の意味がとらえられたのである。

場面１・２という天秤の動作をよく分析することで、美春の理解過程がとらえられた。美春自身もアニメーションのような動作をし、それをかき表すことで、親子の体重の関係を理解していった。

開始直後にかいた天秤の図や、親子のライオンの図・中間図へのかき込みや動作といったように算数的な表現が変わっていった。また、同じ算数的な表現でも、そこに矢印などがかかれることで、親子のライオンの体重の関係性が明確になり、新たな情報を得ていった。美春は、それらの表現を通して、問題場面にはたらきかけ、さらにそこから情報を得ていった。また、それぞれの図から得た情報が相互に活かされて、徐々に問題構造が明らかになっていった。

６．算数的な表現の有効利用についての考察

本節では、美春の算数的な表現の有効利用についての知見を述べる。

○「考えを整理する」とよく言うが、筆算や答えにしても、図にしても整理し直すことがある。解決者が問題とする視点をクローズアップして整理し直した算数的な表現は、問題場面の見方を変え、問題構造をとらえやすくする。

美春は、不吊り合いの天秤を、吊り合うことをクローズアップして整理し直した。また､天秤を動作で表したことを図 11 のように、天秤の重さを、量としてクローズアップして整理し直した。これらのことで、子を３倍すると親になるということから、子の３つ分で親と等しくなることが明確になっていった。

○異なる場面や離れてかかれていた算数的な表現に、関係性を示す矢印をかき入れて１つにまとめることで、新たな情報が得やすくなる。

情景図の矢印（図２,18)、中間図の大小の楕円間の矢印（図３，６，７,10)、計算式の中の矢印（図４，５)、天秤の図の親子間の矢印（図９）などがあり、親子の体重の関係がより正確にとらえられていった。

１回かかれた算数的な表現に二量間の関係性を表す矢印をかき入れ、それを１つにまとめることで、より詳細な情報を得て、さらに次のかかわりが生まれていった。

また、美春は、親が重い天秤の図や中間

図、吊り合った天秤の図などの異なった場面でかかれた図を、親子の体重の関係をもとに１つの図にまとめてかいた。そこでは、動作も矢印と同様に、二量の関係性を表していた。美春は、縦に伸びた帯図をかく前に天秤を表す動作をした。この動作が、親子のライオンの体重の関係を動的に表すことになった。それを視覚的に残る形で１つの図に表すことで、条件の１つである子の３つ分が親ということをとらえられた。親子の体重の和が 252 というもう１つの条件もこの表現を利用してかき表わすことで、252÷４という考えが登場した。

７．おわりに

本稿では、解決過程を詳細に分析することで、子どもが絵や図、式、動作などの算数的な表現をどのように利用して問題を解決しているのかを明らかにすることができた。そして、２つの示唆を得ることができた。

しかし、研究で扱った問題は２種類であり、主に記述したものは１種類でしかない。そこから得られる結果は、その問題特有の問題場面に強い影響を受けている。どのような問題に対しても、ここで得られた算数的な表現のはたらきが通用するとは言い切れない。

今後は、実際にもっと多くの問題の解決場面において、子どもが算数的な表現をどのように利用しながら問題を解決していくかを明らかにしていく必要がある。また、今回明らかにした算数的な表現のはたらきを子ども自身がよさとして実感し、それを子ども自らが活用していくにはどうしたらよいかを考えていく必要がある。

引用・参考文献

Davis, R.B.＆Maher,C.A.(1993). Children's development of methods of proof. *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 105-112. Tsukuba, Japan.

花形恵美子．(1990)．文章題の解決過程における絵の役割．日本数学教育学会誌，*72*（12），28-36.

日野圭子．(2002)．授業における個の認知的変容と数学的表記の役割;「単位量当たりの大きさ」の授業の事例研究を通して．日本数学教育学論究，*79*，3-22.

廣井弘敏．(2003)．小学５年生に見られる図による問題把握.日本数学教育学会誌，*85*(6)，10-19.

石田忠男．(1985)．算数・数学『教授＝学習』過程における表現体系の研究（Ⅰ）:表現様式の分類とその役割について．広島大学教育学部紀要．*2*(33)．77-86.

菊池光司．(1996)．算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究．日本数学教育学会誌，*78*(12)，334-339.

草野　収．(1997)．算数における式をよむ活動についての一考察.上越数学教育研究，*12*，81-92.

茂呂雄二．(1988)．なぜ人は書くのか.東京大学出版会.

中村享史．(2002)．「書く活動」を通して数学的な考え方を育てる授業.東洋館.

中澤和仁．(2006)．対象とのかかわり合いによる解決の過程の研究：算数的な表現を通して．上越数学教育研究，*21*，171-180.

中澤和仁．(2007)．問題解決過程における算数的な表現のはたらきに関する研究：対象とのかかわり合いに着目して．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊)

布川和彦．(2005)．問題解決過程の研究と学習過程の探求；学習過程臨床という視点に向けて.日本数学教育学会誌，*87*(4)，22-34.

鈴木康志．(2006)．PISA2003 年調査・TIMSS 2003 年調査の分析：中学校・高等学校問題について．日本数学教育学会誌，*88*(1)，23-31.