上越数学教育研究, 第 23 号, 上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.53-64.

比例的推論の発達を促す統合的な授業の効果に関する研究
ー ６年「倍と割合」「比」の実践を通して ー

佐藤　満
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

日野(2002)は，比例的推論を「一方がｍ倍になれば他方もｍ倍になるといったように，伴って変わる２量の間の比例関係を前提として未知の量を求めたり量を比較したりすること及びそれに準じる考え方」(p. 20)と定義している。このように比例的推論を捉えると，小学校算数では，比例的推論に関わる学習が多く見られ，特に高学年では，５年「小数のかけ算」「小数のわり算」「割合」，６年「単位量当たりの大きさ」「分数のかけ算」「分数のわり算」など，多くの単元で比例的推論が用いられている。そして，ここで示した，乗除や割合に関する学習は，国立教育政策研究所教育課程研究センター(2001)や新潟県教育委員会(2005) などの調査結果からもわかるように，一般的に難しい学習とされている。

これらの困難さを解消するため, 佐藤(2007)は，直(1990, 1991)と金井(2002)の史的考察から，主に割合に関する学習で，系統性が意識されにくくなっていることを指摘した。そして，杉山(1990)や彦阪・村田(1988)など，多くの研究者から示めされている統合的な授業を導入することで，乗除や割合に関する学習の難しさを解消できるのではないかという可能性を示している。

そこで，本稿では，統合的な授業が，子どもの比例的推論の発達にどのように関わっているかを検証することを目的とする。

２．実験授業の構想

本研究の実験授業は，６年「倍と割合」「比」の単元で統合的な授業を行うことを目指す。そこで，まず，比例的推論に関わる学習を統合するための基本的なアイデアを見てみる。

2.1. 乗法構造の意識化を図る

比例的推論に関する学習は，乗法構造が内在している。この乗法構造のもととなる乗除の学習では，乗除を累加の考えで捉える子がいることが報告されている(高橋, 2000)。

このことに関して高橋(2002)は，乗法の意味を割合の概念を中心とした抽象的な意味づけへと拡張していく必要があると述べている。割合として意味づける価値は，「拡張の考え」を指導する場となること，及び，整数・小数・分数の乗法を統一的に見ることができると述べている。そこで，乗除に関する学習を「基準量×割合」で表した中村(1997)や馬場(2005)の研究をもとに，数直線を表象とした授業を構想する。その際，馬場(2005)が用いたように，数直線の中に矢印を使った乗法関係をかき加える（図１)。この矢印をかき加えることにより，子どもは，問題に内在する乗法構造を意識しやすくなると考えられる。

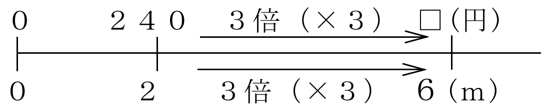

図１　馬場が用いた数直線

2.2. 倍概念の発達を図る

乗法構造の意識化を図るためには，数直線の活用に加え，これまで乗法構造が内在した学習で培われてきた倍概念を豊かにしていくことが大切であると考える。

このことに関して河野(2005)は，子どもが数直線を繰り返して使用することによって，数直線の理解と乗除に関する概念理解が深まると述べている。そこで，数直線を積極的に使用する場として，同値の比をつくる学習で，同じ数直線上に同値の比を複数表す活動を取り入れる。一般的に「比」の学習では数直線は使われないが，倍概念を豊かにすることと，割合と比の系統性を意識させることを意図して，金児(1980)の用いた線分構造図を参考にし，比の学習に数直線を導入する(図２)。

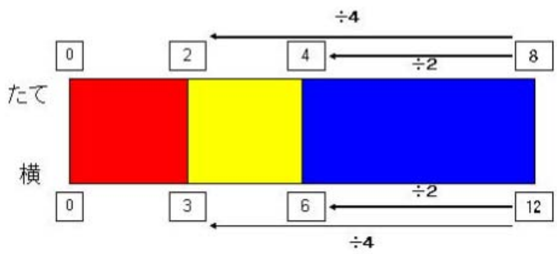

図２　比の学習で扱った数直線

2.3. 割合を中核として統合的な授業を行う

前節では，比例的推論に関する学習は多岐に渡っていることを示したが，これらの学習の同類性が意識されるには，中核となる学習が必要であると考える。そこで，2.1 で述べたように，乗除に関する学習を割合と見ることが重要であることと，子どもにとって割合の理解が難しいことから，実験授業では，「割合」を中核とした授業を構想することにした。割合に関しては，当該校で使われている教科書（学校図書）を見ると，６年の後半に「倍と割合」という単元が設定されていたので，この単元を中核としながら統合的な授業を行うことにする。このことは，小学校で難しいとされる割合指導の改善だけではなく，小学校６年間の算数で指導されてきた比例的推論に関わる学習の系統性を子どもに示す面から見ても，大きな意義があることだと考える。

割合の理解を進展させることに関して，吉田・河野(2003)は，インフォーマルな割合の知識をもとにして，５年「割合」の実践を行った。その際，量概念を強調するために，割合モデル(図３)を用いた。この研究をもとに山口(2007)は，割合メーター(図４)を用いて５年「割合」の実践を行った。この研究の知見として，割合の理解には，イメージが大きく関係していることが明らかになった。そこで，実験授業では，数直線の中に割合のイメージを反映させた授業を試みることにする。具体的には，「倍と割合」の最初の２時間で，数直線指導（ストラテジー指導）を行い，その中に山口(2007)が行ったメスシリンダーの活動を取り入れ，実験授業の表象とする数直線に，割合のイメージを反映させることにする。

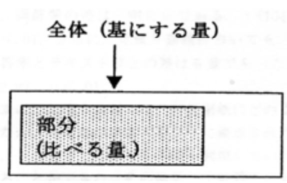

図３　割合モデル

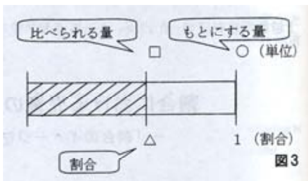

図４　割合メータ

この活動の概要を示す。メスシリンダーの半分の位置に輪ゴムをつけ，教師がメスシリンダーに色水を少しずつ入れる（図５）。そして，８０％，１００％，１２０％の割合のところで，子どもに「ストップ」と言わせる。その後，プレゼンテーションソフトのアニメーション機能を使い，太さの違うメスシリンダーにオレンジジュースとコーヒーが入っていく様子を動的に示し，この容器を横にしたものが割合の数直線になることを示す（図６）。

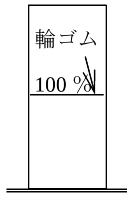

図５

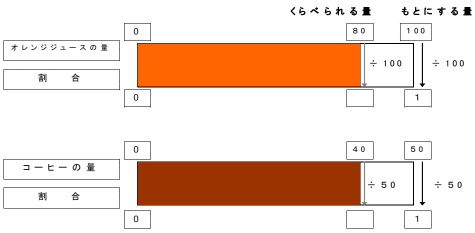

図６　ストラテジー指導で扱った数直線

その上で，実験授業の中に，統合的な学習を２時間導入する。１時間目は，統合的な学習Ⅰとして「倍と割合」の学習の単元末で行い，２時間目は，統合的な学習Ⅱとして「比」の学習の単元末で行うことにする。

統合的な学習Ⅰでは，２年「かけ算」，３年「わり算」，５年「割合とグラフ」，６年「単位量当たりの大きさ（速さ）」の学習で，乗法関係が見出しやすい整数値を用いた問題を教科書から抽出して扱う。

統合的な学習Ⅱでは，教科書の「比」の単元末にある，「復習」の問題から，６年「単位量当たりの大きさ」「単位量当たりの大きさ（速さ）」「分数のかけ算とわり算」「倍と割合」「比」の学習で，乗法関係が見出しにくい小数や分数の数値を扱った問題を抽出して扱う。

そして，この統合的な学習Ⅰ・Ⅱでは，問題文を読んだ後，どの学年のどの単元で学習したかを子どもに問い，この時間で扱っている問題は，既習の様々な単元のものであることを子どもに意識付ける。その後，式と数直線をかく活動を取り入れ，この時間で扱う４つの問題が，割合と同類の問題であることを意識できるようにする。但し，この時間に扱う問題は，統合的な学習Ⅰでは，整数しか扱わないことから混乱は少ないことが予想される。一方，統合的な学習Ⅱでは，小数や分数を扱った問題であることから子どもの混乱が予想される。しかし，ここで扱う数値を簡単にしたり，割合の公式に当てはめて考えさせたりするのでは，効果が少ないと考える。子どもの混乱に対しては，数直線の補助指導を行いながら解消を図り，あくまでも割合のイメージを反映させた数直線を表象とし，学習を進めていくことにする。

３．データの収集方法

本研究のデータは，事前・事後の筆記調査の記述と，平成 18 年 11 月 14 日から 12 月 15 日まで行った「倍と割合」「比」の全単元１５時間をビデオカメラ及び，ＩＣレコーダーにより記録したものである。ここでは，比例的推論の変容を示すため，２名の抽出児（里奈，正矢：いずれも仮名）を選出した。

里奈は，学力的にはテストで常に平均点以上をとっている。担任によれば，まじめな学習態度で，教師の指示に対して誠実に活動する子である。また，教師の発話に対しては，挙手をして進んで発言することは少ないが，指名すれば発言することができる子である。

正矢は，学力的にはテストで平均点以下のことが多い。担任によれば，授業中は，わからない問題に対しても，何とか解決しようと粘り強く活動できる子である。また，教師の発話に対しては，挙手をして進んで発言することが多い子である。

授業全体を記録するために，ビデオカメラを１台，教室の前に設置した。教師の動きや板書を記録するために，ビデオカメラを１台，教室の後ろに設置した。抽出児２名の学習過程を記録するために，動きや表情を捉えるビデオカメラを２人の座席の前に１台，手元やプリントを捉えるビデオカメラを１台ずつ，計３台を設置した。さらに，２人の発話を明確に記録するため，２人の机の間にＩＣレコーダー１台を設置した。これらのデータをもとに，授業の詳細な発話記録を作成した。

なお，本稿では紙幅の関係上，正矢の学習過程についてのみ分析・考察を行う。

４．実際の授業と考察

4.1. 事前調査

事前調査では，２２題中７題正解した。

正矢が見出した式は，全て問題文に出てくる数値の順でかかれていた。また，割合の問題でひき算の式がかかれていた(図７)。

問題$\boxed{4}$：１両の定員が１２０人の電車があります。１４４人いる電車のこみぐあいを割合で求めましょう。

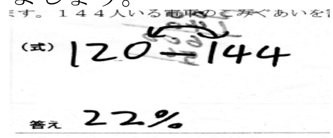

図７　割合の問題の式

このことから，正矢は，比例的推論に関する学習の理解は不十分であり，乗法構造の意識は弱いと捉えられる。

4.2. 倍と割合

4.2.1 倍と割合の１，２時間目

倍と割合の１，２時間目では，数直線のストラテジー指導を行った。

１時間目では，メスシリンダーにジュースとコーヒーを入れる活動と２本の数直線を関連づけた指導を行った。正矢は，メスシリンダーの活動をイメージし，太さの違う２本の数直線をかいた（図８）。

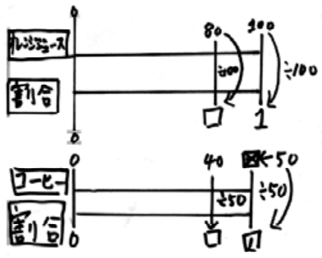

図８　１時間目の数直線

２時間目では，整数を用いた問題を２問，小数を用いた問題を２問扱った。

問題$\boxed{2}$：ペンキ屋さんが，へいのペンキぬりをしています。へいの面積は２４㎡です。割合にすると今までに０．５ぬりました。何㎡ぬったのでしょうか。

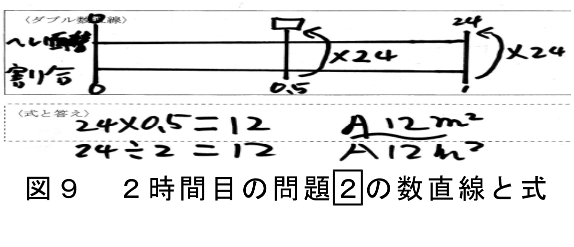

図９　２時間目の問題$\boxed{2}$の数直線と式

問題$\boxed{2}$では，図９のように数直線の２つの数値間で乗法関係を表す縦の矢印を使ったり，０.５を１の半分と見たりしながら考え，正しい答えを見出した。その一方で，ここでかかれた式は，「２４×０.５」とあるように，数直線の矢印の方向と式の整合性は見られなかった。これは，事前調査で見られた，問題文に出てくる数値の順で式を確定する正矢の立式の誤った認識が影響していると考えられる。

問題$\boxed{3}$：まさおさんの家では，畑の一部を花畑にしています。花畑の面積は６０㎡で割合にすると畑全体の面積の０．２に当たります。畑全体の面積は何㎡でしょうか。

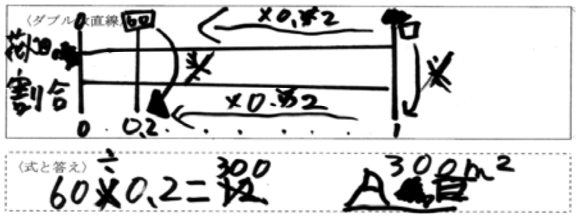

図10　２時間目の問題$\boxed{3}$の数直線と式

問題$\boxed{3}$では，式を「６０×０.２」としたが，友達のプリントを見て「÷」を「×」にかき換えた。また，数直線を図10のように縦の矢印を使って考えようとするが，数直線上にある「６０と０.２」の乗法関係が見出せず，最終的には横の矢印を使用した。そして，「１と０.２」の関係を「←×０.５」とするなど，正しい乗法関係を見出すことができなかった。

問題$\boxed{4}$では，図７と同じ問題を扱ったが，正矢は，式も数直線も自力で見出すことができなかった。

倍と割合の１，２時間目では，正矢は，メスシリンダーの活動によって，割合のイメージを数直線に反映させることができた。

乗法構造の意識化に関しては，小数倍の捉えが弱いだけでなく，整数を扱った問題の解決場面で，数直線や式の確定を友達の考えに依拠するなど，十分な理解状況ではなかった。

このことから，ストラテジー指導時の正矢

は，割合のイメージの獲得は図られたが，乗法構造の意識化は，依然として弱いと捉えられる。

4.2.2 倍と割合の３から５時間目

倍と割合の３時間目では，整数を用いた問題を２問扱った。正矢は，２問中１問で数直線の乗法関係を自力で見出すことができた。

倍と割合の４時間目では，平均という概念と整数を用いた問題を２問扱った。

問題1：平均は１８ｍです。ゆき子さんの記録は２４ｍです。２４ｍは平均の何倍でしょうか。分数で表しましょう。

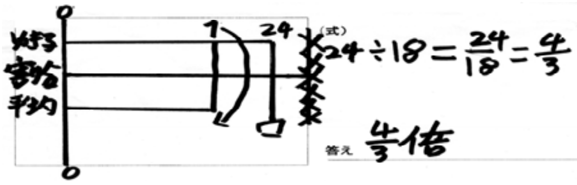

図11　４時間目の問題1の数直線と式

問題1では，「わかんない」「難しい」とつぶやきながら，教科書を見て式を確定させた。その後，教科書を見ながら図11のような３本の数直線をかいた。しかし，正矢は，平均の意味が捉えられなかったことから，数直線上に「１８」が確定できずに混乱した。そのため，矢印までは見出すことができたが，乗法関係を完全に見出すことはできなかった。

倍と割合の５時間目では，平均という概念と分数を用いた問題を２問扱った。

問題1：たけしさんたちがソフトボール投げをしたら，平均で３０ｍでした。たけしさんの記録は平均の7/5倍に当たります。たけしさんは何m投げたでしょうか。

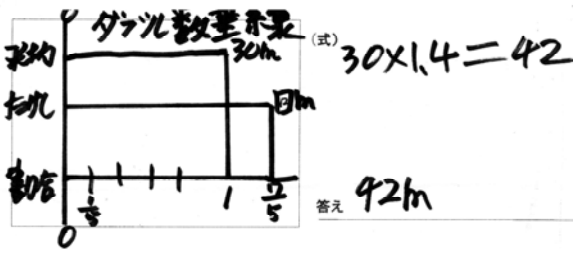

図12　５時間目の問題1の数直線と式

問題1では，正矢は，後ろの子のプリントを見て式を確定させた。その後，教科書を見ながら図12のような３本の数直線をかいた。ここでかかれた数直線は，乗法関係を表す矢印はかかれていなかった。

問題2：先生は，ソフトボール投げで，５６ｍ投げました。これは先生たちの平均の7/6倍に当たります。このときの平均は，何ｍだったでしょうか。

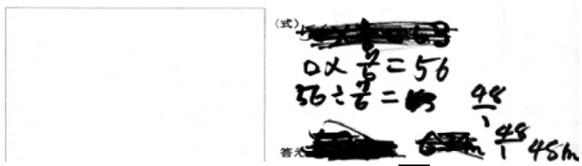

図13　５時間目の問題2の式

問題2では，「５６×7/6」という式を自力で見出した。その後，後ろの子のプリントを見て，この式をペンで消し，「□×7/6」とかき換えた（図 13）。ここで，机間指導を行っていた教師が，式の意味を説明するため，２本の数直線で表すよう促した。しかし，数直線をかこうと考える姿は見られたものの，最終的には，式の説明を数直線で表すことはできなかった。

倍と割合の４，５時間目では，平均の意味が捉えられずに混乱した。このことから，５時間目では，問題1の解決で，教科書を見ながら３本の数直線を手がかりにしようとしたが，数直線上の数値や乗法関係を見出すことができなかった。さらに，問題2では，混乱を示し，数直線をかくこともできなかった。

乗法構造の意識化に関しては，整数倍の乗法関係はある程度見出せるようになってきたが，小数・分数倍の捉えが弱く，乗法関係はほとんど見出すことができなかった。そのようなこともあり，式は自力で見出せず，友達から教えてもらうことが多かった。

4.2.3 倍と割合の６時間目（統合的な学習Ⅰ）

倍と割合の６時間目（統合的な学習Ⅰ）では，既習の学習内容で，整数を用いた問題を

４問扱った。

問題1：おはじきを一人に７個ずつ配ります。８人に配るには，全部で何個いるでしょうか。

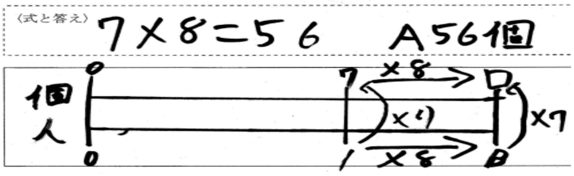

図14　６時間目の問題1の数直線と式

問題1では，短時間で式を確定させ，その後，時間をかけて図14の数直線をかいた。最初，正矢は，数直線上の「１と７」の関係から,「↑×７」という縦の乗法関係を見出した。しかし，式との整合性がとれないことから，数直線上に「→×８」という横の乗法関係を新たに見出してかき加えた。

問題2：５つのおさらに，４０個のいちごを同じ数ずつのせます。１さらに，何個ずついちごをのせたらよいでしょうか。
問題3：１２分間に８４ｍ走るかめの分速を求めましょう。

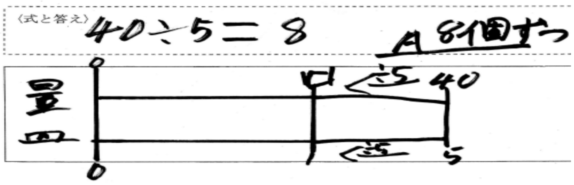

図15　６時間目の問題2の数直線と式

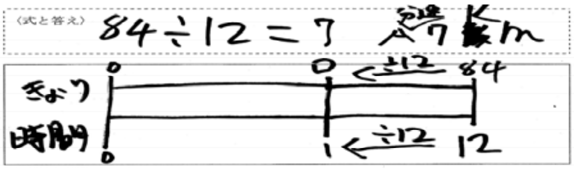

図16　６時間目の問題3の数直線と式

問題2，3では，短時間で式を確定させ，その後，正しい乗法関係を見出しながら数直線をかいた（図15，図16）。

問題4：のぶおさんのクラス４０人のうち，２６人は本が好きだそうです。本の好きな人の割合を求めましょう。

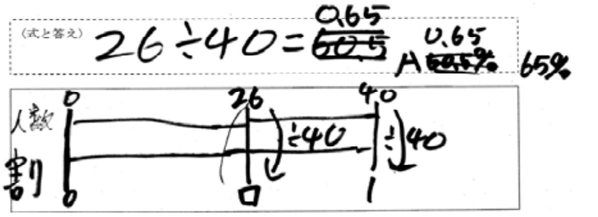

図17　６時間目の問題4の数直線と式

問題4では，問題文から式を確定することができず，最初に数直線をかいた。そして，数直線の「↓÷４０」という乗法関係がかかれていない状態で,「２６÷４０」という式をかいた。その後，乗法関係をかき，数直線を完成させた(図17)。

倍と割合の６時間目（統合的な学習Ｉ）では，問題1の式は９秒でかかれたのに対して，数直線は完成まで５分５７秒要した。このことから，これまで数直線を表象として学習してきた「倍と割合」と既習の「かけ算」を乗法構造が内在する同類の問題として見ていないことがわかる。しかし，問題2は２分３５秒，3は３７秒と,「わり算」「単位量当たりの大きさ」の学習を扱う中で，スムーズに数直線がかけるようになった。そして，問題4では，数直線を先にかくことにより，正しい式を見出すことができた。正矢は，これまでの割合の学習では，自力で式が見出せなかったり，見出せても誤った乗法関係で表したりすることが多かった。しかし，数直線を使いながら既習の様々な問題に取り組む中で，正しい乗法関係と式を見出すなど，割合の理解を進展させ，さらに，数直線をスムーズにかけるようになっていったことから，比例的推論に関する様々な学習を同類のものとして見始めるようになったと考えられる。

乗法構造の意識化に関しては，整数倍しか扱われなかったこともあり，数直線上の数値・乗法関係と式は自力で見出すことができた。

このようなことから，統合的な学習Ｉの時間は，様々な学習の問題で乗法構造を意識し

たことにより，既習の学習が全て同じ数直線で表すことができる同類の問題であるという意識化が図られた。

4.3. 比

4.3.1 比の２から５時間目

比の２，３時間目では，同値の比の意味を学習した後，「２：３」「４：６」「８：１２」を同じ数直線上に表す活動を取り入れた。

授業では，２時間目は左方向，３時間目は右方向と，一方向の乗法関係しか扱わなかったが，正矢は，発展的に考え，矢印を左右に自由自在に操ったり（図18），教師が指示していない「３２：４８」を数直線上に表したりするなど（図19），倍概念が発達する姿が見られた。

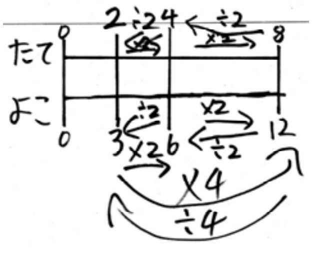

図18　２時間目の数直線

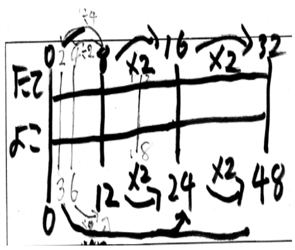

図19　３時間目の数直線

比の４，５時間目では，応用的な文章問題を２問ずつ扱った。比の５時間目では，棒のかげの長さと木の高さの問題を扱った。

問題$\boxed{1}$：高さが２ｍの棒のかげの長さは，３ｍです。このとき，かげの長さが１２ｍの木の高さは何ｍでしょうか。
問題$\boxed{2}$：高さが２ｍの棒のかげの長さは，３ｍです。このとき，かげの長さが１５ｍの木の高さは何ｍでしょうか。

問題$\boxed{1}$では，数直線を使わず，図を使って考えた。この図には，「←×４」という乗法関係がかかれていた（図20）。

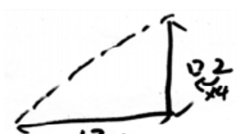
図20 問題$\boxed{1}$の図

問題$\boxed{2}$では，正矢は，最初に数直線をかき始め，「２：３」「８：１２」「１０：１５」を同じ数直線上に表した。その後，この３つの関係を矢印を使った式で表した（図21）。

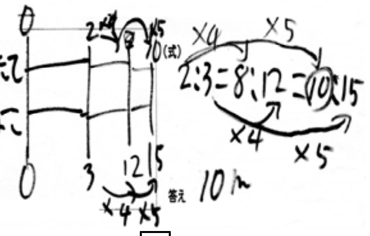

図21　問題$\boxed{2}$の数直線と式

比の２，３時間目では，同じ数直線上に同値の比を複数表す活動により，正矢は乗法関係を表す矢印を左右に自由自在に操ることができた。比の４，５時間目では，応用的な文章問題を解く過程で，数直線や図を使って考える姿が見られた。

乗法構造の意識化に関しては，教師から指示された数だけでなく，自ら「３２：４８」の比を数直線に表すなど，積極的に乗法関係を見出す姿が見られた。また，５時間目では，数直線上ではなく，図に乗法関係をかき加えたり，３つの比の関係を数直線と式に対応させてかいたりする姿が見られた。

このことから，比の２から５時間目では，倍概念の発達が図られると共に，乗法構造が強く意識され，さらに数直線・図と式との関係が強固につながったと捉えられる。

4.3.2 比の８時間目（統合的な学習Ⅱ）

比の８時間目（統合的な学習Ⅱ）では，既習の学習内容で小数や分数を用いた問題を４問扱った。

問題$\boxed{1}$：５ｍで１４００円のゴムホースがあります。(1)１ｍあたりのねだんは何円でしょうか。(2)７ｍでは何円になるでしょうか。

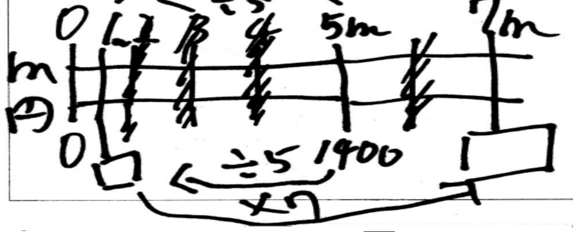

図22　８時間目の問題$\boxed{1}$の数直線

問題1では，式は自力で見出すことができた。その後，図22のような数直線をかいた。正矢は，左端縦線の上下の０をかいた後，上下の横線と縦線を引き，その縦線の上に５m，下に１４００をかいた。その後，「４，３，２，１」と４本の縦線を引き，最後にかかれた縦線の上に１，下に□をかいた。次に，上に５m，下に１４００とかかれた縦線から横線を延長させ，５の右に２本の縦線を引き，最後にかいた縦線の上に７，下に□をかいた。その後，乗法関係「←÷５」をかき，さらに，５から７に矢印をかこうと考えるが乗法関係が見出せなかった。そこで，１から７に矢印をかいた後，「×７」とかき加え，乗法関係を数直線上に表した。

> 問題2：米１ℓの重さを測ったら，５/６ kg ありました。(1)この米４/５ℓの重さは，何kg でしょうか。(2)この米１４/５ℓの重さは，何kg でしょうか。

問題2では，式は見出すことができなかった。数直線は，左端縦線の上下の０をかいた後，上下の横線と縦線を引き，その縦線の下に１，上に５/６を自力でかき，その他のものは板書を見てかいた(図23)。

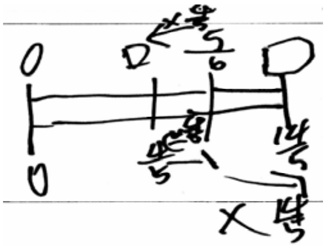

図23　問題2の数直線

> 問題3：長さが 12 mのテープがあります。このテープを４/５mずつ切ります。何本のテープが取れるでしょうか。

問題3では，式は見出すことができなかった。数直線は，左端縦線の上下の０をかいた後，上下の横線と縦線を引いた。その他のものは板書を見てかいた(図24)。

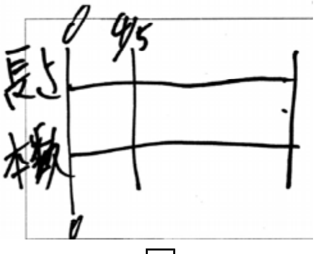

図24 問題3の数直線

> 問題4：３人で，走りはばとびををしました。ひとしさんは 320cm，みゆきさんは 240cm とびました。じゅんいちさんは，ひとしさんの９/８倍とびました。(1)ひとしさんは，みゆきさんの何倍とんだでしょうか。(2)じゅんいちさんは何 cm とんだでしょうか。

問題4では，式は見出すことができなかった。数直線は，左端縦線の上下の０をかいた後，上下の横線と縦線を引き，その縦線の下に１を自力でかき，その他のものは板書を見てかいた(図25)。

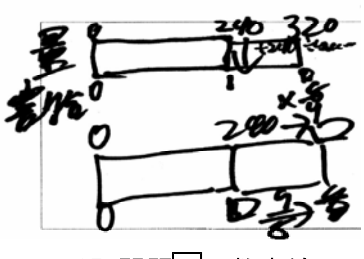

図25 問題4の数直線

このように，問題2から4は，分数倍が扱われたこともあり，数直線上の数値や乗法関係と式は，自力で見出せず，板書を見て写した。

比の８時間目（統合的な学習Ⅱ）では，問題1の式と数直線は自力で見出せたが，問題2から4の数直線と式は，板書を写す部分が多かった。このことから，統合的な学習により，整数倍はある程度の理解が得られるようになったが，分数倍の理解は依然として進展しなかったと捉えられる。

乗法構造の意識化に関しては，問題1(1)で見出した１当たり量を用いず，比例的推論を用いて考えようとする姿は見られたが，「５と７」の乗法関係が見出せず，最終的には「１と７」の乗法関係を数直線上に表した。

このようなことから，統合的な学習Ⅱの時間は，分数倍の理解の難しさが依然として大きな障害となり，混乱したと捉えられる。

4.4. 事後調査

事後調査は，テスト場面と説明場面の２段階で調査を行った。テスト場面ではテスト用紙を配付し，問題を解かせた。説明場面では

テスト場面と同様の新しいテスト用紙を配付し，テスト場面で式しかかかなかった問題に限り，その式の説明を記述するよう指示した。

事後調査では，１４題出題し，正矢は７題正解した。調査では，乗除に関する問題を３問扱い，小数や分数を用いた問題とした。

問題$\boxed{1}$：長さ３.５ｍで，重さ４.２ｋｇの水道管のパイプがあります。このパイプ１ｍの重さは，何ｋｇですか。

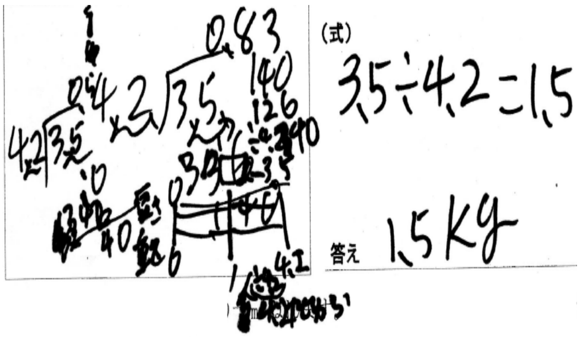

図26 テスト場面の記述

問題$\boxed{1}$のテスト場面では，短時間で誤った式と数直線をかいた。ここでかかれた数直線は，長さである１と重さである４.２が同じ数直線上に混在した誤った記述になっていた（図 26）。その一方で，「１と４.２」の関係では，「←÷４.２」という正しい乗法関係がかかれていた。

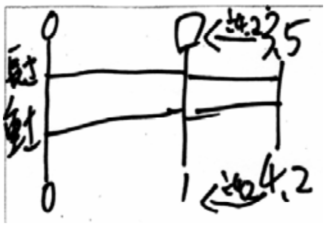

図27 説明場面の記述

テスト終了後の説明場面でも同じ構造の数直線と式を新たにかいた（図 27）。

問題$\boxed{2}$：青いペンキは，１dℓ当たり４/５㎡ぬれます。このペンキ１/３dℓでは，何㎡ぬれるでしょうか。

問題$\boxed{2}$のテスト場面では，短時間で誤った式をかき，数直線はかかなかった（図 28）。

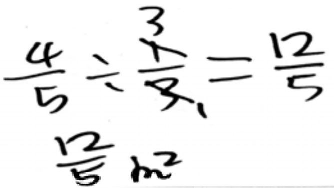

図28　テスト場面の式

テスト終了後の説明場面では，正矢は，数直線をかいた（図 29）。数直線上に４つの数値をかいた後，正しい乗法関係「→÷１/３」を上下にかき，式を考えた。その後，逆方向の乗法関係「←×１/３」を数直線に新たにかき加えた。そして，正矢は式を考え，プリントにゆっくりと「４/５÷」とかいた。その後，しばらく考え，「÷」を「×」とかき直そうとするが１回ペンを置くに留まり（÷の右斜め上の点），最終的には，テスト場面と同じ式，「４/５÷１/３」とした。

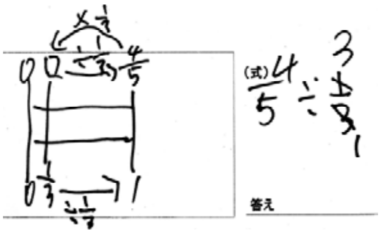

図29　説明場面の記述

問題$\boxed{3}$：水そうに水を入れています。２/３分間に４/５ ℓ の水が入ります。同じ割合で水を入れていくと，１分間では何 ℓ の水が入りますか。

問題$\boxed{3}$のテスト場面では，短時間で誤った式をかき，数直線などの記述はなかった（図 30）。

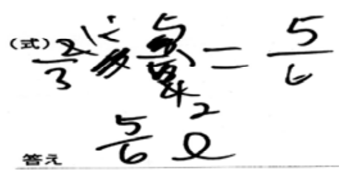

図30　テスト場面の式

テスト終了後の説明場面では，数直線をかいた（図 31）。正矢は，４つの数値をかいた後，乗法関係「→÷」とかき，その後「÷」をペンで消して「×２/３」とかき換え，次に，上「→÷２/３」をかいた。その後，式を考えるが最終的には見出すことができず，数直線全体をペンで消した。

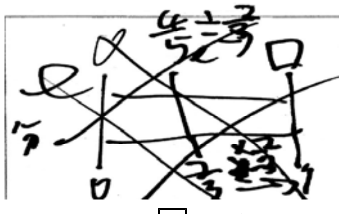

図31　問題$\boxed{3}$の説明場面

正矢の事後調査で実施された乗除に関する３問のテスト場面では，感覚的に式を見出す

姿が見られた。その一方で，説明場面では，乗除に関する問題で，数直線を使いながら乗法構造を意識する姿が見られた。ここでかかれた数直線は，理解が難しいとされている小数や分数を扱った問題であったにもかかわらず，正矢は全ての問題で，２量の数値間の関係を正しく捉えた乗法関係を見出すことができた。事後調査の前時に行われた統合的な学習Ⅱでは，分数の問題で混乱を示し，自力で数直線や式が見出せなかったことから考えると，正矢の乗法構造の意識化と理解は進展が図られている。この背景については，次節で示すことにする。

５．まとめ

5.1. 統合的な授業と比例的推論の関係

「倍と割合」の授業では，正矢は整数倍の理解は少しずつ進展する姿が見られた。その一方で，小数・分数倍については，小数や分数自体の理解が不十分なことから，数直線上の数値や乗法関係をうまく見出せないなど，あまり進展が見られなかった。

そのような状況の中で，倍と割合の６時間目に統合的な学習Ⅰの授業が行われた。正矢は，「かけ算」の問題では，短時間で正しい式を見出すことができたが，数直線で表す場面では，多くの時間を要した。このことから，「割合」と「かけ算」の学習が同類の問題として捉えられていないことがわかった。その後，「わり算」「単位量当たりの大きさ」の問題で数直線を考える場面では，短時間で数直線で表すことができるようになっていった。このことは，既習の学習と「割合」の学習を同類の問題と見始めることができるようになった状況であると捉えることができる。そして，「割合」の問題では，問題文から式が見出せなかったことから，数直線を先にかいた。その後，この数直線を拠り所としながら，正しい式を見出した。さらにここで見出された式では，正矢の特徴でもあった問題文に出てくる順に式を確定する誤った認識が解消されていた。

「比」の授業では，数直線を使って同値の比を複数つくる活動や応用的な問題を解く活動により，倍概念の発達と，数直線と式のつながりが強固となる姿が見られた。

そのような状況の中で，比の８時間目に統合的な学習Ⅱの授業が行われた。正矢は，小数倍の「単位量当たりの大きさ」の問題では，「５と７」の関係が捉えられず，帰一法によって，正しい式を見出した。一方，「分数のかけ算」「分数のわり算」「割合」の問題で式や数直線を考える場面では，数直線の乗法関係を自力で見出すことができないだけでなく，４問中３問で数直線がかけない姿が確認されるなど，乗法構造を意識する以前に混乱する姿が見られた。この姿は，分数倍の理解が不十分なことから見られた姿だと捉えられる。しかし，事後調査では，4.4 で述べたように，乗除に関する３つの問題で大きな特徴が見られた。テスト場面では，感覚的に問題を解く一方で，説明場面では，理解の進展が見られた。「小数のかけ算」では，これまで正しい数直線と式を見出すことはできなかったが，この時間では，数直線上の２つの数値の関係を表す小数倍の乗法関係をうまく見出すことができた。さらに，これまで，ほとんど理解の進展が見られなかった，「分数のかけ算」「分数のわり算」の問題でも，式までは見出せなかったが，数直線上に分数倍の乗法をうまく見出すことができた。この背景として，統合的な学習Ⅰ・Ⅱで，様々な単元の学習を取り入れ，さらに，整数・小数・分数という３つの数値を扱ったことが大きな影響を与えたと考えられる。実際，正矢は混乱する場面が見られたものの，問題文から式を見出すのではなく，数直線に一度置き換えて問題を解釈し

たことにより，乗法構造を意識しながら問題を捉えていくことができたと考えられる。また，なかなか捉えきれなかった小数・分数倍も，事後調査では，正しい乗法関係を見出すにまで至った。このことは，数直線を活用したことによって見出された，１を基準とする見方が影響していると考えられるが，このことについては，次項で述べることにする。

以上より，統合的な授業を導入することにより，比例的推論の発達が促されることが明らかになった。

5.2. 数直線の活用と比例的推論の関係

正矢は，事後調査では，乗除に関する問題で比例的推論の発達する姿が見られた。その背景として，5.1 で述べたように，数直線の存在が大きく影響していると考えられる。

統合的な学習Ｉでは，整数倍の理解が進展する姿が見られた。ここでかかれた数直線上の数値のかき順は，４問中２問で１を基準としたかき順が見られた（図 32, 図 33）。１を基準としたかき順は，２量間の乗法関係が見出しやすいこともあり，比例的推論の発達と大きく関係していると考えられる。

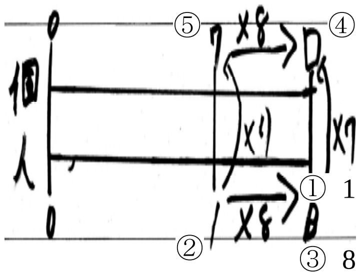

図32　かけ算の数直線

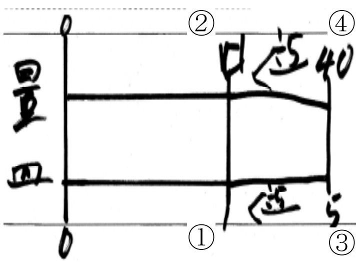

図33　わり算の数直線

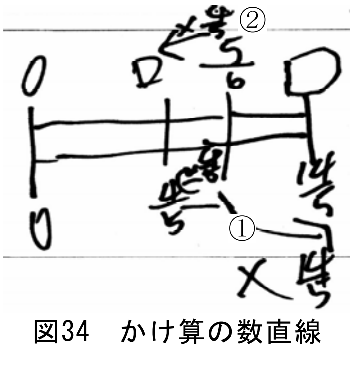

図34　かけ算の数直線

また，統合的な学習Ⅱの正矢が自力でかいた数直線上の数値の部分を見ると，４問中２問で１を最初にかく姿が見られた（図 34, 図 35）。

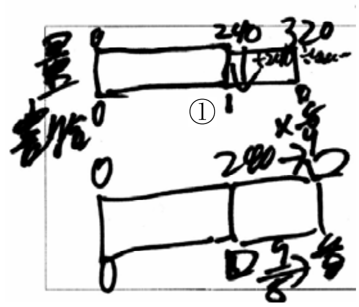

図35　割合の数直線

そして，比例的推論の発達が見られた事後調査の乗除の問題では，３問中２問で数直線のかき順が１を基準とする姿が見られた（図 36, 図 37）。これまで，分数の理解が不十分なことから，分数の乗法関係を見出す以前に，数直線をかくこともままならなかった正矢が，説明場面では，式の説明として数直線を使った。さらに，ここでかかれた数直線の乗法関係は，全て正しいものだった。

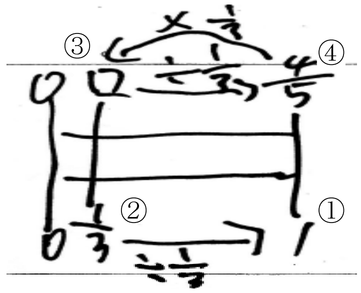

図36　わり算の数直線

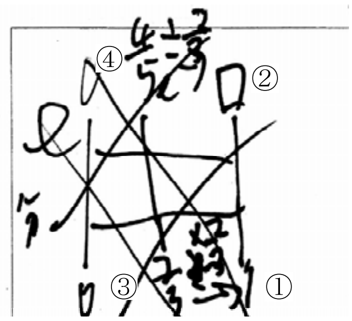

図37　かけ算の数直線

このように，小数・分数倍の理解の進展が見られると共に，正矢の数直線の扱いも変わってきた。授業前半では，数直線は手続き的にかかれ，かき順も統一性は見られなかった。しかし，乗法関係が強く意識されたり，小数・分数倍などの複雑な問題になったりすると，乗法関係が見出しやすい１を基準とする見方が意識的に使われるようになったと考えられる。このような経験を通して，小数・分数倍の問題を解決できることを実感し，事後テス

トのような姿が見られたと考えられる。

以上より，数直線を活用したことにより，１を基準とする見方が意識され，比例的推論の発達が促されることが明らかになった。

６．おわりに

本研究では，「倍と割合」「比」の学習で統合的な授業を行い，比例的推論の発達についての調査を行った。正矢は，乗法関係の意識化を図りながら学習を進め，事後調査では，小数や分数倍の正しい乗法構造を見出すことができた。しかし，その一方で，正しい乗法関係が見出せても，正しい式を見出すまでには至らなかった。このような，数直線の乗法関係と式がつながらなかったことに関しては，さらなる研究が必要であると考え，今後の課題としたい。

引用・参考文献

馬場雅史．(2005)．小数の乗法における意味の構成に関する研究．日本数学教育学会誌，*87*(4)，3-11.

彦阪栄克・村田克也．(1988)．子どもの思考を生かした乗除法の指導について．日本数学教育学会誌，*70*(8)，3-8.

日野圭子．(2002)．授業における個の認知的変容と数学的表記の役割：「単位量あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して．数学教育学論究，*79*，3-22.

金井寛文．(2002)．割合に関する児童生徒の理解の実態についての一考察．日本数学教育学会誌，*84*(8)，3-12.

金児功．(1980)．子どものつまずきを防ぐための文章題の指導．東洋館出版社.

河野麻沙美．(2005)．授業における「数学ツール」の使用と概念理解の検討：P.Cobbの「立ち戻り」の視点から．教育方法学研究，*31*，13-24.

国立教育政策研究所教育課程研究センター．(2001)．平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書小学校算数．東洋館出版社.

中村享史．(1996)．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌，*78*(10)，7-13.

中村享史．(2002)．割合指導に関する研究の動向と今度の方向．日本数学教育学会誌，*84*(8)，14-21.

直芳子．(1990)．小学校における「割合」指導の変遷(1)．日本数学教育学会誌，*72*(12)，22-27.

直芳子．(1991)．小学校における「割合」指導の変遷(2)．日本数学教育学会誌，*73*(2)，2-9.

新潟県教育委員会．(2005)．平成16年度「全県学力調査」．新潟県教育委員会.

佐藤満．(2007)．割合の授業改善に関する研究．上越数学教育研究，*22*，155-162.

杉山吉茂．(1990)．力がつく算数科教材研究法：21世紀の算数教育のためのバイブル．明治図書.

高橋久誠．(2000)．小数の乗法の授業構成に関する考察：比例の考えをもとにして．上越数学教育研究，*15*，85-94.

高橋裕樹．(2002)．小数除法における認知モデルの発達について．上越数学教育研究，*17*，117-186.

山口潤．(2007)．割合における児童の学習過程に関する研究：割合のイメージを生かした表象の効果．上越数学教育研究，*22*，101-112.

吉田甫・河野康男．(2003)．インフォーマルな知識を基にした教授介入：割合の概念の場合．科学教育研究，*27*(2)，111-119.

平成18年度版教科書．みんなと学ぶ小学校算数　５年上下　６年上下，学校図書.