上越数学教育研究, 第 23 号, 上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.65-72.

生徒の主体的な数学的活動を促す授業改善に関する研究

髙橋　靖
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

国立教育政策研究所の特定の課題に対する調査結果（2006,7,15）を見ると、問題の状況に応じてどの知識が使えるだとか、あるいはその知識が使えないのであればその問題に応じてその知識を変形させてその問題に対処していくような問題がある。そのような問題に対して弱いという結果が出ている。また、どの学年でも指示された場面で図をかいて数えることはできるが、順序よく調べてきまりを見つけるなど帰納的に考察する力が十分には身についていない生徒が少なくないという指摘もある。

一方、質問調査で「数学での授業で、帰納的に考えることについて意図的に指導することは必要だと思いますか」という質問に肯定的に解答した教師は、どの学年でも９割を超えており、教師の大多数が帰納的な考察の指導の大切さを感じていることが分かった。しかし、「このように、帰納的に考えることについて指導を行っていますか」という質問に、肯定的に解答した教師は６～７割程度に止まっており、必ずしも十分な指導が行われていない実態が伺われた。

また、筆者の教師としての経験から、

①すぐ答えを知りたがる傾向にある生徒が多い。（途中式を書かない。）
②指示が出されるまで何もしない。
③既習事項を活用する問題が解けない、解こうとしない。

というような生徒の様子が近年見られた。例えば、既習事項をそのまま当てはめる問題は解けるが、少し形が変わっただけで解けなくなるということである。比較的優秀な生徒でもその傾向が見られる。このような状況における学習者のあるべき姿について Bauersfeld,H. は次のように述べている。

『知識は、使用者が、ある状況に直面したときに、その知識を用いるのが適切であるかどうかを確認できなければ、無駄になるだろう。知識はまた、もし学習者がその必要な要素を、当面している状況に、柔軟に関連づけたり変形することができなければ、ほとんど助けにならないだろう。』（p.4）

また、中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめや新学習指導要領では算数・数学の分野でも生徒が主体的に取り組む数学的活動を生かした指導が今後も重要となることが述べられている。

こうした状況を改善する１つの試みとして、本研究では、特に、帰納的な活動を重視する授業実践を３ヶ月間にわたって行った。本論文の目的は、一連の授業の相互作用の質的分析により、主体的な数学的活動を促す具体的な手だてを得ることである。

２．主体的な数学的活動を促す授業構成

ここでは、生徒の主体的な数学的活動を

促すために、問題解決学習において、指導目的である論証へ早急に向かう筆者の従来の指導法を改め、帰納的な活動を十分に行うことを促す指導法への転換を図る授業構成の工夫を図ったことについて述べる。

2.1.帰納的な考え方について

まず前章で述べた本来の数学的な活動を授業内に取り入れる際に数学的な思考の自然な流れとして帰納的な考え方を授業の中に取り入れていくことを考える。高木貞治は「近世数学史談・数学雑談」の中で次のように述べている。

『ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。それは凡ての実質的なる学問に於いて必要な条件であらねばならない。数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修業にのみ通用するのである。自然科学に於いても一つの学説ができてしまえば、その学説に基づいて演繹をする。しかし理論は当たり前なのだから、演繹のみから新しい物は何も出て来ないのが当たり前であろう。若しも学問が演繹のみにたよるならば、その学問は小さい環の上を永遠に周期的に廻転する他はないであろう。我々は空虚なる一般論に捉われないで、帰納の一途に精進すべきであるまいか。』(p.57)

このことは数学本来の自然な思考の流れとして帰納的な考えの重要性を示しているものである。帰納的な考えから新しい発見や拡張が生まれるのである。これまでもこの重要性は示されてきた。しかし、国立教育政策研究所の調査結果のように、授業の中でそれを実現するという問題は十分ではないと考えられる。

Polya,G.は「帰納と類比」の中で、「ある一定の経験からもっとも正確な信念を引き出そうとする。」ことを**暗示的接触**と述べている。

また、「一定についての正確な信念を打ち立てるため、もっとも適切な経験を集めようと努力する。」ことを**支持的接触**と述べている。

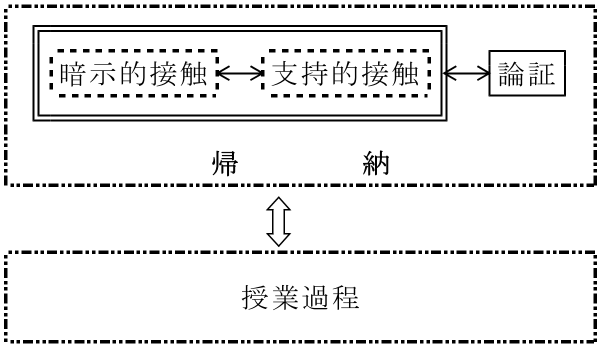


図１

図１のように帰納的な思考の流れを実際の授業に対応させて授業構成を行う。実際の授業では既に結果があって、それを論証していく形が多い。それを帰納的な思考を取り入れ、観察から発見へ、その発見の検証をしながら論証へと移行していくプロセスを授業に取り入れるのである。

この試みは既に Lampert,M.によって行われている。Lampert,M.は学校数学と学問としての数学を比較し、Polya,G.や Lakatos,I.が数学することと関連づけていた精神やモラルの資質を、公立学校の教室で生徒たちが示すような授業をつくる可能性を探究する数学授業プロジェクトの研究と開発について述べている。その中で、Lampert,M.は

『生徒たちの思考は、観察から一般化へと向かい、自分や友人の考えを反駁するための観察へと立ち戻っている。生徒たちは数学を学んでいるのだが、他方で、わかり方という目録のなかに数学を適切に位置づけて、＜数学的なわかり方＞も学んでいる。』(p.194)

と述べている。

本研究では上記のような帰納という考え方を実際の授業に取り入れる。このような

筆者が教師として今まで行ってきていなかった授業改善を行うことで生徒の主体的な活動を促すことを目的とするものである。

2.2.帰納的な思考の流れをつくる

実際生徒は帰納的な活動を取り入れた学習は慣れていない。そのため、最初の段階では教師が生徒に帰納的な活動を体験させ、その重要性を示した。次の段階は、課題に対して生徒自身が帰納的な活動を行う段階である。そこには教師が繰り返し、暗示的接触である計算を多く行い、そこから性質を発見することを生徒に働きかけることである。その後、「本当にいつでもそうなるか。」という支持的接触の計算を生徒とのやりとりの中で行ってみせる。そして次の段階で教師は生徒の活動の様子を見て暗示的接触の段階なのか支持的接触の段階なのか判断し、指示を出すか出さないかを決めていく。

藤田(1999)は、生徒が能動的に問題場面についてより多くの情報を生成するための指導を特徴づけるために、「情報の生成としてのストラテジー」を「解き方としてのストラテジー」と対比しながら導入し、子どもの視点に立つことの意味とその重要性を指摘している。(pp.86-87)

筆者もこのような立場に立ち、教師は生徒の活動を冷静に判断しながら生徒の主体性を損なわないように配慮しながら授業を進めていく。

次は、帰納的な思考の流れをつくる段階を示したものである。

第１段階→ 生徒に帰納的な活動を示し体験させる。

第２段階→ 教師から暗示的な接触を多く行う働きかけを繰り返し行う。また、支持的接触を生徒に示す。

第３段階→ 生徒の活動の様子から暗示的接触の段階か支持的接触の段階かを判断し、それに応じて指示を選択する。

３．授業における生徒の活動の分析

筆者は平成 19 年 4 月 13 日から 6 月 26 日の約 3 ヶ月間授業実践を行った。そこでの一連の授業を対象として教師の意図的な働きかけにより生徒の活動がどのように変化したのかを中心に分析・考察を行った。

実践授業は、N 県内の公立中学校２学年の少人数学級（等質）において、筆者が「式の計算」を全１８時間、「連立方程式」を５時間行った。授業の様子は前方からの固定ビデオカメラによって教室全体の活動を記録し、別のビデオカメラで抽出生徒 Nk の活動と主な板書等を記録した。これらの記録をもとにして、授業で起こった事実を表す筆記録を作成した。そして、「数学的な思考の流れをつくる」ための教師の意図的な働きかけ、すなわち、「帰納的な活動を授業に取り入れること」による Nk の活動の変化を「エピソード」として作成し、分析・考察を行った。

「式の計算」（18 時間）	
○問題解決学習	（2 時間）
★「カレンダーの正方形に囲まれた９つの数の和」	
○「文字式のしくみ」	（1 時間）
○「式の加法・減法」	（2 時間）
○「式の乗法・除法」	（3 時間）
○「式の値」	（2 時間）
○「等式の変形」	（1 時間）
○「比の性質」	（1 時間）
○「文字式を利用した説明」	（６時間）
★「連続した５つの整数の和」	（２）
★「２けたの自然数」	（１）
・「半円の弧の長さ」	（２）
・「偶数と奇数」	（１）

図２

本論文では、問題解決学習において抽出生徒 Nk の活動が教師の意図的な働きかけによって帰納的な活動である暗示的接触、支持的接触を行うように変化していった様子が顕著に現れている図２★の部分に焦点を当てることにする。

3.1.　抽出生徒Nkについて

Nk は前期の中間テストに於いて３３点と、どちらかといえば数学が苦手な生徒である。しかし、数学的な表現力に乏しかったり気分的にムラがあるが、積極的に自分の考えたことを発言しようとしたり、他の生徒とコミュニケーションを取りながら意欲的に活動することができる。以上の点から記録担当職員（教科担任）と相談して Nk に決定した。

3.2. エピソード「文字式の利用」

3.2.1. 帰納的な活動の流れを全体へ

文字式の最初の授業の導入として、｢カレンダーに囲まれた９つの数の和｣の課題を用意した。(4 月 13 日）

(1)教師が暗示的接触を全体に示す

まず、教師から中央の数を 11 と指定し、９つの数の和を求めてその求め方を聞いていく。ここで、N k は｢19 と 11。12 と 18。17 と 3。あと、10 と 4 と 5。｣と発言する。

この発言は２つの数を足すとキリの良い数になるものを選び、計算して残りの数を足すという考えのものである。しかし、Nk はこのように考えて解いた内容を記述に残していない。

次にＮｋが中央の数を 18 と指定して、ここで、Ih が中央の数を 9 倍して求める方法を提案する。次に Ih が中央の数を 20 と指定する。その時 Nk は解答を聞き、板書の式 20 × 9 ＝ 180 をプリントに記入する。

４月

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

(2)教師が支持的接触を全体に示す

ここで「本当にそうなるか確かめてみよう。」と教師が発話して、中央の数を 16 として全体でその和を確認して、意図的に支持的接触を行った。

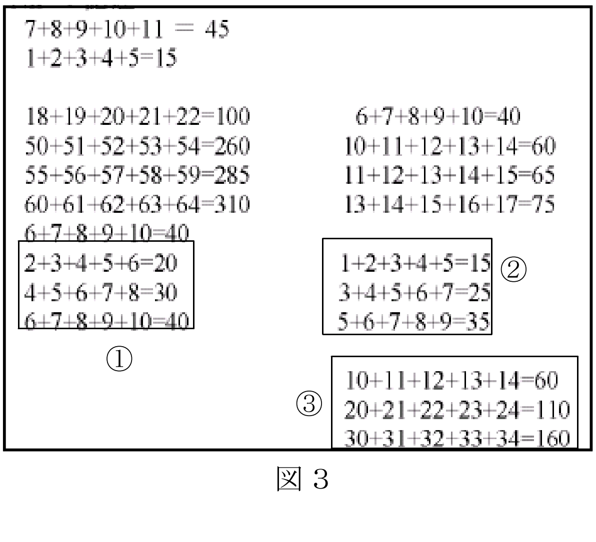
この 1 時間で Nk は、板書を写した計算式以外は自分の考えた計算も記述していない状況である。

3.2.2.暗示的接触から発見へ

「5 つの連続する整数の和」(5 月 15 日）

この授業では、教師側から生徒が性質を発見する際に繰り返し多くの計算をして、そこから性質を見つけることを促した。また、その時の計算を記述して残すように指示を出した。図３はこのときの Nk のノートの記述である。

Nk の学習プリント(5/15)の記述内容


7+8+9+10+11 ＝ 45
1+2+3+4+5=15

18+19+20+21+22=100
50+51+52+53+54=260
55+56+57+58+59=285
60+61+62+63+64=310
6+7+8+9+10=40

6+7+8+9+10=40
10+11+12+13+14=60
11+12+13+14+15=65
13+14+15+16+17=75

①
2+3+4+5+6=20
4+5+6+7+8=30
6+7+8+9+10=40

②
1+2+3+4+5=15
3+4+5+6+7=25
5+6+7+8+9=35

③
10+11+12+13+14=60
20+21+22+23+24=110
30+31+32+33+34=160

図３

(1)教師の働きかけにより暗示的接触へ

Nk の記述からわかるように「カレンダー」の課題の時とは違い、多くの思考の過程を記述している。

(2)性質を発見し、性質ごとにまとめる

左側の記述を見ると試行錯誤の計算から、①の記述の部分から偶数から始まる計算に着目していることがわかる。そこで、Nk は教師の性質についての問に「偶数から始めると 10 ずつ上がる。」と発言する。その他にも、右側中段の②記述を見ると奇数から始まる計算の時の性質も模索していることが伺える。

(3)教師が意図的な支持的接触を行う

教師が他の生徒が発見した性質を幾つか挙げ、その後 Ih が「和が 5 の倍数になる。」という意見を発表する。**そこで教師は、今まで「どうして？」という発問を行ってきたがそこをあえて踏みとどまり、「本当にそうなるのか、違う計算で確かめよう。」と意図的に発話し、4+5+6+7+8=30、6+7+8+9+10=50、5+6+7+8+9=35、9+10+11+12+13=55 を例に挙げ、支持的接触を全体に示した。**

(4)性質の発見から自発的な発言へ

次に授業は教師が、出てきた性質をまとめる段階に移った。その時 **Nk は自ら手を挙げてこう発言するのである。「性質もう 1 個！ 0 のつく数から始めると 50 ずつ和が増えていく。」**そして、Nk は③の記述にある最初の数が 10, 20, 30 の時の計算を例に挙げその計算結果との関係を説明をしていく。Nk はどうしても発言したい状況になったと考えられる。

3.2.3. 暗示的接触から支持的接触へ

この授業は帰納的な活動を意識的に取り入れた 4 時間目の授業である。(5 月 23 日)

課題
「２けたの自然数と、その十の位の数と一の位の数を入れ替えてできる自然数との和は、どのような性質がありますか。」

下図の板書のように教師は生徒とのやりとりをしながら板書し、他にも計算して性質を発見するように指示を出す。

和の性質（板書の一部）
１４＋４１＝５５
２３＋３２＝５５
２４＋４２＝６６
３５＋５３＝８８
１８＋８１＝９９
１５＋５１＝６６

(1)主体的に暗示的接触を行う

Nk は教師の説明の途中から板書には目もくれず Nk の記述の図の３行目から違う数で計算を始める。Nk は最初に「11 ずつ増える。」と性質を発見し学習プリントに記述する。また、Nk はこの他に**「十の位と一の位の数字が一緒になる。」**という性質を見つけている。Nk はしばらく他の計算をしているが途中で、**慌てて途中でプリントに書き込んだ性質の一つを消しゴムで消し始めたのである。**

Nk の記述
１４＋４１＝５５　暗示的接触
２３＋３２＝５５
５１＋１５＝６６
７５＋５７＝１３２
８５＋５８＝１４３　支持的接触
９５＋５９＝１５４

(2)指示的接触から反例を見つける

この行為は Nk の記述のからわかるように、主体的に上部で暗示的接触を行って２つの性質を発見して学習プリントに記述する。そして、下部は自ら支持的接触を行っ

た記述である。そこで、Nk は「十の位の数と一の位の数が等しくなる」ということが成り立たなくなることを確認する。そのため、慌ててプリントの記述を消したということになったのである。

<u>(3)反例を全体に指摘する</u>

次に授業は、発見した性質を全体で発表する場面である。Nk は「**11 ずつ増えていく。**」と発表する。教師は板書で 14 と 15、23 と 24 の例を挙げ、「最初の数が 1 増えると和は 11 ずつ増える。」ことの補足説明を加える。それに対して Nk は頷いてその説明でよいことを確認する。

次に指名された Nt は次のように発言する。**Nt「入れ替えた数を足すと、十の位数と一の位の数が等しい。」**教師はその意見を板書しながら復唱する。その途中で、何回かＮｋが教師に声をかける。それに気付いた教師が Nk を指名する。そして、次のように発言する。**Ｎｋ「先生。百の位にいくと数が違うくなる。」**教師はその例を挙げるようにＮｋに発話する。すると、Ｎｋは **75+57=132** を例に挙げて説明を行った。教師は和の数が 100 以上になると、Nt が挙げた性質は成り立たないとＮｋに指摘されたことを全体に告げる。

この後、授業は「11 の倍数」という性質を取りあげ、論証へと移り、問題の拡張(差)を全体で行っていった。

3.3.エピソードからの分析・考察

エピソードを分析する際、教師の働きかけとそのときのＮｋの活動を時系列に表し(図 4 参照)、そのＮｋの活動の変容を分析・考察することとする。

教師の意図的な数学的な思考の流れを示した「カレンダー」の授業における最初の Nk の活動は、自分や他の生徒の考え方、

Nk の活動の変化と教師の働きかけ

4 月 13 日　課題「カレンダーの正方形に囲まれた 9 つの数の和」

教師の働きかけ
・具体的な例で生徒とのやりとりで暗示的接触 3 回，支持的接触を 1 回行う。
・カレンダーにない数を考える問題の拡張を図り全体でその体験を経験する。

Nk の活動
・板書以外はほとんど記述を残さない

5 月 15 日　課題「連続した 5 つの整数の和」

教師の働きかけ
・計算（暗示的接触）を多く行うように繰り返し指示し，記述を残すように全体に注意を与える。
・性質を多く見つけるように指示する。
・教師が支持的接触を行い全体に示す。
・論証の段階で何を証明すればよいのか見通しを持たせる。

Nk の活動
・教師の指示のもと，暗示的接触を行い多くの性質を発見する。
・考えたプロセスを記述する。
・自ら意見を全体に発表する。

5 月 23 日　課題「２けたの自然数の和」

教師の働きかけ
・暗示的接触を多く行うように指示を出す。

Nk の活動
・主体的に暗示的接触，支持的接触を行う。
・性質ごとに区別して記述を残す。
・反例を見つけ全体に指摘する。

図 4

板書も記述しないという状況であった。

しかし、次の「5つの連続する整数の和」では大きな変化が見られた。Nk は**教師の暗示的な接触を多く行うという働きかけのもと、計算を 20 回行いその記述から複数の性質を発見したということである。さらに、その記述も性質ごとにまとめて記述し、最後は勇気を持って全体に自ら発言した**のである。そして、次の「2 けたの自然数」の授業での Nk は次の段階へ変化した。Ｎｋは**教師に指示される以前に主体的に課題に対して暗示的接触と支持的接触を行った**のである。また、Nk の記述の上から 3 番目の式から 4 番目の式へと支持的接触を行った際に、反例を見つけた時点で間違いに気付き、最初に書いた性質を消しゴムで消した。その後、Nt の発言の**反例を自信を持って全体に指摘したのである。**

ここで、Nk はこの授業において図５に示した２つの数学的な貢献をしている。反例を指摘したことは、Ｎｋが暗示的接触を主体的に行っていき支持的接触を行っていく中で発見した性質が成り立たないときがあるというこに気付いた出来事である。この指摘は、この学習集団に於いて、支持的接触の必要性をＮｋが示したことになる。

①反例に気づき、全体にそれを示したこと。 ②「１１ずつ増えていく。」という、Ih の「１１の倍数」の発言につながる新しい数学的関係の発見を発言したこと。

図５

「１１ずつ増えていく」という新しい数学的関係の発見は、このあとの Ih の発言につながったばかりではなく、この後の論証につながる大きな手がかりとなったと思われる。この２つの Nk の発言はこの授業における大きな数学的な貢献となった。また、「１１ずつ増えていく」という発見に対する指示的接触を Nk が行っていたのかは、これだけのデータからでは判断することはできないが、ここでの自信を持って発言しようとする意欲的な Nk の態度やここまでの Nk の暗示的接触から支持的接触への活動の様子を見ると、自ら支持的接触を行っていたであろうと推測される。また、他の生徒についても学習プリントの記述やビデオの記録などから、最初の状態に比べ機能的な活動を中心として、主体的に数学的活動を行っていた。

４．おわりに

結果として明らかになった事実とそこから導かれる生徒の主体的な数学的活動を促す具体的な手立ては主に次の２点に整理することができる。

１点目は、教師が意図的に帰納的な活動である「暗示的接触」及び「支持的接触」につながる働きかけを生徒の活動を冷静に判断しながら段階的に、かつ、繰り返し行った。このことによって数学的活動の乏しかった生徒 Nk が主体的に帰納的な活動を始め、反例を全体に指摘したり、新しい数学的関係を発見し、それを発言するなど数学の授業において実質的な貢献を行うようになった。このようにして、一人の生徒が徐々に教師の手を離れていったという事実である。藤田(1999)は 2 名の生徒の問題解決活動の様相を分析し、「教師の視点からは意味がないように見える生徒の情報生成でも、それが続いている場合には<u>見守ること。</u>」［下線筆者］(p.97)を指摘している。本実践での 3 ヶ月間という期間の中での Nk の変化から、藤田(1999)が指摘する教師の「見守る」という姿勢が授業という状況下においても生徒の主体的な数学的活動

を促す上で重要であることがわかる。

つまり、生徒の問題解決学習の場面に於いて、Polya,G.の「帰納」の暗示的接触、支持的接触から論証へと繋がる数学的な活動を取り入れることにより、生徒は数学の課題に対するアプローチの仕方を学ぶことが可能となる。その結果として、生徒の主体的な数学的活動が実現される。このとき重要なことは、教師の意識の中に絶えず帰納的な思考の流れを念頭に置き、その機会を逃さずに段階を追った適切な働きかけをするということである。

２点目は授業に帰納的な活動を取り入れることは、教師にとって大きな困難が伴うということである。筆者もそうであるが、教師は通常、先を急ぎ生徒の活動の段階を無視して論証に直接繋がる「どうして？」という発問を繰り返すことがある。筆者はそこをあえて踏みとどまり、生徒の活動を直視し「どのようにして考えましたか？」「もっと他のときも考えてみよう。」など思考のプロセスを問う発問を意識的に行った。このように、生徒の活動に沿った教師の働きかけを行うことで、暗示的接触から支持的接触に繋がるのである。また、これによって生徒たちは「数学の課題に対するアプローチの仕方を学ぶ」ことが可能となり、それを学んだ生徒は Nk のように徐々に教師の手を離れ、主体的に数学的活動を行っていくのである。つまり、生徒の主体的な数学的活動を実現するには十分な時間を確保することが必要であり、上記のことを教師は絶えず意識のどこかに置いて授業を行うことが重要であるということである。授業に帰納的な思考の流れを取り入れることは、時間的な問題や教師自身の思い込みから生徒の活動を把握せずに論証に繋がる発問をしてしまう。これに慣れている数学教師にとって、これを変えることは大きな困難を伴う。しかし、そこを踏みとどまり、生徒の活動を直視し、そこから思考のプロセスや支持的接触に繋がる発問を行い、十分に時間を確保することが生徒の主体的な活動に繋がるということである。

今回の実践は２学年の「計算領域」での実践である。学校現場においてこのような実践を継続し、他の「数量関係の領域」や「図形領域」でも今回の結果をさらに検討していくことが今後の課題である。

引用・参考文献

国立教育政策研究所.（2006）. 特定の課題に対する調査(算数・数学)調査結果.

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会.(2007).教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ.

高木貞治.(1996).近世数学史談・数学雑談. 共立出版.

Polya, G.(1958). 数学における発見はいかになされるか１ 帰納と類比. 柴垣和三雄訳. 丸善.

Lampert, M.（1995）. 真正の学びを創造する数学をわかること数学を教えること. 秋田喜代美訳. 佐伯胖, 藤田英典, 佐藤学編, 学びへの誘い(pp.189 -240). 共立出版.

Cobb, P. & Bauersfeld, H.（1995）. Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. P. Cobb & H. Bauersfeld(Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp.1-16). LEA. .

藤田尚徳.(1999).数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究. 上越数学教育研究, 14, 85-98.