上越数学教育研究，第 23 号，上越教育大学数学教室，2008 年，pp.135-142.

生徒の社会的活動としての証明を捉える視点

松井　守
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1．はじめに

中学校数学において，証明問題は，主に中学校２年生で学習する図形領域や文字式の利用の中で取り上げられている。筆者の経験では，生徒が最も困難さを示し，不得意感を示す領域の一つが，証明問題である。

筆者は，証明問題に対する困難点として，二つあると考える。一つは，教師や教科書が求める演繹の過程と，生徒の実際の思考とが整合されたものにならないことがある。小学校では，帰納的に説明することが多いため，中学校では，ほとんど初めて演繹的に証明しなければならない。

証明指導後に行った小関ら(1987)の調査でも，演繹的に証明しなければならないと考えている生徒の割合は低い。生徒による証明に使われる事実が，実は生徒にとって経験的であり，儀式的に証明を行うことになる。宮崎(1997)は，中学校で学習する図形の証明問題の根拠に関して，演繹的に証明されていないことがらも，生徒の知り得る事実として存在することを指摘している。宮崎(1997)は，例えば，同位角の性質が，それにあたるとしている。

もう一つは，生徒は自分なりの言葉で説明はできても，形式的な書記表現を行うことを困難に感じてしまう傾向にあるということである。筆者のこれまでの証明指導を反省してみても，演繹的証明の記述の仕方に力点をおいた指導を行い，子どもの思考まで配慮した指導をしてこなかったのかもしれない。先行研究においても，形式的な書記表現だけでなく，口頭表現(江森，1995)や具体物を扱った操作的説明，形式的証明を生成するための説明(宮崎，1992；國本，1994；村上，1997)の有効性を説いている。

筆者は，この証明の難しさを解消するためには，証明活動を社会的活動，つまり，生徒どうしの積極的な議論により正当化していく活動と捉え，授業を構成していく必要があると考えた。さらに，筆者は，この社会的活動における議論の過程を，相互作用の過程とみなし，相互作用の側面から，生徒が証明をどのように行うかを知る必要があると考えた。

本稿の目的は，立脚する証明観を提示し，その提示した証明観に基づき，生徒が相互作用の立場から，社会的活動として証明を行うことを解釈するための視点を得ることである。

2．社会的活動としての証明

2.1. 我が国における証明指導の現状

平成 11 年の学習指導要領解説―数学―(1999)では，

> 証明は,「仮定」から出発して，すでに正しいと認められている事柄を根拠にして，「結論」を導くこと(p. 50)

とある。その正しさの規準は，一般性の保証という点で，帰納や類推によって導き出されたものではなく，あらかじめ正しいとされた公理にあるといえる。実験や帰納と証明の関

わりあいや，教材としての証明にどこまで厳密さを求めるかという問題点がある。幾つかの研究はこれらの問題点を扱っている。証明を，結論から仮定へと向かう見方をして解析的に捉えた研究（黒田，1927）や，定理のつながりという見方をして体系的に捉えた研究（磯田，1987），結論を生徒自らに推論させる決定問題として捉えた研究（相馬，1995）などがある。

2.2. 証明観の変遷

本節では,デービス&ヘルシュ(1981)の中から，今日的な社会的活動としての証明に至るまでの証明観の変遷を概観していく。

デービス&ヘルシュ(1981)は，紀元前 300 年にユークリッドが築いた体系に従って伝えられてきた幾何学について，次のように述べている。

> 自明なものと仮定される若干の基本概念から出発して，数学的，論理的取り扱いに関する少数の定まった規則に基づいて，ユークリッド幾何学は次第に複雑さを増す推論の構造体系を構築する。(中略)幾何学は論理的思考の大きな訓練場となり，幾何学の学習は(善いにつけ悪いにつけ)生徒にそのような思考の基礎訓練を与えるものと考えられている。(p.2)

この演繹過程は証明であり，ユークリッド幾何学は組み立てられた演繹体系の最初の例である。

この証明に対しての捉え方は，近年に至るまで，プラトン主義に支えられてきた。プラトン主義では，数学的対象は実在し，客観的事実とみなされて，人々の知識には全く依存しない。したがって，プラトン主義者にとっては，証明は絶対確実なものと考えられている。

20 世紀前半には，構成主義による証明の捉え方がみられるようになった。プラトン主義がどんな推論の原理も受容するのに対して，構成主義は，有限な構成によって獲得できるもののみを真の数学とみなしている。

20 世紀中頃には，形式主義による証明の捉え方がみられるようになった。形式主義では，数学は単に公式からなるに過ぎず，記号の系列に過ぎない。しかし，公式に物理的解釈が与えられると，ある意味を獲得し，真または偽となりうる。形式主義者は数学を厳密な証明の科学として位置づけている。

その後，証明が絶対確実なものという捉え方に対して，証明は可謬である，謬りがありえるものとする捉え方がみられるようになった。

デービス&ヘルシュ(1981)は，

> 1934 年に，カール・ポパーが，帰納的推論を正当化することによって科学の諸規則を正当づけることは不可能であり，不必要でもあると主張したとき，科学の哲学に革命が起きた，(p.334)

と述べている。ポパーは，科学の諸理論は，仮説，推測として発明され，それらを反証することで成り立つことを主張している。そのポパーの後継者として，数学に通じた哲学者としてラカトシュ(1976)が登場する。ラカトシュ(1976)は,数学も自然科学と同じように，理論の批判と訂正によって成長するものと捉えている。

ラカトシュ(1976)の理論は，社会的活動としての証明の基盤となるものである。証明を社会的活動として捉えるということは，証明はすでに存在しているものとしてではなく，人々の議論によって，創り出されるものとして捉えるということである。

2.3. ラカトシュ理論

ラカトシュ(1976)は，数学は自然科学と同じく不可謬ではなく，可謬であるという立場にある。つまり，数学は決して，完全なものではないとしている。ラカトシュ(1976)は数学が，形式化された演繹的パターンによって

ではなく，人と人とが競い合い，謬りを修正し合うことによる理論の促進によって成長するものとしている。

ラカトシュ(1976)は，次のように述べている。

> 非形式的・準経験的数学が議論の余地なく確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく，思索と批判，証明と論駁による推量の不断の改良を経て成長する。(p. 5)

ラカトシュ(1976)のいう証明は，推測することから始まり，その推測の説明が批判されていく中で，推測は改良されていくものであるといえる。また，すでにできあがったものを証明するのではなく，生徒自らが作りだした推論について議論する中で，創り上げられていくものであるといえる。ラカトシュ(1976)のいう証明は，推測と相互作用とに特徴づけられているといえる。

ラカトシュ(1976)は,証明のどの段階でも,批判の対象となり，議論の一つの段階に対する反例を「局所的反例」と呼び，議論にではなくて，結論自体に対する反例を,「大局的反例」と呼んでいる。

このラカトシュ理論を基に，筆者の考えた中学校における証明の展開の例を示す。

課題「二桁以上の３の倍数とその各位の和についての関係を見つけ，それを証明しなさい」

推測：12 は，1＋2＝3
15 は，1＋5＝6
18 は，1＋8＝9
21 は，2＋1＝3

証明：だから，3，6，9 のどれかになる。

反例：しかし，39 は，3＋9＝12(大局的反例)

証明：だから，3，6，9，12 のどれかになる。

反例：しかし，69 は，6＋9＝15
99 は，9＋9＝18
579 は，5＋7＋9＝21
・・・(大局的反例)

証明：だから，３の倍数になる。

反例：しかし，すべての３の倍数を調べていない。(局所的反例)

証明：例えば，三桁の３の倍数は，
100a＋10b＋c
＝3(33a＋3b)＋(a＋b＋c)
と変形され，a＋b＋c は，３の倍数となる。

この証明問題は，n 桁の数においても，３の倍数であることを，文字式を用いて証明しなければならないため，中学校では，やや高度な問題である。この例においても，証明としては不完全である。しかし，生徒どうしの推測，証明，反例の繰り返しにより，数学が改良され，成長している。これらの反例の飛躍が生徒にとって難しい。相互作用の過程を細かに見ていかなければならない。

ラカトシュ(1976)は，自らの証明観を，架空の授業の中でのみ，自分の推測の正当性を主張しようとする生徒とそれを批判する生徒のやりとりを示している。したがって，ラカトシュ理論に立脚した中学校における証明観を設定し，実際の検証授業を行うことは，意義のあることと考える。

2.4. ラカトシュ理論を応用した研究

近年，このラカトシュ(1976)の理論を応用し，証明を社会的活動として捉える研究や実践が行われてきている。本節では，それらのうち幾つかを概観していく。

ラカトシュ(1976)の証明の社会的側面に着目したものとして,Balacheff(1990)の研究がある。Balacheff(1990)は，教師や教科書による権威の利用を否定し，正当化を相互作用の結果としてのみ起こり得ると主張している。また，Balacheff(1990)は，数学の授業において，真実に対する責任が教師から生徒へ移行するための条件として,「数学的知識は社会的知識である」,「数学の授業は共同体として存在する」という二つの制約を設定している。

特徴的なのは，生徒が自分自身の問題として捉えるための状況設定を行い，実験授業を行っていることである。

ラカトシュ(1976)の社会的構成に基づいた数学の知識に対する見方を，生徒に獲得させようとしたものとして，ランパート(1990)の研究がある。ランパート(1990)は，子どもの直観と意識的推論から，原理や公式を生み，その必然性や過程を歩ませる授業を目指している。そのために，社会的権力関係を反映した会話ではなく，一人ひとりが自分の言葉で自分の理解の方法を語りあえる共同体を形成する必要があるとして，対話を通して語り合いながら共同で「数学する」活動を重視している。その「数学する」活動とは，ラカトシュ理論に基づいた，命題を推測することに始まって，反証や反駁を通して仮定の検証へと進む「ジグザグ」道をたどるものであり，学校経験に形づけられている既存のものを正しいルールに当てはめて，正しい答えを得るようなものではない。彼女の実践では，考えの根拠をはっきり述べ自分の正当性を主張し続けるといった知的勇気を持ち続けた生徒や，他者の考えを受け入れ，論理的な議論をし続けたその他の生徒の姿が報告されている。ランパート(1990)の理想とする授業は，学級という共同体に依存した子どもの理解の方法の育成である。

ラカトシュ(1976)の論駁に注目したものとして，関口(1992)の研究がある。関口(1992)は，証明に対する「論駁」の関係に焦点をおいて，民族誌的方法を用いて，一教室の授業を約半年間にわたって観察し，教師や生徒へのインタビューや文書類の収集も随時行い記録していくという質的研究を行った。ラカトシュ(1976)は論駁をかなり厳しい批判活動(反例を伴う)としていることに対し，関口(1992)は，論駁を人々の間で生ずる意見の不一致，異議，反論，否定，拒否等の行為一般を包括するように定めている。その結果，論駁の方法として，権威法，条件法，実験法，反例法，矛盾法，改枠法，規則法の七つの方法を同定した。

ラカトシュ(1976)の準経験主義に基づき，社会的活動として証明を捉えたものとして，國本(1998)の研究がある。

國本(1998)は，

> 証明は，推測をより説得力のあるものとする説明，正当化，仕上げを反例のもとで，より詳細に，精密にされていくもの(p. 39)

としている。推測したものの反例が存在しなければ，真の命題と認められる。証明は形式性よりもアイデアや証明に隠された仮定を探求するように求められ，証明を書くことよりも自分の言葉で説明したり批判することに重点が置かれる。そして，社会的グループ(教室)の合意が証明の妥当性の判定の基準になる。國本(1998)は，生徒の自由な表現を強調している。國本(1998)は，証明指導では，論理的思考力の育成にだけではなく，社会的態度の育成も考慮しなくてはならないとしている。

３．相互作用について

ラカトシュ(1976)を基にしたいくつかの研究の他に，実際に子どもの活動を相互作用過程として扱った研究がある。

本節では，相互作用の解釈，考察を行い，相互作用の側面から，生徒による社会的活動として証明を捉える視点を論じることとする。

3.1. シンボリック相互作用論

相互作用の中心的な立場にあるものとして，ブルーマー(1991)のシンボリック相互作用論がある。その理論の前提は，次の三つである。

①人間は，ものごと(物理的対象，他者，他者の各種カテゴリー，制度，指導的理念，他者の活動，日常生活の出来事)が自分に対して持つ意味にのっとって，そのものごとに対して行為するというものである。

②ものごとの意味は，個人がその仲間と一緒に参加する社会的相互作用から導き出され，発生する。

③さらに，ものごとの意味は，個人が自分の出会ったものごとに対処するなかで，その個人が用いる解釈の過程によって扱われたり，修正されたりする。(p. 2)

これらの前提から，ものごとの意味が個人の解釈過程に関わっていて，他者との関係の中で個人が意味を構成しているといえる。個人の解釈過程に焦点がおかれているため，意味は主観的な側面がある。しかし，意味は，他者との関係の中で，構成され，修正されることから，客観的な側面もある。この客観的な側面は，すでに存在しているものではなく，人と人とがある集団の中で構成されたものである。ものごとの意味が人と人との間で構成されるものであるならば，真偽の捉え方も人と人との間で構成されることになる。

ラカトシュ理論における推測の証明と反例の繰り返しは，すでにある真偽の規準に従うのではなく，人間どうしの間でなされる真偽の構成活動といえる。したがって，ラカトシュ理論は，シンボリック相互作用論と深く関連していると捉えることができる。

ブルーマー(1991)は，人は，役割取得をなすとして，次のように述べている。

相互作用への参加者の双方は，必然的に，相手の役割を取得しなくてはならない。相手に対して自分が何をしようとしているのかを指示するために，個人は，その相手の立場から指示を行わなくてはならない。(p. 12)

つまり，人が指示(説明)をするときには，相手の立場で示さなければならないし，指示される側も，相手が何を示そうとしているのかを理解しようとしなければならない。

ブルーマー(1991)は，このことを「ある強盗が，被害者に向かって，両手をあげろと指示する」ことを例にして，説明している。

①被害者がこれからすること(両手をあげること)の特定化

②強盗が行おうと考えていること(被害者から金を奪い取るということ)の特定化

③形成されている連携的な行為(強盗)の特定化(p. 12)

強盗は，被害者の立場からみなければならないし，被害者も強盗の立場からみなくてはならない。

ブルーマー(1991)は，この，指示と解釈の二重の過程，つまり，役割取得によって，人々は，お互いの活動を適合させ，自分自身の個人的行動を形成していくことを指摘している。

これは，生徒どうしの関係においても同じことがいえる。生徒Ａは生徒Ｂが何を意図して説明しているのかを確定し，生徒Ｂは自分が何を意図しているのかを生徒Ａに伝達する。それが整合されなければ，別の具体的な説明を施すことになる。

役割取得が人の本性であるならば，他者に対しての説明や反例によるラカトシュ理論における証明構成の意義が示唆される。もし，証明が，説明や反例を施すことなく，個人の中だけで行われるものであれば，ただある数学を形式的に処理するか，途中で，あきらめてしまうことになる。いずれにしても，証明を形成しているとはいえない。

ブルーマー(1991)は，人々が指示または言及するあらゆるものごとのことを対象と呼んでいる。その対象は，個人に対して持つ意味によって構成されるとしている。このことを，椅子という対象を例にして，

例えば，椅子は，人によっては腰をおろすためのものという意味であったり，奇妙な武器といった意味であったりとさまざまに変化する，(p. 88)

と述べている。

これをラカトシュ理論における証明と反例の場面でいうと，例えば，二等辺三角形の性質を捉える場面で，生徒Ａは，「二等辺三角

形は，頂角で折るとぴったり重なるもの」（対象Ａ）と説明する。対象Ａは，生徒Ａの経験や活動の中から得られた意味によって構成されている。

ブルーマー(1991)は，その個人が構成する対象について，

> 対象は，人が他者と相互作用することによって形成され，維持され，弱められ，また変容されていく，(p. 27)

と述べている。つまり，対象は人と人との間で存在し，相互作用に依存して，変容していくものだといえる。

上記の例で，生徒Ａは，「二等辺三角形は，頂角で折るとぴったり重なるもの」（対象Ａ）と発言する。これに対して，生徒Ｂは，「二等辺三角形は，折り目を軸として線対称なもの」（対象Ｂ）と発言する。二等辺三角形を折るという経験的な意味を伴った対象Ａは，線対称という数学的な意味を伴った対象Ｂに変容されていく。

ブルーマー(1991)は，

> 共通の対象が生じるーすなわち，一定の人々にとって同一の意味を持ち，この人々によって同じように見られる対象があらわれるのである，(p. 14)

と述べている。つまり，対象の変容によって，対象は，集団の中での共通の対象となりうることを示している。

上記の例において，二等辺三角形の性質に関する対象の変容の繰り返しによって，学級という集団の中で共通の対象が生じることになる。

以上のことから，社会的活動における議論の過程を，相互作用の過程と見なすことが可能であるという示唆を得た。そして，生徒の対象がどのようなものであるか，その対象がどう変容されたのか，その対象が学級の中で共通のものとなりえたのかを把握することで，生徒が証明をどのように行うかを知ることができると考えた。

3.2. 数学的対象

シンボリック相互作用論の前提に従い，数学の授業における対象についての研究がある。中村(2007)は，その数学授業における対象について，

> 数学の授業においても数学が存在し，その存在に確信をもつようになる過程があるだろう，人と人の間で存在すると考えられている数学を数学的対象と呼ぶ，(p. 14)

と述べている。

例えば，偶数と奇数との和は，奇数であるという数学が存在し，生徒どうしの間で確信している。しかし，視覚的に見えているのは，

$$2m+(2n-1)=2(m+n)-1$$

という一つの式によるものだけである。数学の存在自体を目にすることはできない。数学的対象は，生徒どうしのやりとりを通して，互いに存在していると考えられているものである。これは，ブルーマー(1991)のいう人と人との間で存在するという対象の捉え方と整合しているといえる。

中村(2007)は，数学的対象と相互行為は，相互依存関係にあるとしている。つまり，相互行為をするときに，数学的対象が存在するだけではなく，数学的対象をもとに相互行為が進められることを示している。このことは，ブルーマー(1991)が対象を人が他者と相互作用することによって形成され，維持され，弱められ，また変容されていくものと捉えていることと整合しているといえる。

熊谷(2000)は，数学的対象を何らかの表記法を用いて表現することが多いとしている。中村(2005)は，数学的対象が授業の中での相互作用を通して作りだされた際に，数学的表現が使われているとしている。ブルーマー(1991) も，対象を指示，言及するあらゆるものごととしていることから，表現によって対象が現れることを示しているといえる。金本(2001)も，新しい表現の使用や既存の表現の新しい表現とともに，新しい意味が創発する

としている。

生徒がどう表現したかにより，生徒の数学的対象がどういうものなのかをみることができるといえる。また，生徒の表現により，数学的対象が明確化されるともいえる。

本節を通して，ブルーマー(1991)のいう対象は，中村(2007)のいう数学的対象に置き換えて考えることができ，数学の授業においても，対象について論じることの意義を得た。

3.3. 生徒が証明を行うことを解釈するための視点

中村(2007)は，

> 数学的対象はいつも必ずしも数学的には正しいとは限らない，(p.15)

と述べている。そして，中村(2007)は，数学的対象の存在が認められるためには，自分の意図が公的なものにならなければならないとしている。ブルーマー(1991)も対象の変容によって，対象は，集団の中での共通の対象となりうることを示している。

ラカトシュ理論における証明は，推測し，その推測の説明が批判されていく中で推測を改良していく営みである。改良したということは，既にある規準に従って決まるのではなく，学級という集団の中で認められて，つまり，反駁されない状況になったとき，改良したといえる。したがって，数学的対象は，学級の中で正しいと捉えられなければならない。

証明をする過程において，数学的対象が明確化されるだけでは不十分で，その数学的対象が集団の中で共通の数学的対象となってはじめて,証明を終えることができるといえる。

生徒が相互作用の立場から社会的活動として証明を行うことを解釈するためには，集団の中で数学的対象が共通のものとして捉えられる必要がある。

4. おわりに

１節では，中学校における証明の問題点をあげ，本研究における目的を述べた。２節では，ラカトシュ理論に立脚し，「推測し，その推測の説明が批判されていく中で推測を改良していく営みを中学校における証明活動」と捉え，筆者の証明観を述べた。また，ラカトシュ理論を基にした先行研究を概観した。３節では，ラカトシュ理論に基づき，生徒が相互作用の立場から社会的活動として証明を行うことを解釈するための視点を得た。その視点とは，数学的対象が集団の中で共通のものとして捉えられることである。

数学的対象は，生徒どうしの間で存在し，生徒どうしの間で,公的なものになっていく。

したがって，その証明は，他者との同意が正当化の対象となる。その証明は，演繹的に導かれたものには固執しない。帰納的，類推的に導き出されたものも，他者との合意があれば,正当化されたとみなす｡それによって,一般性が損なわれるという危険性も伴うが,生徒の批判する姿勢や，不都合が生まれる課題を与えることで，より確実性のある同意が得られると考えている。

今後の課題として，

・多くの相互作用が生まれるような教材の研究を行うこと
・筆者の証明観の中での教授実験において，生徒が，相互作用という社会的活動として証明を行うことを解釈すること
・筆者の証明観での子どもの活動の意義についての示唆を得ること

が残されている。

引用，参考文献

Balacheff,N.(1990).Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4),258-272.

ブルーマー.(1991).シンボリック相互作用論(pp.1-88).後藤将之訳.勁草書房.

デービス&ヘルシュ.(1981).数学的経験.柴垣

和三雄,清水邦夫,田中裕訳.森北出版株式会社.
江森英世.(1995).Oral expression の指導のポイント.CRECER 第6巻図形と論証(pp.274-279).ニチブン.
金本良通.(2001).ある算数科の授業における意味とシンボルとコミュニティとの相互的構成.数学教育学論究,*77*,3-20.
小関熙純他.(1987).図形の論証指導.明治図書.
熊谷光一.(2000).授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象.上越教育大学教室,*15*,1-8.
國本景亀.(1992).証明概念の多様性.第 27 回数学教育論文発表会論文集, 457-462.
國本景亀.(1998).準経験主義の哲学に基づく証明指導の研究.日本教科教育学会誌,*21*(2),35-43.
黒田稔.(1927).数学教授ノ新思潮.培風館.
ラカトシュ.(1976).数学的発見の論理―証明と論駁―.(佐々木力訳).共立出版.
ランパート.(1990).真正の学びを創造する.佐伯胖, 藤田英典, 佐藤学編,学びへの誘い(pp.189-240).東京大学出版会.
宮崎樹夫.(1992).推測したことに一般性があることを示すために行われる活動:生徒はどのようにして生成的な例による説明を行うか.数学教育学論究,*57*,3-17.
宮崎樹夫.(1997).学校数学の証明指導における,ことがらの真理観に関する研究.筑波数学教育研究,*16*,49-58.
文部科学省.(1999).中学校学習指導要領解説－数学－.大阪書籍.
村上一三.(1997).図形教育における形式的証明のあり方についての一考察.第 30 回数学教育論文発表会論文集,138-143.
中村光一.(2005).授業における数学的対象に関する考察:数学的価値観の観点.第 38 回数学教育論文発表会論文集,463-468.
中村光一.(2007).数学授業の相互行為における数学的対象と価値.日本数学教育学会誌,*89*(1),13-22.
関口靖広.(1992).数学の教室における証明と論駁の探究.数学教育学論究,*58*,31-35.
相馬一彦.(1995).「予想」を取り入れた数学授業の改善.明治図書.