上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.45-54.

中学校の授業における生徒の数学を創り上げる意識的な推論に関する一考察
－ 仮説を修正・発展させるジグザグ過程における事例検証の役割 －

武内　裕
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者は，生徒が授業において，中島(1981)が示す数学を創り上げる活動を通して，既有の数学的な知識を修正・発展して欲しいと考えてきた。しかし，生徒の実態を見ると，結果の正誤へのこだわりが強く，推論過程への意識の低さを感じる。国立教育政策研究所(2005)の調査結果でも，同様な生徒の傾向が見られる。そのために，生徒は推論を進める前提となる既有の数学的な知識を意識し，他の知識との関係を捉えながら，修正したり発展したりできない。つまり，数学を創り上げるための推論ができないのである。そのような生徒の実態をつくっている授業の問題点として，推測とその検証の過程が議論に現れないまま，一気に一般化され，結果だけが強調されていることが挙げられる（武内, 2006 ）。

数学は，反例に小突かれ，推測から前提へと動き，再び戻って推測を削除し，定理で置き換えるという発見のジグザグによって発展する(Lakatos, 1980)。つまり，最終的な結果に表れることのないジグザグ道をたどることが，数学を創り上げることであり，数学的な知識を修正・発展することであるといえる。

そこで，本稿では， Lakatos(1980)を背景とし，小学校で指数の性質を創り上げる授業を実現した Lampert(1990)のジグザグのアイデアをもとに，意識的な推論の構造を明らかにする。そして，中学校数学の授業における生徒の推論過程を分析し，意識的な推論の様相とその実現の要因を明らかにすることを目的とする。

２．授業における生徒の意識的な推論を捉える枠組み

まず， Lampert(1990)のジグザグ過程をもとに，授業における生徒の意識的な推論を捉える枠組みを示す。

2.1．仮説を修正・発展する推測と事例検証，証明，論駁のジグザグ過程

Lampert は，「帰納的な態度」，「道徳的資質」(Polya, 1959)や「勇気と慎み深さ」(Lakatos, 1980)などの価値を強調し，「推測に始まり，反例や論駁を通して，仮定の検証に進むジグザグ道をたどる証明」(Lampert, 1990, p.30)により，推測のもとにある仮説が修正・発展すると述べている。つまり，仮説を修正・発展するジグザグ過程とは，「推測と事例検証，証明，論駁のジグザグ過程」であり，その構造は次の図1のようになる。本稿では，このジグザグ過程を意識的な推論として捉える。

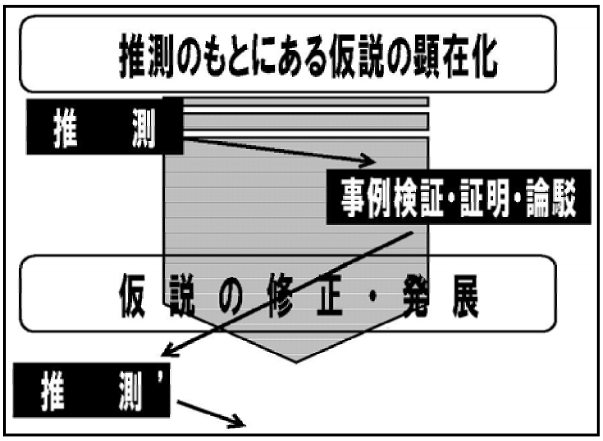

図１　意識的な推論の構造

2.2．仮説と推測，事例検証，証明，反例の意味

次に，生徒の推論過程でなされる思考活動を

捉えるために，仮説や推測，事例検証，証明，反例の意味づけを行う。

2.2.1. 仮説

Lampert が述べる仮説は，正誤にかかわらず推測のもとにある数学的な知識を示している。一方，中島(1981)や杉山(1986)も，創造的・発展的な活動を行う上で，仮説（仮設）をおいて考えることの重要性を指摘している。両氏が述べる仮説（仮設）は，ある程度正しい数学的な命題を示している。しかし，授業では，両氏が述べる仮説（仮設）に至るまでに，既有の知識や経験をもとにした誤った仮説や未熟な仮説が存在する。そこには，暗黙のうちに前提としている知識も含まれる。そこで， Lampert に近い立場をとり，仮説を「正誤にかかわらず，推測や事例検証の前提としている数学的な知識」とする。

2.2.2. 推測

Lakatos(1980)が示す推測は，一般化を意識したものである。従って，根拠のない単なる予想とは異なるものである。一方， Lampert(1990)が示す推測には，生徒の考えに基づいた結果（答え）や予想も含まれている。大竹（1993)も，Lakatos の「証明と論駁」の考えを高校数学に取り入れる上で，推測の意味を広げる必要性を指摘している。よって，中学生の実態を考え，推測を「一般化が意識されたものだけでなく，素朴な推測や予想，結果」も含めて捉える。

2.2.3. 証明と事例検証

Lakatos（1980）や Lampert（1990）が示す証明は，推測を検討する手段であり，大ざっぱな思考実験や議論など広い意味で捉えている。一方，中学校数学において，証明とはある命題を対象として数式や記号を用いて仮定から結論を演繹的に導くこととして扱い，演繹的な考え方を身につけていく上で重要視されている。杉山(1986)は，証明指導のねらいとして，証明の見直しを行い命題の理解を深めることを挙げている。よって， Lakatos や Lampert が示す証明まで意味を広げず，「数式や記号などを用いて演繹的に導くこと」とする。ただし，生徒の実態を考え，証明の対象は，命題まで至っていない推測も含める。

事例検証は，ある程度，推測がはっきりした状態で，「推測の確信を高めるために行う具体的な検証」とする。また，証明を対象として行う場合も含める。ただし，推測がはっきりしない状態で，具体的に事例を取り出して推測を導こうとするものは，事例観察として捉える。

2.2.4. 反例

Balacheff(1986)は，子どもの知識背景や合理性，推測によって，反例が反例となり得るかが変わってくることを指摘している。よって，反例を「生徒にとって，仮説や推測を否定する要因を含んだ具体的な事例」とする。

3. 調査の概要

授業における生徒の数学を創り上げる意識的な推論の様相を捉えるために行った実験授業の概要を示す。2006年5月下旬から6月上旬にかけ，N県内の公立中学校3年生女子5名を対象

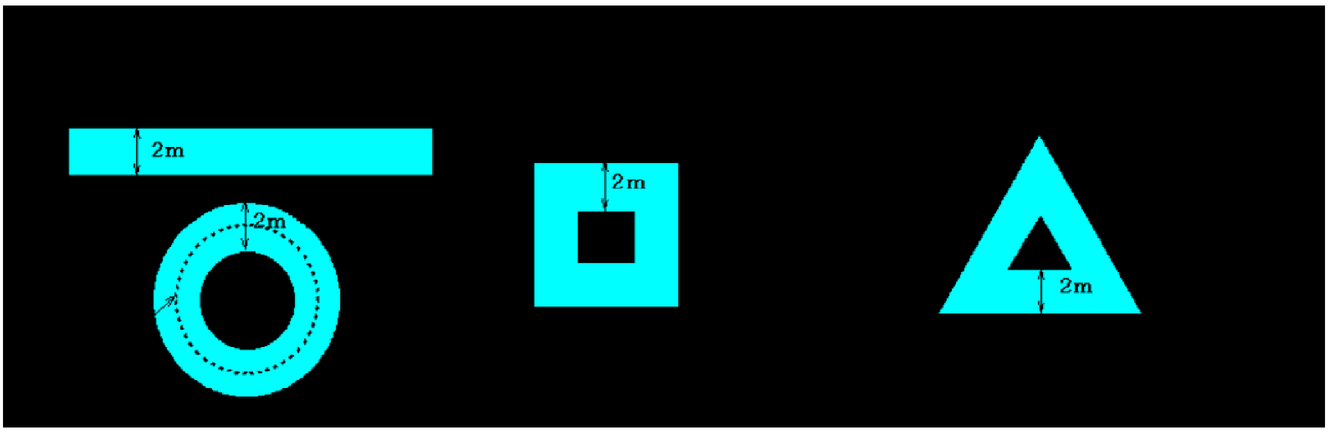

図２ 題材１「道の面積を比べよう」

に，筆者が小集団による授業を5時間実施した。データはビデオとICレコーダに記録し，学習プリントを全て回収した。そして，データをもとに授業プロトコルを作成した。

題材は，先行研究や教科書から選び出し，ジグザグが起こりやすいように一部改訂した。題材1「道の面積を比べよう」(図形の性質)を2時間，題材2「カレンダーに隠された秘密」(文字式の利用)を3時間扱った。本稿では，題材1「道の面積を比べよう」(図2)について分析する。

第1時は，学習問題1において，「道①と道②の面積は等しくなるだろう」と推測し，実測して面積を求める事例検証を行った。しかし，実測の誤差により面積の値が一致しなかったため，道②を台形に変形する事例検証に変更した。道②の内周・外周の長さとセンターラインの長さの差が等しくなることに気づき，道②を道①に変形できると考え，2つの道の面積は等しいとした。

第2時は，教師の発問「他の図形であったらどうか」に対して，生徒から「正方形」が挙がり，練習問題を解決した。「道③の面積も等しくなるだろう」と推測し，道③の内周・外周の正方形の面積の差を求める事例検証を行い，推測の確信を高めた。そこで，教師が事例検証の方法変更を指示した。生徒は，道③を平行四辺形や長方形に変形する事例検証と，道の幅とセンターラインの長さから面積を求める事例検証を行った。

次に，教師の発問「どんな形でもできるのか」に対し，「星形の道でもできるだろう」と推測した。よって，学習問題2は扱わず，星形の道を扱った。星形の道を台形に区切って交互に組み合わせる事例検証を行う中で，新たな推測「星形の道の頂角を区切ると角が二等分されるだろう」などが出た。最終的に，星形の道の1つの頂角に直角三角形をつくり，その合同を示すことで，推測の証明を行った。

4．分　析

まず，生徒の仮説を分析する。そして，仮説に変化が見られた清原(仮名)の仮説の変化とジグザグ過程を分析する。

4.1. 仮説の分析

題材1において，生徒の道の面積が等しいという推測や事例検証の前提となっている数学的な知識は，次の3つに大別できる。

ⅰ)道を求積した値が同値であれば，面積が等しい。
ⅱ)道を同じ形に変形できれば，面積が等しい。
ⅲ)道の幅とセンターラインの長さが等しければ，面積が等しい。

どの仮説も正しい知識であるが，題材1における問題場面の構造「道とセンターラインの長さの積が面積になる」を捉えているかという観点でみると，【仮説ⅲ】が最も問題場面の構造を捉えていると考えることができる。

4.2. 仮説ⅲへ変化したジグザグ過程

清原は，道③(正方形)を扱った場面で，【仮説ⅰ】から【仮説ⅱ】，【仮説ⅲ】へ変化している。その仮説の変化の過程は，次の6つの場面に分けることができる。この6つの場面を時系列に沿って，ジグザグの観点で分析する。

場面	仮説の変化
1	学習問題1の場面では，【仮説ⅰ】【仮説ⅱ】が混在し，最終的には【仮説ⅱ】へ変化。【仮説ⅲ】も意識されている。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 10001～20219)
2	練習問題(道③)の導入場面では【仮説ⅱ】から【仮説ⅰ】へ変化。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 20220～20303)
3	教師の介入で事例検証の方法変更をするが，【仮説ⅰ】から変化しない。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 20304～20357)
4	他者(松田)の事例検証を見て，【仮説ⅰ】から【仮説ⅱ】へと変化。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 20358～20378)
5	他者(牧村)の事例検証を見て，【仮説ⅱ】から【仮説ⅲ】へと変化。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 20379～20449)
6	他の図形の道について考える場面で，【仮説ⅲ】を一般化しようと試みる。(ﾌﾟﾛﾄｺﾙNo. 20603～21580)

場面1

仮説ⅱ「道を同じ形に変形できれば，面積が等しい」
推測「道②の内周・外周の長さとセンターラインの長さの差が等しければ，道②は道①と同じ長方形になる」
事例検証「道②の内周と外周の長さとセンターラインとの差を求める」
※仮説ⅲ「道の幅とセンターラインの長さが等しければ，面積が等しい」が意識されている。

学習問題1の導入場面では，「道①と道②の面積は等しくなるだろう」と推測した。そして，その検証方法として2つの道の面積を求積する方法を挙げた。さらに， 10051 「だって，ようは，こっち（内周）が短い分，こっち（外周）が長いもんで，…」と発話し，道②を道①に変形する方法も挙げている。しかし，道②の内周・外周を比べる基準が明らかになっていない。また， 10875 「厚みが2センチーー…」と発話していることから，幅を変えずに道②を変形できるという確信は低い。つまり，この場面での清原は，確信が低いものの，【仮説ⅰ】と【仮説ⅱ】が混在した状態である。

まず，【仮説ⅰ】を選択し，道②の直径を実測し求積を行ったが，誤差が生じ道①と一致しなかった。そのため，【仮説ⅱ】を選択し，道②を変形する方法に変更した。全体でも，道②を変形する方法について議論がなされた。その中で，牧村(10864)から道①と道②のセンターラインの長さが同じであること，松田(10885)から道②を1ヶ所切って伸ばしても内周・外周の長さが変わらないことが出された。その後，清原は 10913 「…台形っぽくなるんだよな。うん，伸ばした場合。」，さらに 10933「ここ（内周）の長さは，24マイナス，24マイナスいくつだったとして，ここ（外周）が24よりプラスいくつだったとするじゃん。それを，足して，プラマイ0だったら，これ（道①）と同じだけど，…」と発話した。つまり，松田や牧村の発話をきっかけに，道②の内周・外周の長さを比べる基準としてセンターラインの存在が意識され，道②を変形できると確信を高めている。よって，この場面では，道②を切って伸ばすと台形になり，道②の内周・外周の長さとセンターラインの長さ24mとの差が等しければ，道②を道①に変形でき面積が等しくなると推測している。

そして，教師が主導し，道②の内周・外周の長さを正確に求めた後， 11537 「円が道になった」と発話した。よって，【仮説ⅱ】の確信を高めていると解釈できる。

検証を終えた後，教師(20187)が道②を台形に変形することで面積が変わらないのか発問した。清原は 20200 「変わらないんだよね。きっと変わらない。」と発話し，さらに，その根拠として 20205 「ほうだよね。幅も変わって，幅も変わってないし，（道②のセンターラインのあたりを指しながら）その長さも変わってなし，一緒だよ。」と発話した。つまり，確信は低いものの，【仮説ⅲ】にも気づき始めていると解釈できる。

場面2

仮説ⅰ「道を求積した値が同値であれば，面積が等しい」
推測「道③の面積も等しくなるだろう」
事例検証「道③の内周・外周の面積の差を求める」

道③が提示されると，すぐに，内周・外周の正方形の面積の差を計算した。つまり，この段階では，【仮説ⅰ】をもとに推測「面積が等しくなるだろう」の事例検証を行った。検証後，道の面積を求める方法を他者に説明する際， 20288 「…正方形の方が，よっぽど楽だった。」と発話した。ここでは，【仮説ⅱ】ではなく【仮説ⅰ】をもとに推論している。問題場面の情報をもとに，清原にとって，確信が高く簡潔な【仮説ⅰ】が選択されている。

場面3

仮説ⅰ「道を求積した値が同値であれば，面積が等しい」
事例検証「正方形を2種類の長方形に区切り，面積の和を求める」

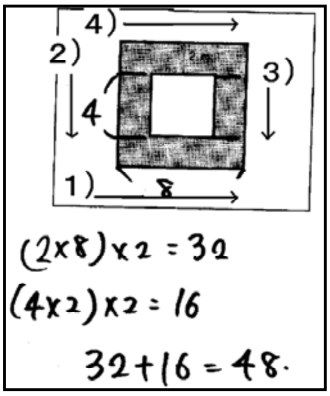

図３（矢印，番号記入は筆者）

教師の介入「道②のように図を使って説明できないか」により，事例検証の方法を変更する指示が出された。しかし，清原は，図3のように，道③を2種類の長方形に区切り，面積の和を求めた。つまり，道③の求積の方法は変更されているが，仮説自体は【仮説ⅰ】から変更されていない。

場面4

仮説ⅱ「道を同じ形に変形できれば，面積が等しい」
推測「道③を区切った4つの長方形をつなぎ合わせると，幅が2m，長さが24mになるだろう」
事例検証「4つの長方形を1本につなぎ合わせ，その長さと面積を求める」

清原は，図3の計算を終えた後，松田の道③を切り貼りした平行四辺形（図4）を見た。そして，図３を1）から4）の矢印（筆者記入）の順になぞりながら，20360「でもさ，ようはさ，8たす4たす4たす8だもんでさ。」と発話した。さらに，20362「8たす，8たす，4たす，4は。さんぱ24で，24でしょ。24で，もう，あのさー，あれがさー，できてるからさー，あとは，2かける24で48じゃん。」と発話し，図5のようにその計算式を記述した。その後，20364「一直線に直すと，こんなやつ。」と発話しながら，両手で帯状の形を作った。

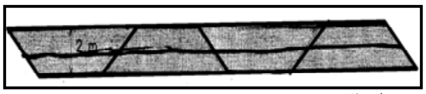

図４ 松田の事例検証 註1）

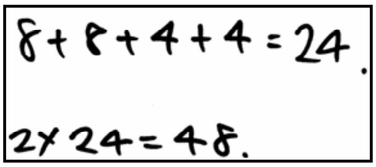

図５

この場面で清原の仮説は，【仮説ⅰ】から【仮説ⅱ】へ変更されている。仮説が変更されたきっかけは，清原が場面3で行っている事例検証とは異なる松田の事例検証を見たことである。清原は，自分と松田の事例検証の違い，すなわち，仮説の違いに気づいた。そして，松田の事例検証のもとになっている【仮説ⅱ】で，清原自身の事例検証（図3）を見直している。その見直しにおいて，4つの長方形を1本につなぎ合わせる念頭操作を行い，問題場面の構造につながる「道の長さと幅が等しい」ことが明らかになり，【仮説ⅱ】をもとに推測の確信を得ている。

場面5

仮説ⅲ「道幅とセンターラインの長さが等しければ，面積が等しい」
推測「変形した長方形の長さとセンターラインの長さは等しいだろう」
事例検証「道③のセンターラインの長さを求め，変形した長方形の長さと比べる」

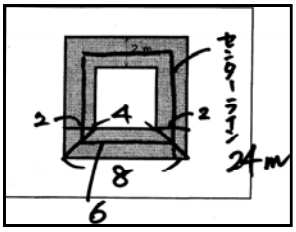

図６ 牧村の事例検証

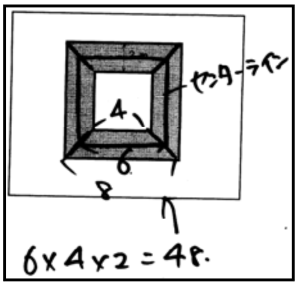

図 ７

遠野の発話 20379「（図6を見ながら）あーーー。なんか，なるほどじゃん。なるほど，センターラインをぬけと，…」をきっかけに，清原は牧村の

センターラインをもとにした事例検証（図6）を見た。そのとき，清原は，20383「あー。」と発話し，自らも図7のように正方形を4つの台形に区切ってセンターラインを記述した。そして，センターラインと幅の積として道③の面積を表した。つまり，センターラインの長さ（6×4）と道幅（2）の積として表す事例検証を行った。

その後，場面4で行った事例検証（図3）と図7をながめ，しばらくしてから 20420「あ，一緒じゃん。」と発話し，図8の丸内のように二股の矢印を記入した。

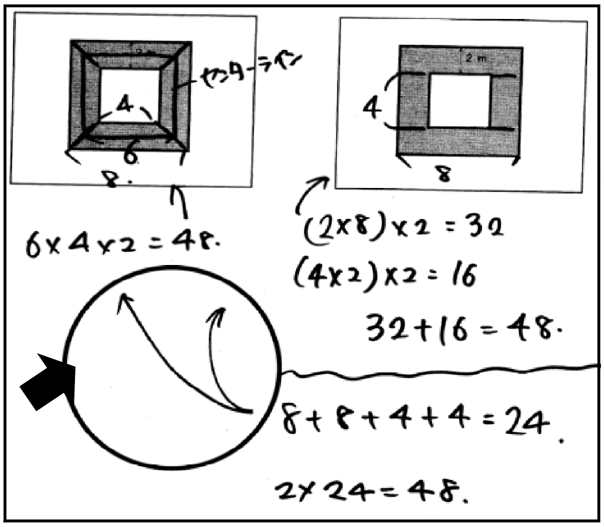

図 8（ 丸の記入は筆者）

検証後のまとめには，「センターラインとはばが変わらなければ，面積は変わらない。」と記述した。よって，この場面で清原は【仮説ⅲ】の確信を高め，【仮説ⅱ】から【仮説ⅲ】へ変更されたと解釈できる。

この場面で，【仮説ⅲ】の確信を高め，仮説を変更するきっかけになったのは，清原が行った場面4の事例検証とは異なる牧村の事例検証を見たことである。牧村の事例検証を見ることで，道③には記述されていない問題場面の構造につながるセンターラインの存在に気づいた。そして，【仮説ⅲ】をもとに，道③の面積をセンターラインの長さと道幅の積として表した。しかし，【仮説ⅲ】の確信が得られていないために，図3と図7の事例検証を見直している。それが，清原が記述した二股の矢印の解釈である。その見直しの中で，【仮説ⅱ】をもとに道③を変形した長方形の長さと面積，【仮説ⅲ】をもとにした道③のセンターラインの長さと面積がそれぞれ等しくなることを確かめた。つまり，事例検証の見直しの中で仮説の見直しを行っている。そして，【仮説ⅱ】と【仮説ⅲ】が関係づけられ，道を変形しなくても，道幅とセンターラインの長さが等しければ面積が等しいという【仮説ⅲ】の確信を得たと解釈できる。

場面6

仮説ⅲ「道幅とセンターラインの長さが等しければ，面積が等しい」
推測「どんな図形の道でも，道幅とセンターラインの長さが等しければ，面積が等しくなるだろう」

教師 20674「それ，どう？みんな。円，正方形って，やったけど，他の形でも，それができるの？」に対して，熊井(20682)から「ひし形」が出された。それに対して清原は 20685「できるら。」と発話し，道①や道②，道③と面積が等しいひし形の道もできると推測した。そして，20689「だってさー，（手で三角形のような形を作りながら）こんなへんな形でもさ，そのぶん，ぱぱっといれたけど，その分，じじっと，縮むから，同じだと思う。」と発話し，推測の根拠を挙げた。遠野の発話 20693「全部？」に対して，20694「うん。センターラインと幅が変わらなければ。頭で計算しなくても，確信できる。見ため的に…」と発話し，さらに推測の根拠を挙げた。

つまり，清原の発話 20685「できるら。」は，ひし形だけができると推測しているのではなく，20689「…こんなへんな形でもさ，…」と発話しているように，どんな図形の道でも面積を等しくできると推測している。そして，20694「…センターラインと幅が変わらなければ。頭で計算しなくても，確信できる。…」と発話していることから，【仮説ⅲ】をもとにして推測していることがわかる。

今まで清原にとっての【仮説ⅲ】は，道①や道②，道③といった学習問題で提示されている図形の道の面積が等しいことを示すためのものであった。しかし，この段階では，どんな図形の道でも面積が等しくなることを示せるという仮説へと変化しようとしている。つまり，【仮説ⅲ】を一般化しようとしている。

清原が，この段階で【仮説ⅲ】を一般化しようと考えた要因は，まず，場面①で，確信が低いものの【仮説ⅲ】を何となく意識していた。そして，場面4や場面5で，問題場面の構造につながる道幅やセンターラインの存在が明らかになることで，【仮説ⅰ】と【仮説ⅱ】，【仮説ⅲ】が関連づけられ，【仮説ⅲ】に対する確信が十分に高まっていたことが挙げられる。そして，教師から 20668「…円，正方形とやってきたけど，どんな形でも，できるってこと？」と発問されたことをきっかけに，どんな図形の道でも【仮説ⅲ】が成り立つのではないかと考え始めたと解釈できる。

4.3. 清原のジグザグ過程に対する考察

清原の仮説に変化が見られる場面4と場面5の仮説の変化，及び推測と事例検証のジグザグ過程を整理し図式化すると図9のようになる。

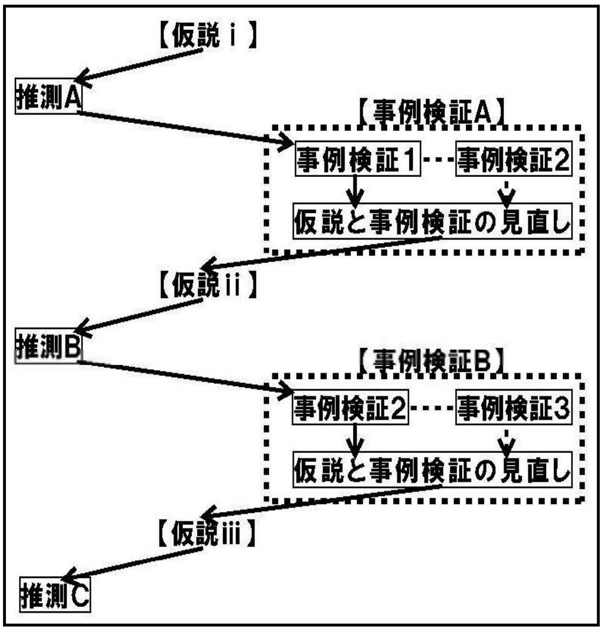

図 9　清原のジグザグ過程

図9の【仮説ⅰ】から【仮説ⅱ】のジグザグ過程が場面4，【仮説ⅱ】から【仮説ⅲ】のジグザグ過程が場面5に対応している。

事例検証Aの過程では，道③の面積も等しくなると推測（推測A）し，道③を2種類の長方形に区切り，面積の和を求める事例検証1を行った。つまり，【仮説ⅰ】の段階である。推測Aの確信を高めた後，松田の【仮説ⅱ】をもとにした道③を切り貼りして平行四辺形に変形する事例検証を見た。そして，2つの事例検証の違い，すなわち仮説の違いに気づいた。松田の【仮説ⅱ】をもとに，清原が行った事例検証1を長方形につなぎ合わせる念頭操作を行い，その長さと面積を確かめている（事例検証2）。事例検証2において道の長さと幅，面積が等しいことが確認された。つまり，【仮説ⅰ】と【仮説ⅱ】が道の長さと幅，面積が等しいという点で関連づけられ，【仮説ⅱ】へ変更されている。

事例検証Bの過程では，牧村の道③にセンターラインを記述した図を見ることで，変形した長方形の長さとセンターラインの長さは等しいだろうと推測した（推測B）。つまり，牧村の事例検証を見ることで，仮説の違いに気づいた。そして，牧村の【仮説ⅲ】をもとに，清原自身も道③にセンターラインを記述し長さを求め，センターラインの長さと道幅の積として面積を表した（事例検証3）。そして，事例検証2で検証した道③を変形した長方形の長さとセンターラインの長さ，そして面積が等しいことが確認された。つまり，この問題場面の構造につながるセンターラインの存在や長さに気づき，【仮説ⅰ】，【仮説ⅱ】と【仮説ⅲ】が関係づけられ，【仮説ⅲ】へ変更されている。

図9を見て分かるように，清原が仮説を変化させている事例検証の過程には共通点が見られる。事例検証A，Bともに，他者の異なる仮説をもとにした事例検証を見ることにより，その異なる仮説を意識していることである。しかし，ただ他者の事例検証やそのもとにある仮説を真似て，検証を終えているわけではない。異なる仮説をもとに自らの事例検証を見直し，問題場面の構

造につながる道の長さや幅，センターラインの長さが等しいことを確認することで，仮説どうしを関係づけ仮説が変化している。つまり，推測と事例検証のジグザグ過程の中で行われる事例検証において，「仮説と事例検証の見直し」を行い，仮説が修正・発展する様相として捉えることができる。

５．仮説を修正・発展するジグザグ過程における事例検証の役割

清原の推測と事例検証のジグザグ過程を分析・考察することにより，事例検証の中で「仮説と事例検証の見直し」を行うことで仮説を修正・発展していることが明らかになった。そこで，仮説を修正・発展するジグザグ過程における事例検証の役割について考察する。

5.1. 仮説と事例検証の見直し

清原は，「仮説と事例検証の見直し」において，清原自身の仮説とは異なる仮説を意識し，清原自身が行った事例検証を見直している。そして，問題場面の構造につながる道の幅やセンターラインの存在が明らかになり，清原自身の仮説と異なる仮説の関係を捉えている。

一般的に数学が発展する上で，問題場面の構造を認識することは重要である。問題場面の構造を認識し，その構造が保存されるように拡張・一般化を図っていく(中島,1981)。よって，問題場面の構造をより捉えている仮説へ修正・発展していくためには，事例検証の中で，異なる仮説を意識し，「仮説と事例検証の見直し」を行うことが必要であるといえる。

そこで，清原の事例検証の過程に見られた「仮説と事例検証の見直し」の過程を整理する。そして，中島(1986)が示す数学を創り上げる活動の構造と対比し，事例検証の過程で「仮説と事例検証の見直し」を行うことが，数学を創り上げる意識的な推論を実現する要因の1つになりうるか考察する。

清原の場面4や場面5における事例検証に見られた「仮説と事例検証の見直し」の過程を整理し図式化すると，図10のように4つの過程に分けることができる。以下，それぞれの過程について考察を加える。

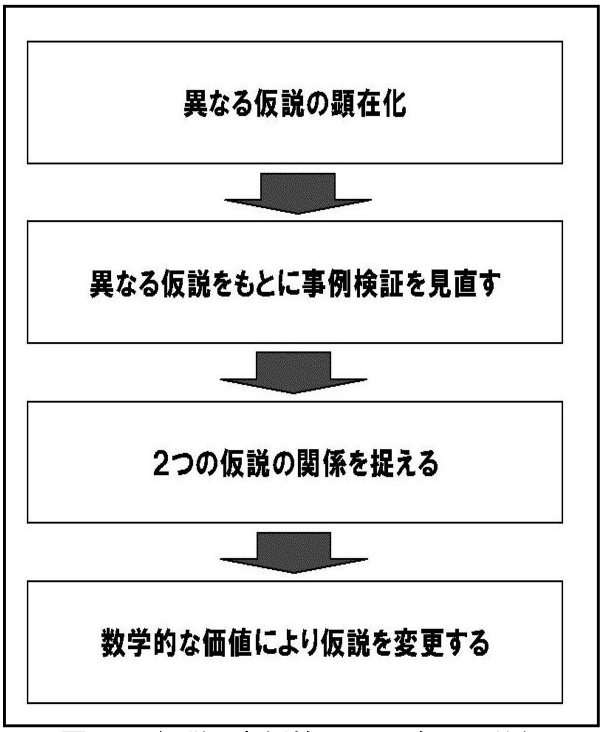

図１０ 仮説と事例検証の見直しの過程

5.2. 異なる仮説の顕在化

清原の場合は，場面1で道①と道②を扱った段階から，確信が低い状態ではあるが，何となく異なる複数の仮説に気づいていた。そのため，他者の異なる仮説をもとにした事例検証を見る行為により，その仮説が顕在化している。よって，何となく確信が低い状態であっても，複数の仮説を意識していることは，仮説を修正・発展するジグザグ過程をたどるために必要である。

中島(1981)は，簡潔・明確・統合などの観点をふまえて異なる事例を観察し，仮想的な対象を設定する態度や状態が必要であると述べている。つまり，根拠がはっきりしない状態であっても，「何となく～なりそう」や「仮に考えてみよう」といった態度が大切であり，そのような態度が異なる仮説を顕在化し，仮説を修正・発展するジグザグ過程をたどることにつながると考える。

5.3. 異なる仮説をもとに事例検証を見直す

次に，清原が異なる仮説をもとに，自ら行った事例検証を検証し直す段階である。この段階は，ただ異なる仮説を受け入れ変化しているのではない。分別のある自制(Polya,1959)を持ち，仮に仮説を置き換えてみるということである。その態度が，異なる仮説をもとに事例検証を見直すという思考活動につながっている。

それまで推論を支えていた仮説を変えるわけであるから，思考活動において大きな変化が起こるということである。場合によっては，仮説を置き換えることに抵抗を示すことも考えられる。しかし， Polya(1959)が述べている道徳的資質を持ち，仮に仮説を置き換えてみることが，仮説を変化させる上で重要であるといえる。

中島(1981)は，仮想的な対象を実在化する手法として，数学的なアイデアにより解決のための観点を変更したり，場面の構造を再構成したりして，既有の知識と結びつける必要性を述べている。つまり，「異なる仮説をもとに事例検証を見直す」ということは，中島氏が述べる仮想的な対象を実在化する手法の具体的な様相として捉えることができる。

5.4. 2つの仮説の関係を捉える

次に，清原が，異なる仮説をもとに事例検証を見直した結果，問題場面の構造や問題場面の構造につながる要素が明らかになり，【仮説ⅰ】と【仮説ⅱ】や，【仮説ⅱ】と【仮説ⅲ】の関係を捉えた段階である。道の幅や長さ，センターラインの長さ，そして面積が等しいという共通点が見つかり，仮説間の関係を捉えている。2つの仮説の関係を捉えるもとになるわけであるから，問題場面の構造につながる要素が明らかになることは重要である。この段階は，中島(1981)が述べる「構造」を認識し保存する段階にあたると考える。

しかし，どんな場合でも問題場面の構造につながる要素が明らかになり，2つの仮説の共通点が見つかるとは限らない。間違った仮説をもとにしている場合も考えられる。その場合は，どちらかの仮説を修正する必要があるだろう。

5.5. 数学的な価値により仮説を変更する

最後に，清原が仮説を変更する段階である。今回の分析では，仮説間の関係を捉えたことで，なぜ仮説を変更したのか，その根拠を捉えることができなかった。しかし，清原が持っている数学的な価値により2つの仮説を比較し，仮説を変更していることが予想できる。つまり，中島(1981)が示す評価を仮説に対して行っている。そこには，簡潔・明確・統合など数学的な価値が関わっていると考える。

もし，この段階で数学的に価値がないと判断されれば，仮説が変化しない場合もあり得るということである。しかし，問題場面の構造につながる要素が明らかになることにより，仮説間の関係が捉えられたとすれば，仮説が変更されなくても仮説への理解が深まっているはずである。よって，発展していないと思われる仮説に置き換えて，事例検証を見直すことも意味のあることと考える。

5.6. 仮説を修正・発展させるジグザグ過程における事例検証の役割

以上のように，仮説を変化させる推測と事例検証のジグザグ過程で行われている事例検証を，「仮説と事例検証の見直し」の4つの過程として詳細に捉えることができた。

つまり，仮説を修正・発展する「事例検証」とは，授業における生徒の意識的な推論を捉える枠組みにおいて定義した「推測の確信を高めるために行う具体的な検証」という単純な思考活動ではない。中島(1981)が示す数学を創り上げる活動の構造を持った「仮説と事例検証の見直し」という4つの過程を経ている。

そして，その4つの過程を経て仮説を修正・発展するためには，清原のように異なる仮説を意識し，道徳的資質(Polya,1959)を持って問題場面の構造につながる要素について検証する必

要がある。よって，事例検証は仮説を修正・発展させるジグザグ過程をたどる上で，重要な役割を果たしているといえる。つまり，事例検証において「仮説と事例検証の見直し」を行うことは，数学を創り上げる意識的な推論を実現する要因の１つになり得ると考える。

６．まとめと今後の課題

本稿では，Lampert(1990)のジグザグ過程をもとに，意識的な推論の過程を「仮説を修正・発展する推測と事例検証，証明，論駁のジグザグ過程」として捉え，実験授業における抽出生徒の推論過程を，仮説の変化とジグザグの関わりについて分析，考察した。その結果，仮説を修正・発展する推測と事例検証のジグザグ過程の様相を捉えた。そして，仮説に変化が見られる事例検証の過程では，「仮説と事例検証の見直し」を行っているという共通点を見いだした。仮説を修正・発展するためには，何となく確信が低い状態であっても複数の仮説を持っていることが重要であり，「仮説と事例検証の見直し」において，異なる仮説を意識し，問題場面の構造につながる要素について検証し，仮説間の関係を捉えることが必要である。その事例検証の過程は，中島(1981)が示す数学を創り上げる活動の構造を持っており，仮説を修正・発展させるジグザグ過程をたどる上で，重要な役割を果たしている。つまり，事例検証において「仮説と事例検証の見直し」を行うことは，数学を創り上げる意識的な推論を実現する要因の１つとなり得ることが明らかになった。

しかし，本稿では，仮説を修正・発展する「推測と証明のジグザグ過程」を捉えることができていない。よって，今後は，証明を行うことで仮説を変化している事例を収集し，「仮説と証明の見直し」の過程を分析することにより，数学を創り上げる意識的な推論を実現する要因を，さらに明らかにしていく。

また，仮説の変化と数学的な価値がどのように関わっているかが明らかになっていない。よって，数学的な価値に焦点をあてて，授業における生徒のジグザグ過程を分析し，生徒が持っている数学的な価値を明らかにしていく。

註および主な引用・参考文献

註１）切り抜いた紙の枠（黒線）は，筆者が付け加えたものである。

Balacheff, N. (1986). Cognitive versus situational analysis of problem-solving behaviors. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 10-12.

国立教育政策研究所,教育課程研究センター. (2005). 平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査分析結果の概要.

Lakatos, I. (1980). 数学的発見の論理－証明と論駁－(佐々木力訳). 共立出版株式会社.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer:Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.

中村光一. (2005). 授業における数学的対象に関する考察:数学的価値観の観点. 第38回数学教育論文発表会論文集, 463-468.

布川和彦. (1994). ラカトシュ理論の数学的問題解決論への援用. 上越数学教育研究, *9*, 23-32.

岡本和夫,小関熙純ほか. (2005). 楽しさひろがる数学3. 新興出版社啓林館.

大竹宏二. (1993). 「証明と論駁」に基づく高校数学の指導. 上越教育大学大学院学校教育科修士論文(未公刊).

Polya, G. (1959). 数学における発見はいかになされるか 1「帰納と類比」(柴垣和三雄訳). 丸善.

杉山吉茂. (1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版.

武内裕. (2006). 数学を創り上げる意識的な推論に関する考察. 上越数学教育研究, *21*, 161-170.