

正負の数の加法・減法の教科書分析と認知的研究からみえる 算数と数学の乖離の様相について

戸谷 亜希子

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

平林 (1986) は, 「初等教育と中等教育とは, 西欧における発生・発達の過程において, ほとんど無関係であった」と述べ, また, 「初等教育は庶民の教育であり, 中等教育は学者・指導者の教育であって, 両者は理念的に, その出発点からまったく無関係のものであった」と述べている。すなわち, 初等教育である算数と中等教育である数学との間にギャップがあることには, 歴史的なことが大きく関係していることが考えられる。

算数と数学のギャップについては, これまで数学の文字式に関する研究がなされてきた (例えば, 国宗, 1997; 谷沢, 2000)。そこでは, 式の操作的見方と構造的見方 (Sfard, 1991) や, 文字の一般性, 構造化, 形式性 (大塚, 2004) などが検討されてきた。

しかし, 近年では, 算数の中の代数的なアイデア, つまり代数の目で算数を見ることの必要性も主張されている (Carragher, 2006; 藤井, 2006)。本研究でも, 文字式以前の単元, とりわけ正負の数の単元に関して, 算数から数学への移行を吟味したい。

正負の数とその計算は, 「後々, 数学の学習を進めていくための基礎的な内容であるから, 生徒たちは確実に理解し, 習熟しておく必要がある」 (柳本, 1990) し, 後述するように, Linchevski ら (1999) によれば, 文字式の認識の誤りには, 数の範囲で同様な誤りが見ら

れるので, 数の段階でその認識を育成することが大切だと考える。また, 岡崎 (2003) は「計算技能だけを問題にするのであれば, 中学校 1 年の正負の数の学習指導を殊更問題視する必要はないのかもしれないが, それが代数の導入過程の一過程であるとともに, 中学校数学の出発点であることを考えれば, 大きな問題となる。」と述べている。

これらから, 正負の数の内容は, 算数と数学を接続するためには重要な単元であると考えられる。本研究は, 正負の数の単元を, 算数と数学の間の移行の視点から, 教材構成や学習過程の改善を目指すものである。

そのためには, 正負の数の単元の中でどのような算数的・数学的特徴が見られ, また, 接続教材として考えたときに, どこにそのギャップが見られるかを特定することから始めねばならない。また, 代数分野における中学校数学が, 文字式を用いた学習によって特徴づけられると漸定的に捉えるなら, 正負の数の単元と文字式とのギャップも, 見ていかねばならないだろう。こうした点に鑑みて, 本稿では, 主に正負の数の加減の単元について, 算数から数学への移行の視点から, 現在使用されている教科書の分析を行うとともに, 認知的な視点から算数と数学のギャップを捉えようとしている Herscovics と Linchevski らの一連の研究を吟味し算数と数学の乖離の様相を具体的に明らかにしていきたいと考える。

2. 教科書分析

小学校の算数では、加法は増加の場面に減法は減少の場面に概ね対応するが、正負の数では増加・減少いずれもが、加法・減法で生じることになる。これらの正負の数の加減の意味形成をどんな場でどのように展開していくかについて教科書に固有の特徴が見られる。

正負の数の加減を、移行の視点から吟味するとき、(1)算数からの近づきやすさと、(2)数学との接点の2つの視点から見ていくことが有効だと考える。前者では、正負の数の加減、とりわけ－（負数）の説明の仕方に、後者は、それと代数和の説明とのつながりの部分に相当すると考え（岩崎,岡崎,1999）、そこ

での教科書の説明を比較・検討する。

教科書分析を進めるにあたり、現在発行されている6社の教科書の、正負の数の単元の加法・減法の提示順と場面設定についてまとめておく。そのために、教科書における式を以下のように記号化する。

A : 正+正, B : 正+負

C : 負+正, D : 負+負

E : 正-正, F : 正-負

G : 負-正, H : 負-負

この記号を利用すれば、正負の数の単元の加法・減法の提示順と場面設定は表1のようになっている（注1）。

表1. 加法・減法の提示順と場面設定.

発行社	提示順（加法，減法）	場面設定
T社	A → B → A D → 絶対値の等しい異符号の数の加法 → B C → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則 → E → F → アルゴリズム化 → G H	東西移動
D社	A → D → B → C → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則 → E G → F H → アルゴリズム化	東西移動
O社	A → D → アルゴリズム化 → C → B → アルゴリズム化 → E G → F → H → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則	東西移動
K y 社	A → D → B → C → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則 → E G → F H → アルゴリズム化	東西移動
G社	A → B → C → D → アルゴリズム化 → E → F → H → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則	ベクトルの差に基づく説明
K r 社	A C → E G → B D → F H → アルゴリズム化 → 交換法則と結合法則	大小関係

表1における提示順を見ると、大きく2つのタイプに分けることができると考えられる。T社、D社、O社、Ky社、G社のように、加法から減法といった流れで説明されているものと、Kr社による加数、減数が正から負へという流れで説明しているものである。また、Kr社では、他の教科書とは違い、アルゴリズム化や交換法則と結合法則を、最後にまとめて提示している。

また、前者の5社では、場面設定について見ていくと、G社の教科書が特に減法に関して他とは異なった提示をしている。このことで、6社の教科書は大きく3つに分けられると考えられる。以下、この3つの教科書展開の特徴を見ていくこととする（注2）。

2.1. 東西移動の場面での加法・減法の説明

2.1.1. 基本的な説明のしかた

T社・D社・O社・Ky社の教科書では、東西移動を利用している。東西移動の考え方

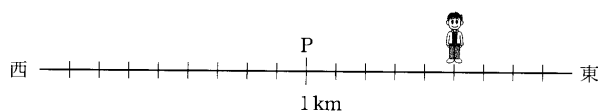
は、東を正の方向、西を負の方向と考えて、数直線を利用して説明する方法である。加法を式で表すとき、符号+（プラス）を東への移動、-（マイナス）を西への移動とし、演算+（足す）の記号を「続けて進む」と意味づけする。

東西移動を利用した場合、数直線が直接学習の対象となる。つまり、数直線と東西にのびる道を対応させ、人がどの方向にどれだけ移動したかと、最終的にいる位置を数直線上で表す。そして、2本の矢印の合成と、その結果としての1本の矢印の計3本の矢印で加法の意味づけがなされる。

この有向線分を利用した説明は、加法として定義されるので、減法は加法に基づいて新たに規定されなければならない（岩崎、岡崎、1999）。ここで東西移動の場面での減法について、Ky社の教科書（澤田他、2005,p.22）の説明をしてみる（図1）。



東西にのびる道路を、P地点から何kmか進み、そこから東へ2km進んだところ、いまP地点から東へ5kmの地点にいます。このとき、はじめにP地点からどちらへ何km進んだか答えてみましょう。



上の図で、東への移動を正の数で表すことにする。

1回目の移動を□kmとすると、2回の移動とその結果は、次の加法で表すことができる。

$$\square + (+2) = (+5)$$

上の式の□にあてはまる数は、次のひき算で求めることができる。

$$\square = (+5) - (+2)$$

右の図で、□は、Pから+5km移動して、そこから-2km移動した位置ともみることができるから、□は次のようになる。

$$\begin{aligned}\square &= (+5) + (-2) \\ &= +3\end{aligned}$$

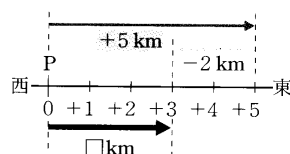
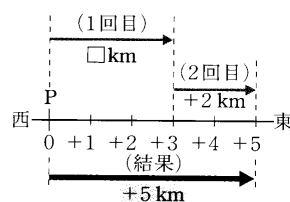


図1. 東西移動の場面における減法の説明.

説明を一つ一つのステップに分けると、次のような6つの説明からなる。

- (1) 問題文の内容を加法の式として表す。
この問題の場合、文章から、(a)『 $\square + (+2) = (+5)$ 』という式をつくることである。
- (2) その式を、逆算を利用して、減法の式に直す。この問題の場合、(1)でつくった式が、(b)『 $\square = (+5) - (+2)$ 』という式に変形される。
- (3) 最初につくった式を、数直線を利用した図(c)に表す(図2)。

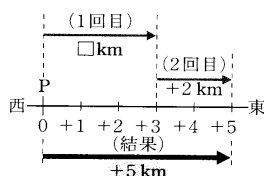


図2. 数直線を利用した図(c)。

- この問題の場合、(1)式(a)を、数直線上に3本の矢印で表すことである。
- (4) □にあたる矢印を結果、結果にあたる矢印を1回目の移動として、2回目の移動を逆にした図(d)を作る(図3)。

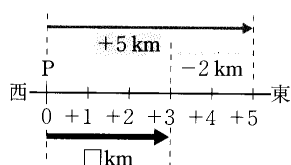


図3. 図(c)を基に作られた図(d)。

- (5) その図から、新たな加法の式を作る。
この問題の場合、(4)の図(d)を基に、(e)『 $\square = (+5) + (-2)$ 』という式をつくる。
- (6) 最後に全体的に見て、- (正数) が + (負数) と同じと見ることができることを確認する。

この6段階を、式と図(a)～(e)の連鎖として構造的に表せば、次のようになる(図4)。

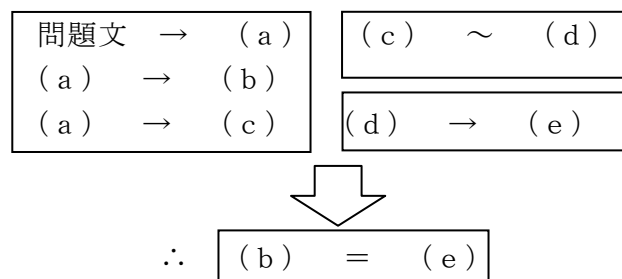


図4. 減法の説明の構造。

問題文から図(c)までは、自然な図化、式化であろう。しかし、図(d)は問題文からではなく、図(c)の数直線において求める矢印が、異なる文脈から求められることを示す図である。つまり、(c)～(d)の部分は、東に2 km進むことを西に-2 km進むと読み直すことだけでなく、文脈が変更されている。この変更は、ベクトルの減法の考え方を基にしていることから起こると思われる。つまり、なぜ図(d)を考えねばならないかは、文脈からというよりは、数学的な要請によるものであろう。ここでのベクトルの考え方は、図5(渡辺他,2000,p.38)のような考え方であり、 $\vec{a} - \vec{b}$ を新たに作り、 $\vec{a} - \vec{b}$ を $\vec{a} + (-\vec{b})$ と同値と考えるものである。文脈的に導かれることと、ベクトルの論理が併存しているように思われる。

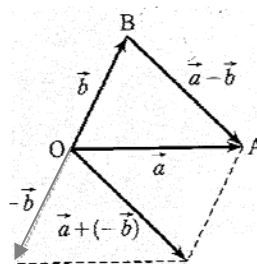


図5. ベクトルによる説明。

2.1.2. アルゴリズム化と代数和について

ここで、東西移動を利用した場面でのアルゴリズム化について見ていく。それぞれの教科書が、加法の説明が終わったら加法のアルゴリズム化、減法の説明が終わったら減法の

アルゴリズム化，というようにひとつの説明が終わるごとにアルゴリズム化をしている。例えば，加法，減法のアルゴリズムは，次のように説明されている（図 6，杉山他，2005，p.15；図 7，杉山他，2005，p.19）。

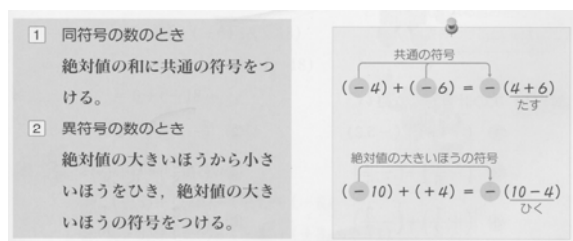


図 6．加法のアルゴリズムの説明。

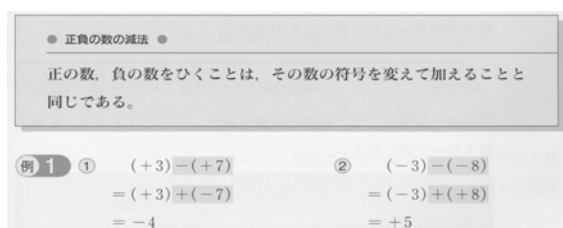


図 7．減法のアルゴリズムの例。

東西移動の場面設定は，説明の複雑さを有したものの，このアルゴリズム化との接続は，むしろ自然のように思われる。なぜなら，加法では符号と演算がそれぞれ意味づけされているので，文脈に沿ってアルゴリズムの説明ができるし，図示された矢印の大きさが，絶対値の和と差を示すのに有効に機能していると考えられるからである。また，減法の説明は，まさにアルゴリズム化を直接目指しているものであるため，そのアルゴリズムは自然なものとなるだろう。

次に，代数和に関して見てみる。東西移動の場面設定を利用している 4 社の教科書では「加法だけの式では，加法の記号＋とかっこをはぶき，項を並べた式で表すことができる。このとき，式のはじめの項が正の数であれば，その数の符号＋をはぶいて表す。」（吉田他，2005，p.26）のように記述されているが，代数化のプロセスとして代数和を考えるなら，減法の混じった式を代数和にする過程がむしろ重要であろう。

このプロセスにおいて，T社の教科書には，一つの工夫が見られるように思う。つまり，加法，減法として意味づけされているかっこのない式から始めていることであり，それを既習のかっこのある式になおした後，加法の形にして代数和化している。

$$\begin{aligned} & \langle 4 - 7 + 9 - 5 \\ &= (+4) - (+7) + (+9) - (+5) \\ &= (+4) + (-7) + (+9) + (-5) \rangle \\ & \text{(杉山他,2005,p.21)} \\ &= 4 - 7 + 9 - 5 \end{aligned}$$

つまり，一つの式（ $4 - 7 + 9 - 5$ ）が，加法・減法としての式の見方と，代数和としての式の見方の両方として見る事ができることが示唆されている。言い換えれば，式の操作的見方を構造的見方の柔軟な切り替え（Sfard,1991）を促す工夫が見られるのである。演算を項として見るだけでなく，逆に元の演算に見直せることも，式の重要な見方であり，その両者が考慮されているように思われる。

2.2. ベクトルの差の考えに基づく減法の説明

G社の教科書（一松他,2005）では，カードゲームを利用した導入を行っている。この方法は， -6 から $+6$ までの数字が書かれた 13 枚のカードを使ったすごろくのゲームと数直線とを利用して正負の数の加法・減法を指導するものである。プラスのカードを引いたときに進む方向が正の方向，マイナスのカードを引いたとき進む方向が負の方向という意味づけの下に，このゲームは展開する。加法は 1 回目の移動と 2 回目の移動の合計として意味づけられ，数直線に実体化される。

G社の教科書の特徴として，減法の説明があげられる。減法はゲームと数直線を利用して，図 8 のように説明されている。

減法の場合は，1 回目の移動後の位置と，最後の位置がわかっている状態で，2 回目の移動を考える。このとき，ベクトルの差の定

義（図 9 ,渡辺他, 2000, p.38）あるいは求差

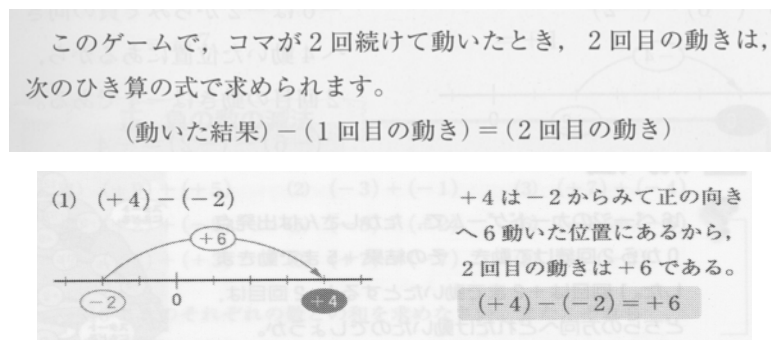


図 8. ベクトルの差の定義に基づく減法の説明.

の考えがその説明の基礎となっていると思われる。

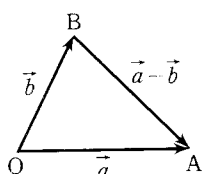


図 9. ベクトルの差.

これは引く数を基準とし、引かれる数が基準から見て、どの方向に、どれだけの距離にあるかを考えるものである。この考えの説明では、長さと位置を正しく表示する数直線は不可欠な道具となる。加法では、ゲームでの動きに対応した移動を表すのに対して、減法の考え方では数直線における 2 点間の距離と方向性に主な焦点が移る。説明がシンプルであることがよさと考えられるが、一方で数直線の見方は、式では減数から被減数の位置と方向を見定めることであり、式を左から右へ読む方向とは逆行するので、数直線と式との対応関係の指導が、付加的に必要となるように思われる。

算数から数学への移行として見るとき、減法を加法にする説明は、ひとつの問題となろう。この場面では、加法の 4 つの式と減法の 4 つの式を比較することによって、減法と加法の対応を示唆するだけである（図 10,一松他, 2005, p.22）。

つまり、これらを比較して、答えが一致す

る式を組み合わせ対応を明らかにし、その

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (1) $(+3) - (+5)$ | (2) $(+3) - (-5)$ |
| (3) $(-3) - (+5)$ | (4) $(-3) - (-5)$ |

次の㉗～㉙の加法のなかから、計算の結果が上の問 2(1)～(4)の減法と等しくなるものを、それぞれ見つけましょう。

- | | |
|-----------------|-----------------|
| ㉗ $(+3) + (+5)$ | ㉙ $(+3) + (-5)$ |
| ㉘ $(-3) + (+5)$ | ㉚ $(-3) + (-5)$ |

図 10. G 社の教科書でのアルゴリズム化の説明.

ことによって減法を加法に直すことの説明が示唆されている。減法の説明は、どの場面設定を行おうと、少なからず説明に困難が生じてくるのかもしれないが、式の答えの比較だけでは、減法がどのようにして加法に統合されるかの意味づけが弱く、従って代数和へのつながりも弱くなることも考えられる。

2.3. 大小比較の場面での加法・減法の説明

2.3.1. 基本的な説明と提示順について

K r 社の教科書「未来へひろがる数学 1」には、反数のアイデアが、大小比較の場面に埋め込まれている（岩崎，岡崎，1999）。教科書では、次のような順序で説明されている。

まず、既習の正の数を足すことと、正の数を引くことから始める。ここでは、

《 $2 + 5$ は、2 より 5 大きい数を求めること

$7 - 5$ は、7 より 5 小さい数を求めるこ

と》(岡本他,2005,pp.18-19)

と規定されている。ここでは、+ (足す) を大きくすること、- (引く) を小さくするというように、加法と減法が日本語に対応づけられている。そのあとに、負の数の加法と減法が提示され、次のように説明されている(岡本他, 2005, pp.20-21)。

9+(-5) は、9より -5 大きい数を求めること
つまり、9より 5 小さい数を求めること
9-(-5) は、9より -5 小さい数を求めること
つまり、9より 5 大きい数を求めること

負の数の加法・減法も大小関係として意味づけられ、例えば「-5 小さい」という場合には、逆に「5 大きい」とみなすことによって、日常語のレベルで意味を保つような変換が行われる。換言すれば、形容詞の適用限界内に意味を転換しながら、- (負数) を+ (正数) と同義とみなしている(岩崎, 岡崎, 1999)。ここでは、+ (足す) や- (引く) といった演算記号に、日本語を利用した意味づけをし、そのことに矛盾が生じる負の数の加法や減法については、日本語を修正するように数学を修正している。

大小比較を利用した説明の提示順は、数学の世界を、算数の世界や日本語と関連づけて広げるという主旨であるから、先に正の数の加減がきて、そのあとに負の数の加減を学習することになり、提示順やアルゴリズム化は他の教科書とは異なることになる。

2.3.2. 代数和について

この場面を利用した指導の代数和の説明は、教科書では以下のようになされている。

《加法と減法の混じった式は、減法を加法になおせることから、加法だけの式になおすことができます。

例えば、 $7 - 9 + 8$ は、3つの数7, -9, 8の和とみることができます。》(岡本他,2005,p.25)

K r 社では、-には小さくするという意味づけをしてきたが、ここでは-9という項として見よ、と説明がなされている。つまり、記号「-」の、引く(小さくする)からマイナスへの見方の転換が突然行われている。言い換えれば、計算の意味づけと代数和の意味づけとにズレが生じているように思われる。この場面では、算数や日常世界とのつながりが良好ということの引き換えに、代数和への移行が難しくなっていると言えるのかもしれない。

2.4. 算数から数学への移行の視点での教科書の比較

それぞれの教科書には、場面設定に固有の特徴があるが、算数から数学への移行という視点で見たとき、各々の場面には利点と問題点があると考えられる。今まで述べてきたことを整理すると、表2のようになる。

表2. 場面設定に対応させた教科書の比較.

	算数との親和性	アルゴリズムと代数和
東西移動	- 文脈とベクトルの背景が混ざり合う多少込み入った説明 - 文脈の変更が見られる	- アルゴリズム化や代数和の説明がそれ以前の流れと整合 - 記号の柔軟な見方に工夫あり
ベクトルの差	ベクトルの考えに基づくシンパルな説明(図と式対応を明らかにしておく必要あり)	減法を加法に結合するための説明があまりみられない

大小比較	・算数や日常言語とのつながりがよく、シンプルな説明	・記号の意味づけが変わり、不自然さを残す
------	---------------------------	----------------------

東西移動の説明では、演算の意味づけの時点で、強く数学的背景を持つため、数学的な舞台に乗りやすく、代数和やアルゴリズム化への流れが自然であるとともに、式の柔軟な見方を促す工夫も施されていると考えられるが、算数からの接続という面では、多少込み入った説明にならざるを得ず、その意味で算数からのつながりが検討事項となるかもしれない。また、ベクトルの差の定義に基づく減法の説明では、説明の仕方はシンプルでわかりやすいが、答えの一致を基に式の整合性を判断するので減法を加法に直す推進力がないように思われる。従って、代数和へのつながりは弱くなっていると考えられる。大小比較の場面では、小学校の算数のときと演算記号の意味が同じであり、大きくするや小さくするといった日常言語と結びついて、意味づけはわかりやすいと考えられるが、代数和の場面で演算の意味の転換を余儀なくされ、その意味から代数とのつながりは弱くなっているように思われる。

これらから、算数と数学をつなげる上で、正負の数の加減の単位には、どの場面にもかなりの工夫が見られるとともに、算数から数学への移行を考えるとときには、それぞれの場面に生徒が乗り越えねばならない壁がなお存在していることが示唆される。

3. 文字式への接続を目指した生徒の認識の様相について

算数から数学への接続における大きな関心事は、文字式がいかに理解され、扱えるようになるかということであろう。従って、算数から数学への移行は正負の数の加減だけでなく、文字式の学習に向けて方向付けられる必要がある。また、冒頭で述べたように、文字式を数の段階とのつながりとしてみていく必

要があると考ええる。そのために、数と文字の両方で認知面から接続について検討している、Herscovics と Linchevski らによる一連の研究を整理してみたい。

3.1. 文字式における認知的ギャップ

算数と数学の間には、認知的ギャップが存在するとされている。認知的ギャップとは、「生徒が未知数を自然発生的に計算できない」(Linchevski and Herscovics,1996) ところに設定されるものである。

Filloy and Rojano (1989) は、算数と代数の境界を、等号のそれぞれの辺に未知数を持つ一次方程式 (例えば、 $a n + b = c n + d$) によって定義した。なぜなら、 $a n + b = c$ の形の問題までは、逆算など算数の知識を用いて、子どもが自力解決が可能かもしれないが、両辺に未知数が来ると、等式の性質といった新たなことを学習しないと、解決が難しいからである。

しかし、Herscovics and Linchevski (1994), Linchevski and Herscovics (1996) では、認知的なギャップとしての算数と数学の境界は、Filloy and Rojano (1989) が示した場所ではなく、別のところにあって、それはイコール記号の意味の拡張と数のまとめ上げのときのマイナスの分離に見られることを明らかにした。つまり、 $a x + b = c x + d$ 型の式でさえも、数の代入と近似法 (Herscovics and Linchevski,1994) によって、生徒は電卓を用いて自力解決できたとしている。

イコール記号の意味とは、小学校算数では、例えば $3 + 5 = ?$ のように式と結果を結ぶために「=」を書くという意味で捉えられているが、中学校数学になると、 $9 = 4 + 5$ のような分解や、 $3 + 7 = 4 + 6$ のような同値を示す場合があり、この拡張を指している。イ

コール記号は結果を示すと捉えていると、分解や同値といった考え方には結びつかず、このことが、算数と数学のギャップのひとつと考えられている。

また、文字式の場合、Herscovics らの調査によると、イコール記号の分解という意味づけがなされていないと、例えば、 $364 = 796 - n$ という問題を「 n 引く 796 は 364 」のように右から左へと読むといった、計算の順序の誤解が生じることがあると示されている。あるいは、 $5 + 6 \times 10 = ?$ という問題では、計算順序の誤解は頻繁に生じていた。これらは計算の順序に関する認知的ギャップとして捉えている。

次に、数のまとめ上げのときの認知的ギャップとは、文字式において、文字以外の数だけをまとめ上げ、計算するときにおこり得る問題である。例えば、 $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$ の文字式を計算するときに、 n のあとのマイナス記号を無視して、 $4 + n - 7 = 11 + 3 - 5$ と考えてしまう場合があり、Herscovics らの調査では、約 50% もいた。つまり、符号のマイナスを数字の 2 から分離して考えることである。小学校算数では、数字は数字、演算記号は演算記号として、式が成り立っていた。しかし、中学校数学では、 $(+3)$ や (-2) のように、記号と数字を合わせてひとつの数を表示して、式の形は、数を項として、ただ並べて書いたものとして表示される。数を項として考えることは、生徒から自発的に出てくる考えではないと考えられ、項の考え方を培うには、教師の指導が必要になってくる。ここに算数と代数の一つの境界があると考えられたのであろう。

また、Linchevski らの調査では、文字式において、 $77 - 8n + 113 = 13n - 18 + 5n$ といった問題を計算するとき、左辺を $77 - 113 + 8n$ としてしまう、うしろの演算を用いた飛び越えも起こっている。これは、文字と数字を分けるときに、文字の部分だけを前のマイナス

の符号から分離させ、そのマイナス記号を前の数字である 77 に付けて考えることから出てきた間違いであろう。これも文字についての事前指導が必要な部分と考えられ、一つの認知的ギャップと見られている。

このような認知的ギャップは、生徒がインフォーマルな方法で解くことができる、方程式解決手続きの上限を設定するということが推測され得る。インフォーマルな方法とは、未知数が 1 次方程式に対する、逆演算や数の代入と近似法 (Herscovics and Linchevski, 1994) である。このことより、インフォーマルな方法とフォーマルな文字式の扱いとのギャップを埋める手立てが必要になると考えられる。

3.2. 数式におけるギャップ

前述の研究では、算数と代数の認知的ギャップが文字の導入の後の方程式の中で調べられてきたが、そうしたギャップはむしろ、数の段階での生徒の困難が継承されたものとして想像することも可能であろう。

Linchevski and Livneh (1999) は、Booth や Matz and Lins の研究に言及しながら、代数学学習の困難性について 2 つの説明があると述べている。一つは、生徒の代数は、彼らがなじんでいる数の体系に関連した構造的性質を受け継いでいるとするもので、代数における生徒の困難は、部分的には算数における様々な構造的観念の理解不足によると示唆している。もう一方は、算数が原因というよりは、算数と代数という 2 つの様式間の移行に、困難があるという立場である。Linchevski and Livneh (1999) は、前者の立場、すなわち代数による数学的構造の誤った解釈は、彼らがすでに算数の中で持っている困難を反映しているのではないかと考え、イスラエルとカナダの 6 年生と 7 年生で調査を行った。この調査では Herscovics と Linchevski (1994, 1996) で確認された文字

式の困難が数の段階でも存在するかということに焦点が当てられている。

調査は、計算の順序、数と演算記号の分離に関するものである。ここでは Linchevski ら (1999) が考察に取り上げた問題とその回

答率を取り上げ、数の段階でのギャップの様相を見てみる。調査で用いられた問題と解答率について、特徴が顕著に見られたものをまとめ、表にした (表 3)。

表 3. ギャップが見られる問題.

式	解答率 (%)
(i) $5 + 6 \times 10 = ?$	
・ 加法を最初に計算する。	62
(ii) $50 - 10 + 10 + 10 = ?$	
・ $50 - 30 = 20$ と計算する。	51
(iii) $104 \div 8 \div 4 = ?$	
・ $8 \div 4$ を先に計算する。	58
(iv) (a) $926 + 167 - 167 = ?$ (b) $926 - 167 - 167 = ?$ (c) $926 - 167 + 167 = ?$ (d) $926 - (167 - 167) = ?$	
・ (b) = (d) : 誤答	23
・ (c) = (d) : 正答	40
(v) $237 + 89 - 89 + 267 - 92 + 92 = ?$	
・ 89 どうし, 92 どうしを正確にキャンセルする。	46
・ 92 どうしを不正確に足す。	21
(vi) $217 - 59 + 59 + 62 - 28 - 28 = ?$	
・ 59 どうしを不正確に足す。	18
・ 28 どうしを不正確にキャンセルする。	23
(vii) $217 - 175 + 217 - 175 + 98 = ?$	
・ 217 を不正確にキャンセルする。	42
(viii) $195 + 67 - 117 + 39 = ?$	
・ $195 + 117$ をする。(誤答)	43
・ $67 - 39$ をする。(誤答)	39
(ix) $217 + 39 - 162 - 17 = ?$	
・ $217 + 162$ をする。(誤答)	46

まず、計算の順序についての調査では、例えば、(i) の計算で、62% の生徒が前から順に計算し、加法を先に計算していた。ここでは、演算の順序の誤解があると考えられる。

次に、数字と演算記号の分離についての調

査は、表 3 の (ii) から (vi) のような問題に関して行われた。まず、(ii) の問題について、この答えとして $50 - 30 = 20$ としてしまう生徒が 51% いた。これは、マイナス記号と 10 の分離から起こったとしている。つまり文

字のない式でも、生徒はマイナス記号の分離をしてしまうことが示唆される。また、(iii)については、 $8 \div 4$ を先に計算して、 $104 \div 2$ とする生徒が 58%いた。これは、最初の割り算の記号のうしろで分離し、より簡単に計算できるうしろの割り算を先に計算することから起こったとしている。

(iv)の問題でも、同様にマイナス記号の分離が見られた。『4つの式を計算せずに答えが同じになるものを探す』という設定で、(b)と(d)が同じであると考える生徒が 23%おり、(c)と(d)が同じであると理解している生徒は 40%しかいなかった。Linchevskiらは、式(b)では、最初のマイナス記号と数 167 の分離が考えられ、式(c)では、(c)の中の $167 + 167$ のまわりに「心的なかつこ」を付けて、 $926 - (167 - 167)$ と見えていたと考察している。従ってマイナス記号の分離は数の段階でも起こりうると考えられる。

(v)の問題においても、これまでと同様にマイナス記号と数字の分離が顕著に見られる。89 どうし 92 どうしをそれぞれ正確にキャンセルできた生徒が 46%にとどまり、92 をキャンセルする代わりに足していた生徒が 21%もいた。また、(vi)では 59 をキャンセルする代わりに足していた生徒が 18%いた。また、この問題(vi)では、2つの 28 をキャンセルしている生徒が 23%いた。これらの生徒は、項の指示された演算からの分離をしていると考えられる。

また、(vii)の問題では、217 を不正確にキャンセルした生徒が 42%もいたという調査結果がある。これは、数をまとめ上げて計算するときに、演算を飛び越えうしろに書いてある演算を使用することから起こると考えられる。これと同様に、(viii)の問題においても、 $195 + 117$ をした生徒が 43%おり、 $67 - 39$ をした生徒が 39%、(ix)において、 $217 + 162$ をした生徒が 46%もいることが調査からわかっている。これらの生徒は、うしろの演算

を用いる飛び越えをしていると考察されている。

これらの調査で、調査の対象となった生徒は、「項の指示された演算からの分離」、「演算の順序の誤解」、「うしろの演算を用いる飛び越え」、といった3つの困難が数の段階でも見られたことを示している。

文字式のときだけでなく、数の式の場合においても、認知的ギャップが存在することが示唆された。このことより、算数と数学の接続には数の段階からの指導が重要になってくると考えられる。

4. まとめと今後の課題

本稿では、正負の数の加法・減法の教科書分析と Herscovics と Linchevski らの認知的ギャップの調査から、算数と数学の乖離の様相を見てきた。教科書分析では、東西移動の説明、ベクトルの差の定義に基づく方法、大小比較による説明を検討した。その結果、算数から数学への移行を考えるときには、どの場面を活用しても、どこかに指導上の工夫が必要となってくることが示唆された。本研究は、教科書を完全にする方向の研究には限界があるように思う。むしろ、本稿の後半で議論した認知的ギャップを含めて、どこに指導上の工夫があるかをきちんとふまえた上で、それを対処する指導を構想していく必要があるように思う。特に、演算や項の認識を高める必要性や、文字式との連続性を考えていかねばならないだろう。こうした指導上の工夫についての検討が今後の課題となる。

注および引用・参考文献

注1：啓林館の教科書「楽しさひろがる数学1」では、トランプゲームがあげられているが、トランプゲームの場面設定については、新しく出された場面設定であるため、今後の課題とする。

注2：本稿での教科書分析は、教科書編纂に

においては各社の様々な意図や考え方があることを承知した上で、算数から数学への移行という一つの視点から見たときに、筆者なりの特徴づけを行っただけであり、決して教科書のよしあしに言及したものではないことを断っておきたい。

- Carraher, D. W. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (2), 87-115.
- Fillooy, E. and Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.
- 藤井 齊亮. (2006). 初等教育段階における代数的思考の育成 ―擬変数の理解に焦点を当てて―. 数学教育論文発表会論文集, 39, 307-312.
- Herscovics, N. and Linchevski, L.(1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27,59-78.
- 一松 信他. (2005). 中学校 数学 1. 学校図書
- 岩崎 秀樹, 岡崎 正和.(1999). 算数から数学への移行について(1) ―代数和の位置づけとその指導―. 数学教育学研究, 5, 85-90.
- 国宗 進. (1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導. 明治図書.
- Linchevski, L. and Herscovics, N.(1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equation. *Educational Studies in Mathematics*,30,39-65.
- Linchevski, L. and Livneh, D.(1999). Structure sense:The relationship Between algebraic and numerical context. *Educational Studies in Mathematics*,40,173-196.
- 岡崎 正和.(2003). 全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究 ―教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から―. 数学教育学研究, 9, 1-13.
- 岡本和夫他.(2005). 未来へひろがる数学 1. 啓林館.
- 大塚 高央.(2004). 文字式の「よさ」の指導に関する基礎的研究 ―中学2・3年生を対象にした調査を手がかりにして―. 上越数学教育研究, 19, 37-48.
- 澤田 利夫他. (2005). 中学 数学 1. 教育出版.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and object as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 2,21-36.
- 重松 敬一他. (2005). 中学数学 1. 大阪書籍.
- 杉山 吉茂他. (2005). 新編 新しい数学 1. 東京書籍.
- 谷沢 浩明.(2000). 文字式の指導に関する考察 ―操作的と構造的な捉え方の視点から―. 上越数学教育研究, 15, 105-112.
- 渡辺 信三他. (1999). 新編 数学B. 数研出版.
- 柳本 成一.(1990). 正の数・負の数の四則 ―3つの指導法の比較―. 日本数学教育学会誌, 72(9),325-335.
- 吉田 稔他. (2005). 新版 中学校 数学 1. 大日本図書.