上越数学教育研究，第 23 号，上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.43-52.

数学授業におけるモデルの発達過程に関する研究
−単元を通した生徒の思考の連続性の視点から−

小平　美夏
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

日本の数学の授業は，長い間，問題解決的な授業が目指され(石田・川嵜，1987；相馬，1997)，その中で，課題の設定(相馬，1997)，多様な見方・考え方を生かすことが重視されてきた(古藤，1990)。相馬は，問題解決的な授業の中で，教師が提示する問題から，より一般的な疑問を，真の「課題」として再設定し，そこから原理・原則などを構成することを重視している。このような問題解決的な授業であれば，生徒は学習意欲を持ち，主体的に授業に取り組むようになると考えられている。また，多様な考えが重視されてきた理由として，古藤(1990)は，数学という教科の本質，個性尊重の視座，学習意欲振興の視座，練り合いの場の構成という４つの視点から，その意義を述べている。

これらは主として，１，２時間の授業の中での問題解決過程に焦点があてられてきたと思われる。本研究は，生徒の思考がより長期的に，単元を通して生きるような授業構成の仕方に関心がある。

Gravemeijer ら(2002)は，モデル化のプロセスについて，モデルは状況に依存するインフォーマルなモデルから，状況から意味が独立し，フォーマルを理解するためのモデルへ変容するものであると述べている。

本研究では，生徒達の思考が単元全体を通して連続することを目指し，それをモデルの発生と相互作用という視点から見ていくことにする。そして，中学２年「連立方程式」の単元に焦点をあてて，教授実験を通して，生徒の思考がどのように単元を通して連続していくかを，モデル化の視点から明らかにしようとするものである。特に，生徒の思考が活動のモデルから形式的なモデルへと変容するプロセスを分析することで，単元を通した問題解決的な授業の構成の方法について示唆を得ることを目的とする。

２．モデルについて

2.1．モデルのとらえ方

われわれが物事を考えるとき，また考えを他人に伝えるとき，原型そのものが扱いにくいときがある。そのようなとき，代わりにモデルを取り扱い，原型をより明瞭にとらえようとする(平林，1975)。また平林は，原型とモデルは相対的な関係にあり，モデルが次の段階で原型になる過程について説明している。

また，モデルについて，Gravemeijer ら(2002)は次のように述べている。

「モデルは最初，生徒の状況的なインフォーマルなストラテジーのモデルとして表面化する。それから，長い時間に渡ってモデルは次第にそれ自身，実体を持つようになる。モデルはそれ自体で一つの実在になり，よりフォーマルではあるが個人的に意味がある，算術の推論のためのモデルの役を果たし始める。」

つまり，Gravemeijer らは，モデルが活動のためのモデル model-of から数学的な関係につい

てのモデル model-for へ移行したときに，モデルは発展したと述べている。

近年，Lesh ら(2003)は，概念の重要な部分は 1 つのモデルに表れるのではなく，様々なモデルに分散して表れるという分散認知の立場をとりながら，問題解決過程で生徒が抱くアイディア，種々の表現様式，さらには，生徒が扱える教具やコンピュータなどの人工物をも，広くモデルととらえ，「モデル化」のプロセスを吟味している。

本稿では，「原型の本質がある目的のもとに適切に抽出され，原型がよりわかりやすくとらえられるものとして，生徒が考案もしくは理解したもの」をモデルと呼び，Lesh らと同様に，外的な表現だけでなく，内的なものをも含めてモデルとしてとらえることにする。また，平林の見方にあるように，原型は，必ずしも具体的な場面をさすのではなく，生徒にとって身近で，不確定な要素を含みつつ，思考の対象となりうるものであれば，抽象的な表記さえをも原型としてみていく。また，モデル化のプロセスとして，Gravemeijer の見方にあるように，モデルは，答えを求めるための道具から，それ自体を追究する数学的な対象へと発展するものであるととらえていきたい。そして，モデル化の細かいステップ，特に連続的なモデルの発展について，原型とモデルの関係から探っていくために，モデルがどのように相互作用していくかについて研究している古藤(1990)，池野(1998)，Lesh ら(2003)の研究を整理することで，モデルの発展を考察するための視点を得ることとする。

2.2. モデルの相互作用

古藤(1990)は，多様な考え方の扱い方・まとめ方を独自性，効率性，共通性，関連性の４つの観点から，次のようにまとめている。

①独立可能な多様性

②序列化可能な多様性

③統合化可能な多様性

④構造化可能な多様性

①独立的な多様性とは，数学的な考えとして妥当であり，かつアイディアとしては互いに関連が薄いか無関係であり，個々に同等な価値があると考えられる多様な考え方である。

②序列化可能な多様性とは，数学的な効率性の面から見て，それぞれの考えを一番よい考え，二番目によい考え，またはねらいから見て望ましくない考え，というように序列をつけることができる多様な考え方である。

③統合化可能な多様性とは，共通性に着目することによって，一つの考えにまとめることができる多様な考え方である。

④構造化可能な多様性とは，関連性に着目することによって，いくつかのグループにまとめることができる多様な考え方である。

池野(1998)は，古藤が分類した多様な考え方を練り合うステップとして，以下の４つの段階を挙げている。

①妥当性の検討

②関連性の検討

③有効性の検討

④自己選択の段階

①妥当性の検討とは，自力解決した１つひとつの考え方についてそれが論理的に筋道だっているかどうかを検討する段階である。

②関連性の検討とは，論理的に筋道だっていることが確かめられた考え方，あるいは検討により修正された考え方を比較し，互いの考え方の共通性や関連性ないしは特徴(よさ)を検討する段階である。

③有効性の検討とは，「簡潔さ」，「発展性」など有効性の点からそれぞれの考え方のよさや不十分さを検討する段階である。

④自己選択の段階とは，それまでに検討したことを参考にしたり，提示された問題を解いたりして，最もよいと思う考え方を自分なりに選択する段階である。

Lesh らは，モデル化のプロセスにおける次の４つの段階を提案している。

・多様性－様々な考え方が利用できる
・選択－生産的でない考え方が洗練され改訂され，拒絶される
・普及－生産的な考え方が概念的な展望を通して広がり統合される
・保存－生産的な考え方が時間を超えて保存される

この視点は，古藤(1990)，池野(1998)の研究と対応づくと考え，問題解決における生徒の思考のモデルの発生，相互作用をとらえるのに有効であると考える。本稿では，これらの視点から生徒の思考の発展過程を分析していきたい。

３．数学の問題解決的な授業におけるモデルの発生と相互作用を促す手立てについて

3.1. 問題解決的な授業における教科書の利用について

教科書は，教師にとっても生徒にとっても「主たる教材」である(文部省，1948)とうたわれてきた。また，臨教審(1987)では，生徒が使用する「学習材」としての教科書の性格を重視している。高倉(1995)は，生徒が使用する「学習材」としての教科書に求められる機能として，①学習意欲喚起機能，②学習課題提示機能，③学習方法提示機能，④学習の個性化・個別化機能，⑤学習定着機能を挙げている。この機能は，相馬(1997)が示す，「問題解決の授業」における教師による教科書の活用方法と対応がつく(小平，2007)。

また，岡本(1998)が提案する，問題解決的な授業の１つの特徴としては，生徒が「問い」を持つための準備段階の１つとして，教科書を学習対象として熟読する活動があることである。したがって，岡本の問題解決的な授業では，生徒が自由に教科書の内容を参照できるようにしている。そのために，教科書が学習の道具としてだけでなく，対象として機能するようにしている。

本稿では，教科書を生徒に解法を教えるものとしてだけでなく，多様な見方の１つに組み込む問題解決的な授業を構想したい。つまり，生徒一人ひとりのアイディアや教科書の知識，教具などでの活動，表現などを個々のモデルと考え，それらの「つながり」を問うことを授業の展開に位置づけることである。この授業では，教科書の記述を１つのモデルとなりうると考え，様々なモデルを行き来することで問題解決していくことを大事にしたい。つまり，教科書の内容は，１つのモデル，しかも中心的な考え方を示唆するものの，むしろ，他に出されたアイディアとの「つながり」を理解することを授業の目標として位置づけて，教科書の考え方が結論を導くための道具だけではなく，思考の対象となるようにすることである。したがって，教科書の内容は，表面的にアイディアを提供する道具としてではなく，それ自体，考察，吟味の対象となることが期待される(小平，2007)。

3.2. 問題場面の工夫の視点から

竹内(1984)は，「新しい問題の発見とその解決が新しい発見に結実し，新しい知識を生み出すのである」と述べ，生徒が数学的な活動における発見学習をすることが重要であると指摘している。単元における「問題から問題」への連鎖，つまり，「問題を発展させることとその解決の連鎖」(竹内，1984)によって，学習がより深められると述べている。

また，飯田(1990)は，よりよい問題解決に主体的に取り組んでいくためには，1つのシツエーションから，豊富でしかも本質的な数学的活動が期待できる優れた問題を教師が設定し，「生徒がその問題が生み出されたシツエーションをさらに探求し続けることによって，多様な問題設定に取り組んでいくことが重要である」(飯田，1990)と述べている。

本稿において，単元を通して問題から問題へ発展させていく上でこれらの見方を参考にしたい。はじめに提示した問題で出された

様々なアイディアを検討する中で，また検討した結果得られた知見から新たな問題が発生し，それをさらに解決していくというように，連続的なシツエーションの発展を期待する。このとき，単元を通して生徒の思考が連続的に発展していく過程を見ることができるだろう。また，多様なアイディアを引き出すために，オープンな問題(島田，1990)に設定することも必要であると考える。

3.3. 授業の振り返り活動の視点から

二宮(2002)は，「授業を振り返るために記述することで，自分自身の考えをさらに深め，また別の考えを得る，つまり，授業内容を記述する活動と生徒の学習活動とは相互作用することで互いに深化していく」と述べている。つまり，授業で出された様々なアイディアを記述することによって，生徒はそれらを比較，検討するようになり，断片的なアイディアのつながりが形成され，まとまりを持ってとらえることできるようになるため，授業内容のより深い理解を得ることが期待できる。

重松(1990)は，問題解決的な授業の最後に「算数作文」を書く活動を設けている。問題解決を振り返る活動を設けることで，メタ認知を育成し，よりよい問題解決を促進させ，概念のより深い理解を促すことができるとしている。

また，中村(2006)は，数学の授業における記述表現の分析から見えてくるものについて次のように述べている。

> 自己認識と他者からの影響も記述に現れてくる。自己認識とは，自分自身の考えや感情について再度振り返り，反省する記述である。また，他者とは，授業に介在する教師や他の学習者である。
>
> (中村，2006，p482)

つまり，生徒が授業をまとめ上げた記述の中には，様々なモデルの相互作用が見られると考えられる。

以上から，問題解決過程をまとめる記述によって，モデルの確定とともに，更なるモデルの相互作用がなされると考える。そして，生徒がまとめ上げた記述の中に，様々なモデルや授業内容の相互作用をみることができる可能性があると考える。

４．教授実験

教授実験は新潟県内の公立中学校２学年の１学級を対象に，授業者は KT 教諭と KS 教諭にお願いし，「連立方程式」の授業を全 13 時間(１時間の授業時間は 40 分)行った。授業の様子は３台のビデオカメラで記録した。そして，毎時間後に授業参加者の間で，授業中の生徒の活動や思考を理解するためのセッションを開いた。分析にあたっての具体的な方法として，全 13 時間分の詳細なプロトコルを作成した。そして，生徒の思考過程に焦点をあて，多様なアイディアがどのように発生し，相互作用していくのかを，モデルと原型という視点からとらえた。また，事前・事後の授業設計と実際の授業の関連をもデータとして，授業後の検討が生徒のモデルの発生にどのように寄与しているかを検討した。さらに Lesh，RME の視点からモデルの発達プロセスを分析した。

4.1. 方法

単元導入において，さっさ立て(図１)の活動を設けることで，生徒の豊かな考えを引き出すことができ，連立方程式の単元が連続的に展開できると思われ，生徒がこの活動から様々なモデルをつくり出し，単元を通して活用し，発展させていくことを期待した。

> 18 個のおはじきがあります。一人が後ろを向いている間に，別の人が「さぁ」というかけ声をかけながら，おはじきを１回に２個か３個ずつとります。これをおはじきがなくなるまで続けます。後ろを向いている人は，２個，３個ずつとった回数をあてましょう。

図１．さっさ立ての場面.

続く文章題解決(図２)では，オープンな設定

にしてさっさ立てでつくり出されたモデルが連続，発展していくように，柔軟に数値を考えていくことにした。

> りんご 3 個の代金とみかん 1 個の代金の合計は 350 円です。りんご□個の代金とみかん□個の代金の合計は□円です。りんご１個とみかん１個の代金はそれぞれ何円でしょうか。

図２．文章題解決の場面.

また，単元に入る前に教科書を読む活動を，そして，単元の区切りにおいて４度，「壁新聞づくり」の活動を設けた。教科書からのアイディアが，自力解決での素朴な解決方法と結びつくとき，より深い理解が得られると考えた。また，「壁新聞づくり」では，授業を振り返ることで，断片的な理解がまとまってくるのではないかと期待した。

4.2. 分析

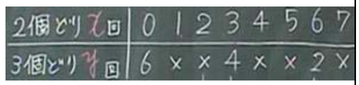
小平・黒田(2007)において，授業設計と実際の授業を交互に見ていき，さっさ立てから文章題解決の前半までにおけるモデルの発生と発展の過程を吟味した。本稿では，さっさ立てで起こったことを原型とモデルの視点から整理する(表１)。そして，文章題解決で起こったことを分析し，全体的に考察する。

文章題解決の最初では，さっさ立ての仕組みが活用できる数値に設定し，さっさ立てでのアイディアがどのように活用されるかをみることにした。

一方の式から他方の式から引くと答えが出るタイプの問題において，Mike と Rita は，さっさ立てで出された式を組み合わせる考え(モデルⅢ)のアイディアを活用し，「(3x+y)－(2x+y)」という式をつくった。そして，原型との対応も考慮し直し，一方の式を他方の式から引く加減法の考え(モデルⅣ)をつくり出した。ここではモデルの洗練として，新しいモデルが生じている(図３)。

一方の式を２倍して他方の式から引くタイプの文章題において，Matu と Shima は，一方の式を他方の式から２回引く加減法の考え(モデルⅤ)とともに，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)の２つを生じさせていた。Shima は「２倍してから引く考えの方が簡潔だからよい」と説明したが，Matu は「何のために２倍して引くの？そんなこと実際はありえない」と反論した。全体追究において，Masa がさっさ立てのときに

表１.

<table>
<tr><th>原型</th><th>モデル</th></tr>
<tr><td>・さっさ立て(6 個)</td><td>・さぁの回数に着目して答えを当てる</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(6 個)
・さぁの回数に着目して答えを当てる</td><td>・１個取りの回数と２個取りの回数を合わせるとさぁの回数になる</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(６個)
・1 個取りの回数と 2 個取りの回数を合わせるとさぁの回数になる</td><td>・x＋y＝さぁの回数
・さぁの回数に関する表
<table><tr><td>さぁ</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>1 個</td><td>／</td><td>／</td><td></td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>／</td></tr><tr><td>2 個</td><td>／</td><td>／</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>／</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(6 個)
・表</td><td>・６－(さぁの回数)＝(2 個取りの回数)(モデルⅠ)</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(18 個)</td><td>・18－2×(さぁの回数)＝(3 個取りの回数)(モデルⅡ)</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(18 個)
・モデルⅡ</td><td>・取った回数に関する表


・18－2×(さぁの回数)＝y</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(18 個)
・モデルⅡ</td><td>・鶴亀算の考え

</td></tr>
<tr><td>・さっさ立て(18 個)</td><td>・「x＋y＝(さぁの回数)」
・「2x＋3y＝18」</td></tr>
<tr><td>・x＋y＝(さぁの回数)
・2x＋3y＝18
・18－２×(さぁの回数)＝y</td><td>18 － 2× (さぁの回数) ＝ 3 個取りの回数
|| || ||
(2x+3y) － 2× (x+y) y</td></tr>
</table>

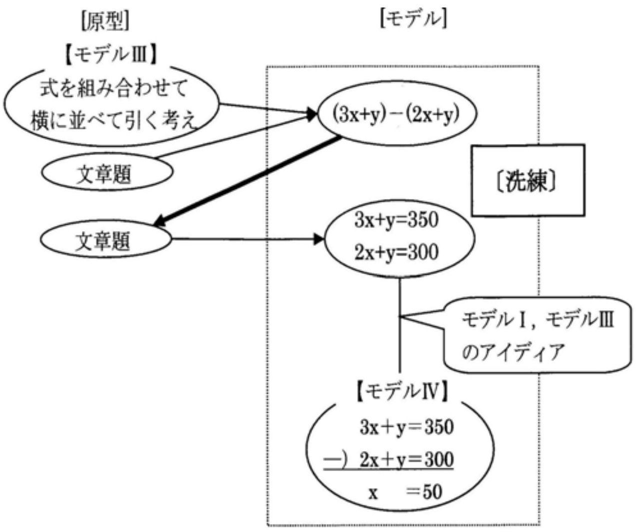


図３．モデルⅣの発生過程.

教師が少し示した○△モデルを用いながら，「２人がそれぞれ 170 円ずつ食べる。だから合計から２人分の 340 円を引く」という説明をした。教師はその説明を用いて，式と具体的場面を行き来しながら，「２回引く＝２倍してから引く」ということを意味づけた。それによって，Matu は２つのモデルを関連づけられ，その後は一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)を選択した。ここでは，Matu は自分なりに有効的な考えを選択し，活用しているという意味で Lesh らの「保存」が起こっている(図４)(小平，2007)。

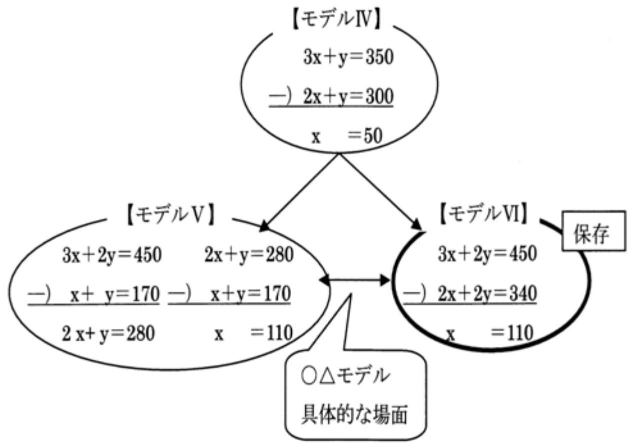


図４．モデルⅥが保存された場面.

両辺を何倍かして引くタイプの文章題において，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)を活用し，洗練させて両辺を最小公倍数にそろえて引く考えをつくり出す様子がみられた。

Mike	どうやって 60 が出たの？あっ差が 60 だからか。りんごとみかんの。そうだよ。x を引けばいいんだよ。x をなくせばいいんだよ。
Shima	x をなくせば出るんだよ。
Mike	待って，9x になって， 何で俺みかんがでなかったんだぁ。簡単な方法分かった。こっちだとさ，(りんごとみかんの個数がそれぞれ)１同士だったけど，だから，３かけて消したじゃん。両方にかけて同じくすればどっちか消えるじゃん。

このように，Mike は，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)の「文字の消去」という目的に着目して，モデルをつくり出している。これまでの場面では，生徒たちは「答えを求める」という目的のもと，モデルをつくり出していたが，この場面においては，「文字の消去」という目的に変化している。その結果，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)を発展させて，公倍数の考え方をもとにして，最小公倍数にそろえて引く加減法の考え(モデルⅦ)をつくり出した。つまり，モデルをつくり出す目的が変化したことで，加減法の式操作を拡張させることができたと考えられる。したがって，これまで発展的，統合的に新たなモデルをつくり出してきたことが，モデルを構造的にとらえることを促し，さらに新たなモデルをつくり出す契機になったと考えられる。

同じ問題場面で，Rita は，次のように発言している。

Rita	いや，両方やってた，y を求める方。え，y 出す方と x 出す方と。
Shima	え，y 出す方できた？
Rita	え，どっちにしろ，どっちかを消せばできるから。
Shima	で，できた？
Rita	うんできたよ。

このように，Rita は，最小公倍数にそろえて引く加減法の考え(モデルⅦ)を発展させ，y の係数を最小公倍数でそろえて引く加減法の

考え(モデルⅦ’)をつくり出した。ここでも，モデルをつくり出すための「文字の消去」という目的が明確になったことで，消去する文字に着目した追究が行われ，モデルの発展がなされたと考えられる。つまり，発展的に新たなモデルをつくり出す過程において，モデルをつくり出す目的が変化したことによって，モデル自体が思考の対象になり，モデルの洗練がなされたと考えられる。

続いて，代金の差についての文章題において，Maki は両方の式を足す加減法の考え(モデルⅧ)をつくり出した。そして，「文章題から，3x＋y＝290，x－y＝30 という式をつくり，両辺を引いてみたが，よくわからないから足してみて答えを求めた。」と説明した。この発言から，Maki は，「文字の消去」という目的を持って式操作を行ったと考えられる。つまり，この目的のもと，モデルの追究がなされたことで，両辺を足す加減法のモデルが生じたと考えられる。したがって，「文字の消去」という目的が，加減法の式操作に着目することを促し，加減法の「引く」という式操作から「足す」という式操作へのモデルの発展に寄与していたと考えられる。一方，Mishi は文章題から「3x＋y＝290」，「x＝y＋30」という式をつくり，代入法の考え(モデルⅨ)をつくり出し，「これを全部みかんの値段にすると求めやすいから」と説明した。つまり，Mishi は，「文字の消去」という目的のもと，置き換えという方法にモデルを発展させ，代入法の考えを生じさせたと考えられる。

文章題解決におけるモデルの活用を図に表すと図５のようになる。

最後に，単元終了段階の壁新聞づくりについて触れておきたい。例えば，Rita の作成した壁新聞において，加減法と代入法のモデルが相互作用している様子がみられた（図６）。Rita は，「文字の消去」という視点から，加減法と代入法の式操作を比較し，代入法の式操作をまとめ上げている。つまり，「文字の消去」という目的のもと，加減法のモデルと代入法のモデルが相互作用し，様々なモデルを一つの体系としてとらえているといえよう。

５．考察

文章題解決の活動で起こったことをモデルの発展という視点から見ていく。

一方の式を他方の式から引くと答えが出るタイプの文章題において，Mike と Rita は，文章題との関係を考慮し，一方の式を他方の式から引く考え(モデルⅠ)と式を組み合わせる考え(モデルⅢ)のアイディアを活用して，一

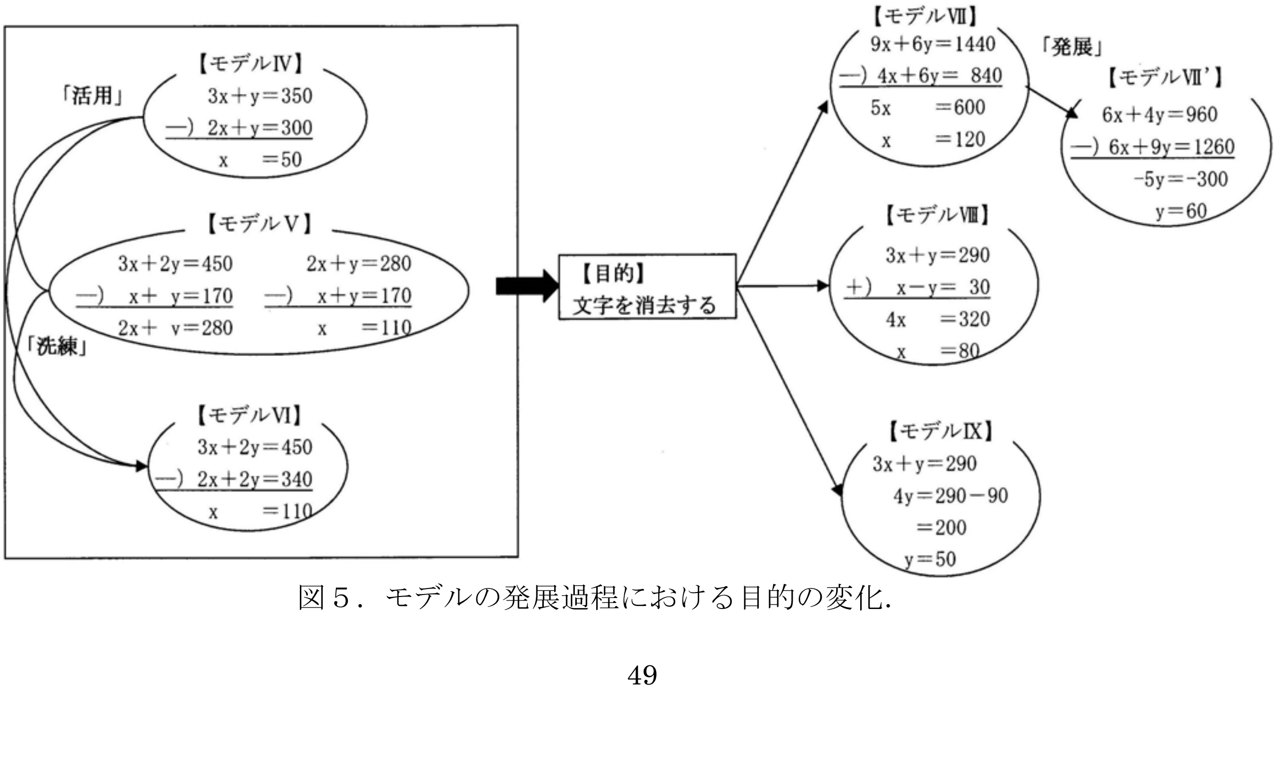


図５．モデルの発展過程における目的の変化.

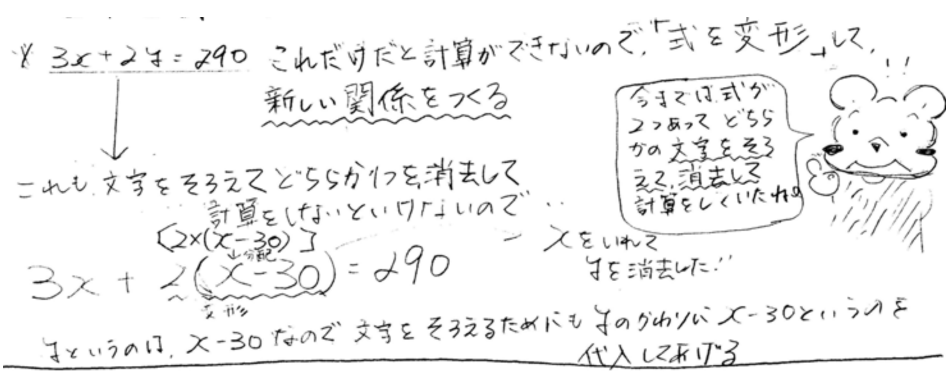


図６．メタ表記が見られる Rita の壁新聞.

方の式を他方の式から引く加減法の考え(モデルⅣ)をつくり出した。つまり，さっさ立てのモデルを文章題(situation)との対応を考慮しつつ活用し，発展的に新たなモデルをつくり出した。ここでは，様々な考えを活用して新たなモデルをつくり出しているという点で，Lesh の「多様性」の段階だったと考えられる。また，この段階には，それぞれのモデルの結論の導き方は妥当かという検討が含まれることから，解を求めるための方法としてモデルをとらえている段階であると言えよう。

一方の式を２倍して他方の式から引くと答えが出るタイプの文章題において， Matu と Shima は，一方の式を他方の式から２回引く加減法の考え(モデルⅤ)とともに，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)の２つを生じさせ，「文字の消去」という目的のもと，妥当性，共通性の点からモデルの比較，検討を行った。その結果，Matu は両者のモデルを関連づけられ，一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)を選択するようになった。ここでは，モデルを関連づけられ，よりよいモデルを選択しているという点で，Lesh の「選択」の段階であるととらえることができよう。また，この段階には，検討されたモデルの相互の共通性や関連性を検討し，「簡潔さ」「的確さ」等の有用性の点からモデルを洗練することが含まれることから，モデル自体を追究する段階である。

また，最小公倍数にそろえて引く加減法の考え(モデルⅦ)，両辺を足す加減法の考え(モデルⅧ)，代入法の考え(モデルⅨ)は，「文字の消去」という目的のもと生じたと考えられる。ここでは，それまでつくり出してきたモデルを「文字の消去」という目的のもと統合的にとらえているという点で， Lesh の「普及」の段階であったと考えられる。

第 13 時において，Rita は，文章題の構造が変わっても，文章題の中から２つの未知数を取り出し，２つの数量関係に着目して連立方程式をつくることができた。ここでは，加減法と代入法の考え方を適切に活用して，様々な文章題を解決しているという点で，Lesh の「保存」の段階，また，RME の視点においては，「formal」の段階ととらえることができよう。

文章題解決における生徒のモデルの発展過程を，RME の視点を含め，Lesh の「多様性，選択，普及，保存」の視点と対応づけると図７のようになる。

このように，モデルが発展していく過程において，形式的なモデルが生じていることがわかる。このプロセスの中で核になったのは，生徒がモデルをつくり出していく過程で，妥当性，共通性などの点からモデルを比較，検討したことによって，「文字の消去」という目的が明確化され，モデルが答えを求めるための道具から，思考の対象へと変容したことであると考える。そして，「文字の消去」という目的のもと，モデルを体系的にとらえることができ，形式的なモデルが生じたと考える。

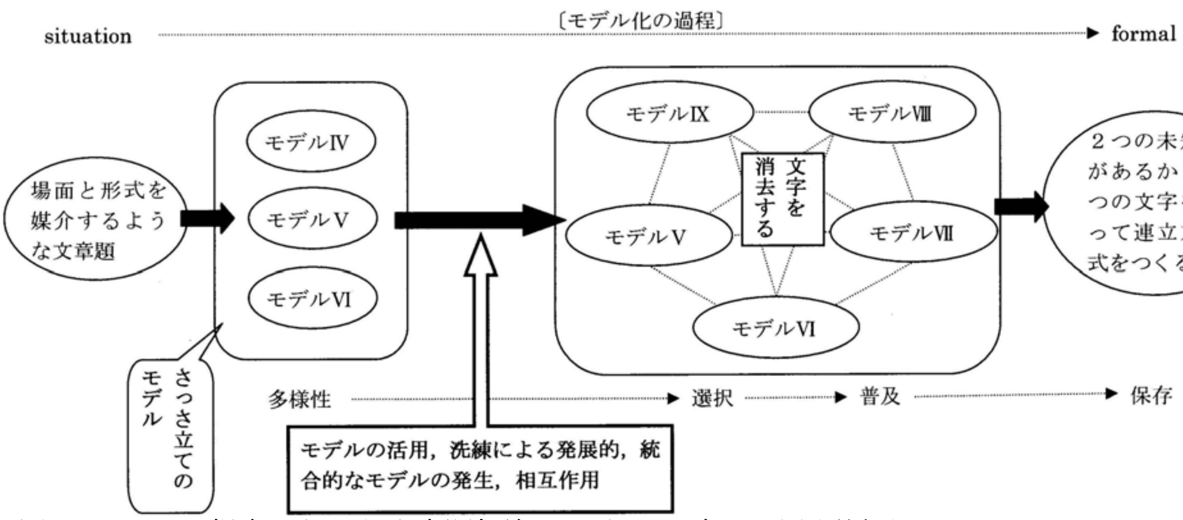


図７．Lesh の視点からみた文章題解決におけるモデルの発展過程(モデルⅢ：式を組み合わせる考え，モデルⅣ：一方の式を他方の式から引く加減法の考え，モデルⅤ：一方の式を他方の式から２回引く加減法の考え，モデルⅥ：一方の式を２倍して他方の式から引く考え，モデルⅦ：両辺を何倍かして引く加減法の考え，モデルⅧ：両辺を足す加減法の考え，モデルⅨ：代入法の考え).

つまり，それまでのモデルが活用され，公倍数の考え方や置き換えの考え方などによる洗練がなされる過程において，「文字の消去」という目的が抽象化されたことによって，それまでのモデルが構造的にとらえられ，さらにそれぞれのモデルの方法が抽象化され，形式的なモデルが生じたと考えられる。したがって，場面から生じたアイディアを連立方程式の一般的な解法と結びつけるように文章題の数値を設定したことが，単元を通したモデルの発展に大きく寄与していたことが分かる。その過程において，はじめは答えを求めるための道具としてとらえられていたモデルは，それ自体が思考の対象となり，形式的なモデルが生じたと考えられる。

６．本論文のまとめ

本稿では，連立方程式の単元を連続的に展開するという意図のもとで，モデル化という視点から，モデルの発展過程をとらえることによって，モデルの発生と相互作用を促す手だてについてみてきた。

さっさ立てで生じたモデルが活用できるように文章題の数値を設定することで，さっさ立てでのアイディアが生き，モデルが洗練され，単元を通して統合的，発展的にモデルが生じることが分かった。そして，その過程で形式的なモデルが発生することが示唆された。つまり，場面から生じたアイディアと連立方程式の一般的な解法を媒介する問題を設定することで，単元を通して，連続的にモデルの発展が行われることが示唆された。

また，さっさ立てのモデルが活用できるように，一方の式を他方の式から引くと答えが出るタイプの文章題から一方の式を２倍して他方の式から引くタイプの文章題に設定したことで，一方の式を他方の式から２回引く加減法の考え(モデルⅤ)と一方の式を２倍して他方の式から引く加減法の考え(モデルⅥ)が生じ，両者の考えの比較，つまり，２つのモデルの妥当性の検討だけでなく，共通性，関連性という視点から，モデルの検討が行われ，文章題の答えを求めるための道具からそれ自体を追究する思考の対象へと移行することが分かった。さらに，文章題を発展的に提示したことが，「文字の消去」という目的の抽象化を促し，モデルを構造的にとらえることを促す１つの要因であったことが分かった。

今回の教授実験では，教科書の内容を多様な考えの１つに組み込み，それ自体を対象として追究することを目標としていたが，その活動によって，単元を通して生徒の問題解決に寄与したかを十分に把握できなかった。したがって，教科書が生徒にとっての問題解決のよりどころとなる授業展開の工夫を再度考え直すことが今後の課題である。

謝辞　本研究を進めるにあたり，新潟県上越市三和中学校の秋山正道校長先生をはじめ，数学科の先生方には，研究の意図を十分にくみとっていただき，貴重なご助言をいただきました。また，生徒の皆さんには調査においてご協力をいただきました。謹んで感謝の意を表します。

引用・参考文献

Gravemeijer, K. and Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. K. Gravemeijer *et al*. (eds.), *Symbolizing: Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 145-169). Kluwer Academic Publishers.

平林一栄．(1975)．算数・数学教育のシツエーション．広島大学出版研究会.

飯田慎司．(1990)．問題解決．岩合一男編，算数・数学教育学（pp. 135-149)．福村出版.

池野正晴. (1998)．算数科　授業改善・３つの視点．古藤怜,新潟算数教育研究会(編著)．コミュニケーションで創る新しい算数学習―新しい時代の授業づくりと授業研究―．東洋館出版社.

石田忠男．(1991)．問題解決．数学教育学研究会編，新算数教育の理論と実際(pp. 163-178)．聖文社.

石田忠男，川嵜昭三．(1987)．算数科問題解決指導の教材開発．明治図書.

小平美夏．(2007)．教科書の効果的な活用を目指した問題解決的授業に関する研究－モデルの相互作用の視点から－．上越数学教育研究，22, 133-142.

小平美夏，黒田匠．(2007)．数学授業におけるモデルの発生と相互作用を促す授業設計とその効果－連立方程式の授業構成について－．第 40 回数学教育論文発表会論文集，157-162.

古藤怜，新潟算数教育研究会．(1990)．算数科多様な考え方の生かし方まとめ方．東洋館出版社.

Lesh, R. and Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. LEA.

文部省．(1948)．教科書の発行に関する臨時措置法，第 2 条.

中村亨史．(2006)．算数科授業における記述表現活動の役割－児童の小数の乗法に関する記述表現の分析を通して－．第 39 回数学教育論文発表会論文集, 481-486.

二宮裕之．(2002)．数学教育における相互構成的記述表現活動に関する研究―内省的記述表現の規定と内省的記述活用学習の事例的分析―．数学教育学研究, 8, 139-151.

岡本光司．(1998)．生徒が「数学する」数学授業の授業．明治図書.

臨時教育審議会．(1987)．教育改革に関する第三次答申.

重松敬一．(1990)．思考と認知．岩合一男編，算数・数学教育学（pp. 168-184)．福村出版.

相馬一彦．(1997)．数学科「問題解決の授業」．明治図書.

高倉翔．(1995)．「学習材」としての教科書に機能と要件．細野二郎他，「学習材」としての教科書の機能に関する基礎的研究（pp. 251-257)．教科書研究センター.

竹内芳男，沢田利夫．(1984)．問題から問題へ－問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善－．東洋館出版社.