上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.1-10.

小学校３年生による比例的推論の課題の解決

－下位単位の利用に焦点を当てて－

布川　和彦
学習臨床講座

１．はじめに

比例的推論は、小学校の多くの学習内容において、前提となる考え方として明示的あるいは暗黙的に用いられている。教科書を見ても、倍など比例的推論に関わる学習を、特設ページのような形で適宜取り入れている。しかし、個々の子どもの学習過程に着目すると、学習内容の理解を確かなものとするために、比例的推論を利用することができないことも報告されてきている（*e.g.* 布川, 2005; 白石, 2006）。

ここから、小学校２年生でかけ算の学習の中で倍が導入されて以降、比例的推論を意識的に利用できるようになるための経験を、算数の学習の中に取り入れることが１つの可能性として考えられる。こうした問題意識に基づき、布川(2006)は小学校４年生に対して比例的推論に焦点を当てた授業を実施し、その授業に参加した抽出児童の学習過程を分析している。その結果、問題に示唆された(３個 : 168 円)といった合成単位と全体とが自然数倍になっている場面について、４年生の児童がこうした１ではない単位により全体をノルム化(Lamon, 1994)することができる一方で、10 倍や半分に基づかない下位単位の構成、例えば 1/3 倍の関係を要する場合には、下位単位の構成に困難を示す、と述べている。

こうした４年生の児童の学習過程を考慮したときに、下位単位の構成とその利用の過程をさらに調べること、あるいはその過程を支援する活動を開発することが必要となる。本稿は、より年少である小学校３年生に対する比例的推論の授業に参加した児童が、比例的推論の課題を解決する過程を、特に下位単位の構成の部分に焦点を当てて考察を加えることで、上述の過程に関わる知見を得ようとするものである。

２．調査の方法

2.1 データの収集

調査の授業は小学校３年生の３月に実施された。60 分の授業を３回、30 分の筆記調査を１回行った[1)]。授業に際し、教室の後方から教師や黒板で発表する子どもの様子を、前方から子どもたち全体の様子をビデオで記録した。また、担任教師との相談により決定した５名の抽出児童について、１台ずつのビデオカメラによりそれぞれの子どもの学習過程を継時的に記録した。

2.2 授業の概要

第１時は次の問題を扱った：「２本で 90 円のジュースがあります。このジュースが６本だと、いくらになるでしょうか」。各自による解決の途中で 90×6 と 90×3 とする子どもの考えを紹介し、どちらになるのかに注意を向けた。話し合いでは、２本ずつのまとまりを３組かいた図が複数の子から出された。それらの図との対応を付けながら紙の帯を１枚ずつ貼るようにして、教師が以下のような図を導入した。また「２つ

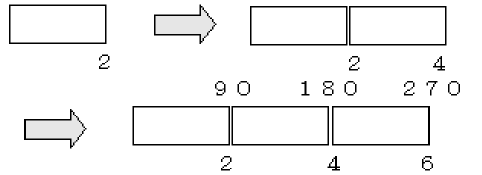

図１

ずつのかたまり」が「３パック」であるなどと言葉でもまとめた。次に「ジュースが 24 本だといくらになるでしょう」という問いを追加した。これを各自で解決して第１時を終了した。

第２時では 24 本の問いを各自でさらに考えた後、話し合いを行った。２本ずつのまとまりを 12 組かいた図、それに基づく 90×12 という考えが出された。これを受け教師は丸を 24 個並べた図を提示し、まず児童に２個ずつ囲む活動をさせた。さらにそれぞれについていくらになるかを子どもとやりとりをしながら書き込んでいった（図２）。ここから「２本入りのふくろが 12 こで、90×12＝1080」とまとめ板書した。

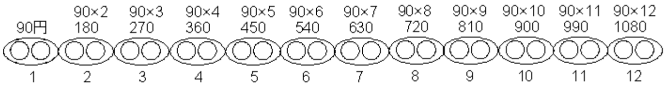

図２

24 個の丸を４個ずつ囲んだ子と６個ずつ囲んだ子が図２と同様の図を黒板で発表した。他の子にはこれらの考えを「２本入りのふくろが○こで、〰×○＝1080」の形にまとめることを考えさせた。

第３時は次の問題を扱った：「３こで 29 円のチョコがあります。このチョコ 12 こでは、いくらでしょう」。プリントには丸を 12 個並べた図を添えたが、子どもからは３個ずつを囲み、29×4 とする考えが出された。教師は図２と同様の図をかき、「３こ入りのふくろが４ふくろなので 29×4＝116 円」とまとめた。続けて「８個で 220 円のみかんがあります。このみかん 32 個だといくらになりますか」という問題が扱われ、同様の考えが出された。

後半ではみかんの問題で 12 個のときの値段と 10 個のときの値段を考えるプリントが配られた。12 個のときの値段については、子どもからは、４個の値段は半分の 110 円なので 220+110 とする考えが出された。また別の子は 8÷4＝2、220÷2＝110 とする考えを発表した。教師は丸を８個書いた紙を半分に折り、その片方を切り取り、図２と同様の図の４個分にあたる箇所の下に貼る操作を演示した（図３）。10 個のときの値段を考える問いについては、８個を４つに分けたものが 55 円になるので 220+55 とする考えが出された。教師は丸を８個書いた紙を半分に折り、さらにもう一度半分に折った上で２個分を切り取り、図２と同様の図の２個分にあたる箇所の下に貼った（図３）。その図をもとに 220+55 で値段が求まることを確認し、授業を終えた。

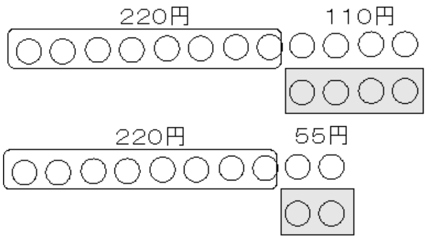

図３

３．抽出児の学習の様相

本節では抽出児のうち、靖史、瑞穂、達也、絵美（いずれも仮名）の解決に焦点を当て、彼らの下位単位の構成の様相を考察していく。布川(2006)の結果から、元の合成単位の 1/3 の下位単位を構成する問題の解決で児童の困難が現れると予想されるが、実際、この４名中２名は適切な単位を構成できなかった。そこで、以下では、この下位単位を構成できた児童とできなかった児童の解決過程を、他の下位単位（元の単位の 1/2 あるいは 1/4）を要する問題の解決過程も参照しながら比較し考察していく。

前節で述べたように３回の授業の後、第４時として各自で問題を解いてもらう 30 分の授業を行った。問題のうち、第７問と第８問はそれぞれ次のような問題であった。

第７問：12 本で 280 円のえんぴつがあります。このえんぴつ 15 本では､いくらでしょう。

第８問：9 こで 390 円のアイスがあります。このアイス 12 こでは、いくらでしょう。

第７問では(12 本：280 円)という与えられた合成単位から、(3 本：70 円)という下位単位を構成することが期待されていた。ここではもとの単位の 1/4 を考えねばならないが、布川(2006)などの結果より、半分の半分として考え

る方がわかりやすい子もいると予想される。前節で述べたように第３時では半分の半分という扱いを取り上げていた。これに対し、第８問では(9 こ：390 円)の合成単位から、(3 こ：130 円)という下位単位を構成することが必要となる。なお、280÷4、390÷3 は３年生の段階では学習をしていないのでもちろん筆算により求めることを期待したものではなく、硬貨などをイメージした上で、４等分や３等分、あるいは半分の半分をすることで求めることが可能ではないかと期待をして出題をすることにした。

本節で取り上げる４名の児童については、第７問において靖史、瑞穂、達也の３名が答えを求めることができた。残る絵美も 280 円の半分の半分を求めることがほぼできたが、後述するように最後のところで計算間違いをした。第８問では、靖史、瑞穂は答えを求めることができたが、達也と絵美の解決ではもとの合成単位の 1/3 というアイデアが見られなかった。

3.1 靖史の解決

第７問ではすぐに 12÷4＝3, 15÷3＝5, 280÷4＝70 と書く。280÷4 は筆算を用いていた。「そう考えればいいのか」「図でいうと」と言い、図４をかいた。しかし、「考えたら全て違うじゃん」と言い、今までの式と図を全て消した。

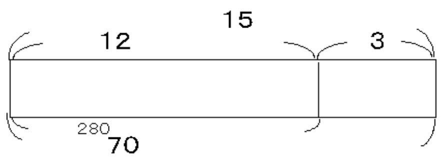

図４

次に 12×15＝180 の筆算をするが、その後はプリントを見て「あってんの」「おかしいな」「やっぱあった」と発話した。新しいプリントをもらうと 12÷4＝3, 15÷3＝5 と書き、さらに 280×5＝1400 を計算した。ここで図５をかいた。

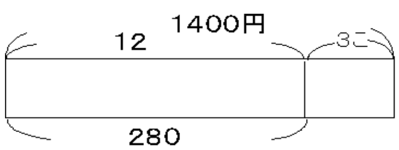

図５

しかし直後に 280×5＝1400 を消し､図中の 1400 も横線で消した。「280 は、割るがあるんだ」と言い、280÷4＝70, 70×5＝350 と書いた。図５を図６のように修正した。

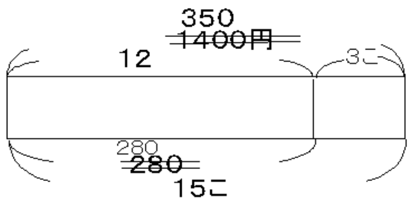

図６

第８問では、すぐに 9÷3＝3, 12÷3＝4, 390÷3＝130 と書いた。390÷3 は筆算で行った。さらに 130×4＝520 と求め、図７をかいた。

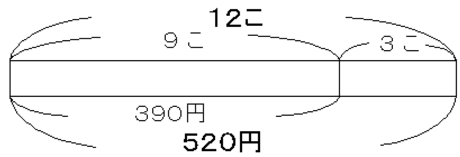

図７

観察者が右側を指し「ここは」と尋ねると、少し間があってから 520－390 を計算し 130 と求め、右側の長方形の下に 130 と書き入れた。

3.2 瑞穂の解決

第７問ではすぐに図８の外枠と 12 本の縦線、３本の棒をかいた。図の横に 140+140 の筆算をし、280 と求めた。上の縦線６本、下の縦線６本を鉛筆で押さえながら数えた。再度数えるが、今度は３本の棒も数え、棒の部分の横にある空白の囲みを加えた。筆算の 140 から矢印を出し、「６本」と書いた。140 から別の矢印を出し、その先で 70×2 の筆算をし、棒の部分の下に「70」と書き丸で囲んだ。

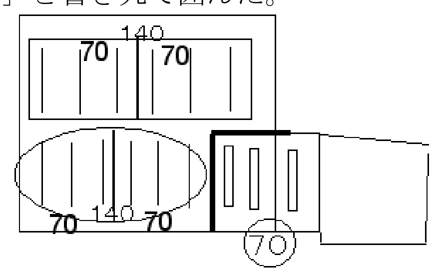

図８

上の縦線６本、下の縦線６本をそれぞれ囲み、囲みの中央上あるいは中央下に「140」と記入した。さらに各囲みの中央に縦線を入れ、分けられたそれぞれの部分に「70」と書いた。図の下に 70×5＝350 と書き､答えを 350 円とした。

第８問では、最初に 12÷9＝と書くが、すぐにこれを消した。図９のうち、外枠、外枠上部

中央の「390 円」、中の９つの長方形、右下の囲みとその中の３本の棒、右側の３つの長方形を区切るような縦線をかいた。

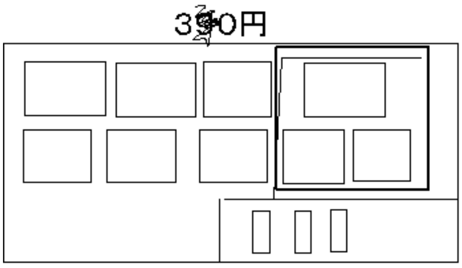

図９

「390 円」から矢印を出し、その先に 150＋150 の筆算をして 300 と求めた。その 300 の下に 90 と書き、筆算のように横線を引くが、そこで止まった。枠内の長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていたが、今の筆算を全て消した。そして、図の下に 390÷3 と書いた。その後、27＋3, 30＋3＋3, 11×3 を筆算により計算していたが、390÷3＝13 と書いた。少し間があって、13 の後に 0 をつけ 130 とした。図９の右側の３つの長方形を図のように四角で囲んだ。プリントの右下に 130＋130＋130 を計算し､390 と求めた。

ここで図 10 の上３段の長方形とそこから出る線をかき、その線の先に「39」と書いたがすぐにこれを消した。図９の長方形のうち上段３番目、下段２番目、上段４番目、及び右下の棒の３番目を指で押さえた。このとき「1，2，3、1，2，3、1，2，3、1，2，3、４個」と発話した。図 10 の４番目の長方形を加え、線の先で 130×4 の筆算を行い､520 と求めて答えを 520 円とした。

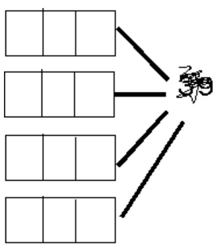

図 10

3.3 達也の解決

第７問では 20 秒ほどして 280÷2＝140, 140÷2＝70 と書いた。さらに 280＋70＝350 と書き、答えを 350 円とした。１分ほどで解決を終えた。

第８問では、すぐに 390÷2＝と書き、390÷2 の筆算を途中までするが、その筆算は途中のままで消した。190×2 を筆算で 380 と求め、それを微調整して 195×2 とし 390 と求めた。この 195 を 390÷2 の答えとした。40 秒ほど間があってから 195÷2＝と書き､筆算をして 97 あまり 1 と求めた。さらに 97×2＝194 の筆算を行った。97 を 96 や 98 に変えて筆算をするが、結局「だめだなあ」と発話し、195÷2＝97 とした。同時に今までの筆算に縦線を引いて消した。390＋97＝487 と書き、その下に「487 円？」と書いた。ここで図 11 をかいた[2)]。まず四角を９個かき、プラス記号を書いてからさらに四角を３つかいた。次に上段中央と下段左端に縦線を引いた。

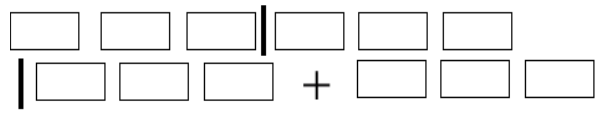

図 11

すぐに「まあ、いいかな」と言い､「487 円？」の疑問符にバツをつけ、解決を終えた。

3.4 絵美の解決

第７問では、すぐに図 12 をかいた。12 個の丸をかき、これを大きな楕円で囲んだ。さらにその右に３つの丸をかいた。

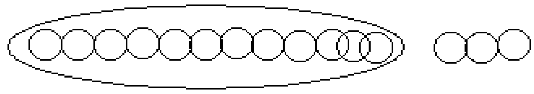

図 12

この図の下に図 13 のように数が枝分かれたしたものを書いた。140×2 を筆算で計算し､280 と求めた。その後、図 14 のように、140 から始まる別の枝分かれしたものを書いた。この図の

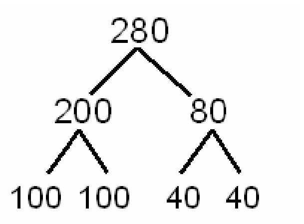

図 13

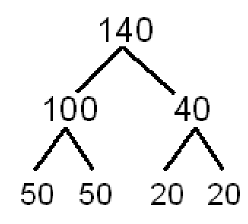

図 14

左に 52＋52＝104 の筆算をした｡図 12 の下に｢式 280＋52｣「答え 332 円」と書いた。280＋52 の筆算を改めて行ってから解決を終えた。

第８問では、最初に次の図をかいた。

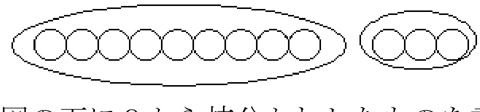

図 15

図の下に９から枝分かれしたものを書き、さ

らに390から枝分かれしたものをかいた(図17)。

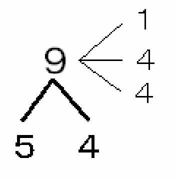

図16

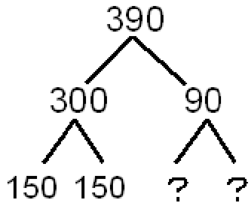

図17

150＋90＝240を計算した後、時々メモのようなものをかきながら２分近く明確な動きがなかった。メモの中には「３？」があったが、再度３と書くと、今度はその上に 240 と書いた。240＋240の筆算をして480と求めた。図17の左に150＋40＝190を計算し、さらに190×2＝380や150＋50＝200の筆算を行った。50から枝分かれの線を出したもの、また40から20と20に枝分かれしたものを書いた。ここで新しいプリントを受け取った。

新しいプリントに「式　　×　＝　」「答え　円」と書くが、すぐに前のプリントを見始めた。

新しいプリントに12を6と6に枝分かれしたものを書き、150＋6＝156 を計算した。12から枝分かれしたものをさらに続けて、図18のようにした。

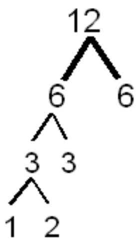

図18

少し間があった後、12 から枝を出したもの、390から枝を出したものを書くが、12からの枝の先には 6 と 6、390 からの枝の先には 300 と 90を非常に薄い字で書いた。観察者が図を見直してみたらどうかと介入したが、特に図を見直すことはせず、150＋4＝154の筆算をした。

再び 390 から枝分かれしたものを書く（図19)。少し間があってから、150＋300＝450の筆算をした。さらに150＋50の筆算を途中までやり、その後これを塗りつぶした。この時点でプリントを集めるという指示があり、解決を終えた。

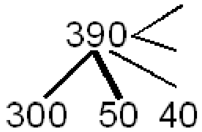

図19

４．抽出児における下位単位の構成

本節では1/3の下位単位を構成する問題で答えを求めることのできた靖史および瑞穂と、答えを求めることができなかった達也および絵美の解決とを比較してみることにする。

4.1 解決できた児童の下位単位の構成

第８問の解決において、瑞穂は答えを求めることができたが、靖史のようにすぐに答えに到達できたわけではなかった。彼女の解決では、以前の解決の仕方をそのまま応用しようとして失敗し、それを修正することによって解決に向かった様子が見られる。瑞穂は最初に12÷9を計算しようとしているが、これは第１時から第３時の前半まで扱われ、第４時の第１～５問にも現れた、所与の合成単位で全体をノルム化できるタイプの問題についての解決の影響と考えられる。例えば、第５問の３個 80 円の納豆 42個の値段を求める問題では、瑞穂はすぐに42÷3を書いている。これを第８問に適用すれば12÷9となる。

瑞穂はその式ではノルム化ができないことに気づくと、図９のような図をかいている。またこの図では９個と、12個にするために必要な３個とがかかれているだけでなく、９個の値段である390円も図の上部に書かれていた。つまり、所与の合成単位の２つの要素が図の中に現れていたことになる。

瑞穂はその後、390 円から出した矢印の先に150＋150を計算していたが、これも半分を考える問題の影響と言えよう。実際、第７問で 280円の半分の半分を求める際に、まず 140＋140の計算により280の半分が140であることを確定していた。しかし、この方向での考えを中断した際には、図の枠内にある長方形を鉛筆で押さえたり、それらを区切るように鉛筆を動かしたりしていた。つまり、ここでも、以前の方法の適用に問題が出た際には図の上で考えることが行われていた。また、鉛筆を動かしていた直後に390÷3の式を書いたことから､図の上で長方形の区切り方を考えたことが1/3の下位単位

を構成する可能性を示唆したものと考えることができよう。図 10 は３個により下位単位で全体をノルム化することを明確化したものであるが、上３段を書いた後、図９の長方形のうちの３つと右下の棒の１つを指で押さえ「1，2，3、1，2，3、1，2，3、1，2，3、４個」と発話したことも、瑞穂が図９における区切りを下位単位を構成する際の拠り所にしていたことを示している。

390÷3 が 130 となることを見出した後で、図９の右側の３つの長方形を図のように四角で囲んでいるが、これは(3 こ：130 円)という下位単位を意識したものと言えよう。この３つの長方形を四角で囲んだことにより、もとの９個の中にある３個という単位が明確にされることにもなっている。

瑞穂の第７問に対する解決を見ても、同様の傾向が認められる。図８の上段６本、下段６本の縦線と右下にかかれた３本の棒を対比させて数えていく中で、６本のまとまりをさらに２等分して(3 本：70 円)という下位単位を構成する可能性に気づいていった、と考えることができよう。第８問と同様、図の上で考えていくことで必要な下位単位の構成に気づいている。しかもそこで気づいたことを図の上にかき入れることにより、元の単位の分割により下位単位が構成される様子が表現されることにもなっている。また第８問と同様、図の中に本数だけでなく対応する値段も記入されているが、第７問の方が第８問よりも詳細に記入されている。

靖史の場合には､第８問ですぐに 9÷3＝3，12÷3＝4，390÷3＝130 と書き、130×4＝520 と求めた後になって図をかいていることから、図が解決にあまり寄与していないように見える。しかし､第７問の解決を見ると図をかき直したり、修正したりしており、図が解決の助けになっていたことがわかる。また第６問と第７問で下位単位を構成する際に、所与の合成単位の構成要素のうち、値段の方を等分しないという誤りをおかしていたが、第８問ではこの誤りをおかしていない。第６問と第７問で図を用いて考える中で、下位単位の構成の仕方がより意識的に行われるようになったものと考えられる。

第７問に対する靖史の解決を見てみると、すぐに 12÷4＝3 を計算しているが、このときの３は 15÷12 のあまりとして見出されている。実際、第３時でのみかん 12 個の値段を求める問題で、靖史はすぐに 12÷8 が割り切れないと発話し、またこれを「４余る」と表現していた。15÷3、280÷4＝70 と書いており、すでに解決がほぼできているように見える。しかし、図をかく中で「全て違う」とし、式や図を全て消したことからすると、この時点では問題場面の全体が十分理解されていなかったと考えられる。280÷4 により求めた 70 が図４で全体の値段に当たる箇所に書かれていること、図を消した直後に 12×15＝180 と本数どうしのかけ算をしていることは、理解の不十分さを示している。図４をかく際、本数の 3，12，15 を記入し、次に値段の 70，280 を記入したところで考え込み、その後、式や図を消していた。また最初に 12÷4＝3 の式を消しており、図の中で 70 と 280 の関係が整合しないことが、それまでの考え方全体を見直す契機になったと言える。

図を消して見直した後では、12÷4＝3，15÷3＝5 と再度書いた上で、さらに 280×5＝1400 を計算している。ここでは上述したように、所与の合成単位の構成要素のうち、値段の方を等分しないという誤りをおかしている。しかし、これを図５のように表した直後に 280×1400 を消していることから、ここでも図をかいたことで、280 円と 1400 円の関係の整合性がとれないことに気づき、考えを修正できたものと考えられる。

第８問の最後に観察者が右側の部分について尋ねた際に、すぐに答えられず、また結局 390÷3 ではなく 520－390 により 130 と求めたことは､「余る」という考えを基に構成した下位単位が、図示された関係の中で十分意識されていなかったことを示している。しかし、計算で求めたことを図で視覚化することにより、与えられ

た条件や求めたことの整合性を確認し、その中で考えの誤りを自分で修正することができていたと言える。第７時では図の方も書き直したり、修正をしたりしており、瑞穂と同様、ある種の図との相互作用が見られる(*cf.* Nunokawa, 2006)。さらに靖史の図では、瑞穂の第７問の図と同様、本数や個数とそれらの値段の双方が記入されており、自分で求めた数値も書かれている。こうした図の特徴が、上のような整合性の確認を支えたものと考えられる。

4.2 解決できなかった児童の下位単位の構成

達也は第７問では特に図をかくこともなく、280 の半分の半分を求め、それを 12 本の値段に加えることで 15 本の値段を容易に求めている。所与の合成単位の 1/3 が必要となる第８問でも、達也は半分の半分を求め、それを与えられた９個の値段に加えることで答えを求めた。彼はこのやり方で 487 円という答えを求めた際にはその後ろに疑問符を付けており、答えに自信を持っていなかったと考えられる。その後で図 11 をかいていることから、瑞穂のように以前の方法の適用に問題を感じるところまではいっていないが、他の問題よりも不安定さを感じて図をかいたという面が伺える。

図 11 に見られるように、図ではもとの９個が３個ずつのまとまり３個に分けられていた。しかしこの中に問題の中で与えられた値段も自分で求めた値段も書かれることはなかった。また、最初にかかれたもの以降、図をかき直したり修正することもなく、すぐに「まあ、いいかな」と発話して、487 円の後ろの疑問符を消した。こうしたことから、図は自分の考えを確認したり修正したりすることに役立たなかったと言える。487 円という答えを受け入れたということは、第８問に半分の半分という考え方を適用すること自体が、検討されずに終わったと言える。つまり達也の解決では、自らの下位単位の構成の仕方が対象化されなかったと考えられる。

絵美は第７問では、すぐに図 12 をかいているが、そのかき方から、15 本にするためには 12 本にあと３本を加える必要があることに気づいたと考えられる。また３本の値段を求めるために、12 本の値段 280 円の半分の半分を求めればよいことにも、容易に気づいたものと思われる。最後の段階で 50 と 20 を併せて 70 とすべきところを 52 としてしまったために正答には到っていないが、半分を求める方法を工夫しながら適切に考えを進めていたと言えよう。

第８問でも絵美は、値段の分かっている９個に３個を加えることで 12 個になることを、図 15 に表していた。図 16 では個数の９を、図 18 では全体の個数 12 を分けようとしており、第７問との違いに気づいていたと考えることもできる。しかし９の分解では右横には３つに枝分かれしたものを書いているものの、それ以外では第７問と同様２つの枝に分けている。確かに図 19 で 390 円を分ける際には 300 と 50 と 40 の３つに分けられているが、それまでの計算を見ると、この 50 と 40 は 390 の 90 を２つに分けたものと考えられ、２つに分けることの延長にあった。

図 17 以降の計算を見ると、そこでの枝分かれに関連した計算をしていたと考えられる。また、90 を分けたと思われる 50 や 40 をさらに分けようとしていることから、半分の半分の考えを用いていたと見ることができる。しかし、解決の後半になると、390 円を分けることから出てきたと思われる 150 と 12 個を分けることから出てきたと思われる６を足す(150＋6)などしており、その考えが今どのように適用されているのかについてのモニタリングが行われにくくなっていたと考えられる。

絵美の解決では、図 17 では枝の最後に疑問符が書かれ、解決に困難を感じている様子が伺えるが、この時点においても、また観察者が促した際にも、図に戻って考える様子は見られなかった。新しいプリントを受け取った際にも、まず「式　　×　＝　」と書いており、式の形でまとめることに気持ちが向いていたと思われる。

結局、絵美の第８問の解決では、最初に図が

かかれるものの、考えが停滞したときに図に戻って考えたり、図をかき直したり修正したりすることはなかった。また達也の図と同様、個数に関わる情報は丸や囲みにより表されているが、値段についての情報は図の中に書き込まれなかった。値段の 390 円や個数の９個、12 個などを枝分かれにより半分に分けることが考え方の中心に据えられていたが、半分にすることが図などを用いて検討されることはなかったのである。

4.3 児童の解決における相違

4.1 で取り上げた児童と 4.2 で取り上げた児童の解決における違いをまとめてみる。

第１の違いとして、靖史と瑞穂は、図を書き直したり修正したりする様子が見られた。靖史が計算で求めた結果を図の中に組み入れていたのに対し、瑞穂は計算に行き詰まった際に図に戻るという違いはあるが、両者とも図との相互作用を通して考えていた。一方で達也と絵美も図はかくものの、それを用いて考えている様子が見られなかった。また図を用いて考えないこととも相俟って、達也も絵美も、半分を基にした考え方を、問題場面との整合性を検討することなく使っていた。Diezmann & English (2001)は図をかく過程自体が、問題の表象としての図の十分性を振り返る機会を与えるとし、「問題構造の理解を改善する手段として図をかくことを利用する」(p. 88)よう提唱している。靖史や瑞穂の図の利用は、下位単位の構成を必要とする問題において、この機会を十分に利用したものと言えよう。

第２の違いとして、かかれた図に数値が書き込まれていたかどうかがある。靖史と瑞穂の図では値段の情報が書き込まれており、特に瑞穂の図では構成された（3 こ：70 円）といった下位単位の２つの要素が図に含まれていた。これに対し、達也と絵美の図では本数や個数は長方形や丸により表されていたが、値段の情報は書き込まれていなかった。問題からの数値的情報を図に組み込むことの重要性が指摘されている（Lopez-Real & Veloo, 1993)が、第1の違いとも関連して考えると、靖史や瑞穂のように自分が見出した数値も図の中に組み入れていくことは、その基になった自分の考えを確認することにもなり、今回取り上げた問題では下位単位の構成の仕方を対象化することを可能にすると考えられる。

こうした傾向は、第３時の授業で下位単位を構成する必要のある問題を解く際にも、すでに見られていた。靖史は丸を並べた図の中に値段と個数の数値を書き込んでおり、また 10 個の値段を考える際には「８やると２余るから」と言いながら左から２番目と３番目の丸の間を指で押さえる仕草を見せていた。瑞穂は８個入りや４個入りの袋を書いた後、そこに縦線を引いて半分にしたり、値段を記入したりするなどを何度も行った。達也の場合は、12 個の値段を求める問題では４個の丸を囲んだところにその値段 110 を書き込んでいたが、10 個の値段を求める際には、図はかかずに計算により答えを求めた。絵美は 12 個の値段を求める問題の話し合いで 220 の半分が話題になった際には、12 個の丸を４個ずつ囲むという操作をしているものの、12 個の値段を自分で考える場面や 10 個の値段を自分で考える場面では、所与の単位である８個の丸を囲んだだけで、あとは 220 や 110 を枝分かれのようにして半分にした値段を求めた。

以上より、第３時以降、下位単位の構成と問題場面との関わりを、図を継続的に用いながら考えてきたかどうかが、第７問、第８問の解決に影響を与えたと見ることができよう。

５．比例的推論の意識的な利用

本稿で取り上げた問題については、瑞穂や達也、絵美のかいた図における線や長方形、丸が個々の鉛筆やアイスを表していることからすると、彼らの図は問題場面の表現と考えられる。したがって、前節で述べてきた違いは解決において困難を感じたり停滞したりしたときに問題場面に戻って考える傾向(Nunokawa, 2001)に関することとも言える。日野(1996)は比例的推論に関わり、自分の持つアイデアの適用可能な範

囲を意識することが、アイデアに関わる具体性を伴うイメージを持つことと関わっていること、またこうしたイメージがない場合には形式的な計算に陥ってしまうことを指摘している。問題場面との接点を持ちながら考えることは、イメージを持ってアイデアの適用可能性を考えることを支えるものと期待されよう。これに加えて、前節で述べた違いはまた、比例的推論という認知的道具の意識的な利用という問題も内包していると考えられる。

Wells (1999) は、学習者は協同的活動の中で文化的な人工物(artifacts)や文化的実践をアプロプリエートすると述べている。ここで、文化的実践には教科を背景とした推論の仕方を行うことを含めることができよう（*e.g.* Rosevery *et al*,1992)。また、そうした推論を支えるアイデアは、認知的な人工物や道具として捉えることができよう。実際、Prawat (1996, 2000) は教科からとられたアイデアは、生徒の思考をある方向に向かわせる道具であり、生徒がものごとを新しい光の下で見るように促すとしている。

これとは別に、数学的な表象も認知的道具の役割を果たしうる。Vygotsky (1997)は認知的道具として言語、記数法、文字式、図式、地図等をあげている。また大谷(2002)は、数学的な表象が社会的機能だけでなく思考機能を持つように移行することを指摘している。思考機能では、表象が自分自身の思考や行動を制御する手段となると考えられるが、このことは Vygotsky (1997)が認知的道具を技術的道具から区別する最も本質的な特徴として言及していたことである（p. 87）。

本稿の事例で考えてみると、比例的推論という数学的なアイデアが一方であり、授業の中で教師が導入し用いた表象がある。丸を並べ囲んだ図は数学的とは言い難いが、授業の中で導入され公的に用いられたという意味では、今回の実践では文化的道具と考えられる。比例的推論はある種の場面との学習者の相互作用を媒介するものとなる（図 20(a)）。前節の考察は、アイデアのレベルでの認知的道具である比例的推論を自覚的に利用することにおいて、表象レベルでの認知的道具を用いて自らの思考をモニターしコントロールすること（図 20(b)）の重要性を示すものと捉えることができよう。

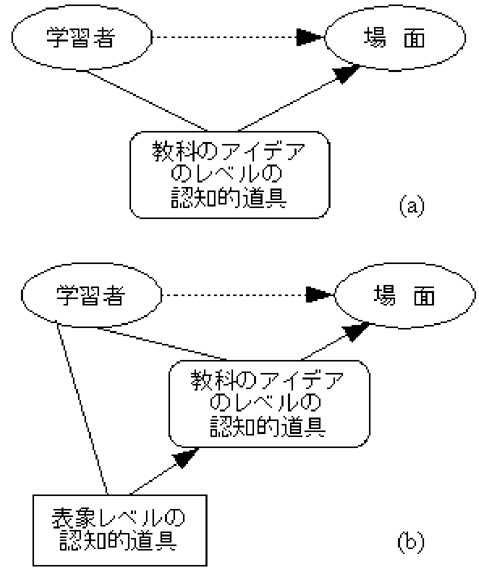

図 20

６．おわりに

本稿では、小学校３年生が比例的推論を用いて問題を解く過程を分析することを通して、適切な下位単位を構成できていた児童が、数値の情報を書き入れた図との相互作用により思考を進めていたことを示してきた。また、そうした思考の特徴を、表象レベルでの認知的道具を通してアイデアのレベルの認知的道具を自覚的、随意的に利用できるようになることとして捉えた。こうした捉え方に基づく支援をより意図的に行った場合の子どもたちの思考の発達について、さらに探求する必要があろう。

謝辞：調査にあたりご協力頂きました武井由香先生、泉豊先生、林克巳先生はじめ上越教育大学学校教育学部附属小学校の先生方に感謝申し上げます。

註および引用・参考文献

1）調査の授業は以下のメンバーにより実施された：中村光一、布川和彦（上越教育大学）; 林克巳（上越教育大学附属小学校）; 武内裕、中澤和

仁、白石信子、五十嵐真、早川英勝、渡邉武浩、米本香太郎（上越教育大学大学院生）；清水則仁（上越教育大学学部生）。授業者には武内と中澤がなり、授業は授業者の２名と中村、布川が中心となって立案し、メンバーで検討した。各授業の後でメンバーによりミーティングを持ち、報告された子どもの学習の様子を参考にして次時の修正を行った。

2）達也は第６問（12 個 300 円のチョコ 18 個の値段）で類似の図をかいていた。そこでは最初に図をかき、次に 12÷2＝6，300÷2＝150，300＋150＝450 として答えを求め、２分ほどで解決を終えた。ただしこのときの図には図 11 のような縦線は入っていなかった。また 12 個を表す長方形も上段に７個、中段に５個と、６個のまとまりとなるようにはかかれなかった。

Diezmann, C, M. & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

日野圭子. (1996). 比例の問題の解決において構成されるユニット:Well-chunked measure を含む問題に対する日米児童の応答の分析. 筑波数学教育研究, *15*, 15-24.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children’s use of diagrams as a problem-solving strategy. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.

Nunokawa, K. (2001). Possible activities facilitating solving processes: A lesson from a stuck state. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32* (2), 245-253.

布川和彦. (2005). 子どもの学習過程に基づく支援の構想：５年生「割合」単元における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究, *20*, 11-20.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2* (3), 33-54.

布川和彦. (2006). 比例的推論の授業における小学校４年生の学習の様相. 上越数学教育研究, *21*, 1-12.

大谷　実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成 11～13 年度科学研究費補助金(基盤研究C(2))成果報告書.

Prawat, R. S. (1996). Constructivism, modern and postmodern. *Educational Psychologist, 31* (3/4), 215-225.

Prawat, R. S. (2000). The two faces of Deweyan pragmatism: Inductionism versus social constructivism. *Teachers College Record, 102* (4), 805-840.

Rosevery, A. S., Warren, B., & Conant, F. R. (1992). Appropriating scientific discourse: Findings from language minority classrooms. *Journal of the Learning Sciences, 2* (1), 61-94.

白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究：数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, *21*, 69-80.

Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky, Volume 3: Problems of the theory and history of psychology* (pp. 85-89). New York: Plenum Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.