上越数学教育研究, 第 23 号, 上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.73-82.

文字式への移行を意図した正負の数の学習過程に関する研究
－Wittmann の本質的学習場を利用して－

戸谷 亜希子
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

算数と数学のギャップについての研究は，これまで文字式の理解に関する研究を中心としてなされてきた(国宗,1997)。これは文字式という単元が中学校数学で本格的に扱われるとともに，一般数を表したり，特殊を示したり，変数としてみることなど，様々な意味を有するので，生徒にとっては困難を示すことが多いからと考えられる。例えば，式の操作的見方と構造的見方(Sfard,1991)，文字の一般性，構造性，形式性(大塚,2004)，文字式を読むこと(鈴木,2007)などが検討されてきた。

しかし，近年では，算数の中の代数的なアイデア，つまり代数の目で算数を見ることの必要性も主張されている(藤井,2006)。藤井(2006)は，数字式の学習から文字式の学習に至る過程に擬変数を位置づけ，数字式の中に一般性を読み取ることの必要性を主張している。擬変数とは，例えば 78－49＋49＝78 といった計算式の中の 49 のように，具体的で特別な，一般化可能な数を指している。藤井は，記号や文字の導入の前に，数字式の中で擬変数を意識し，一般性を直観できるとしている。このように，算数の中で代数的なアイデアを培うことは，算数と数学のギャップをうめるために有効なものであると考えられる。

また，中学校数学では，文字式の単元の前に『正負の数』を学習する。本稿は文字式の認識を高める上で，正負の数の単元を工夫できるのではないかと考えた。岡崎(2003)も，同様の視点から，正負の数の加減の教授・学習過程を分析･考察し,式の活用の視点から，算数から代数への移行過程について述べている。

本稿では，正負の数の内容を，数字式を文字式に接続するための重要な単元であると考え，この視点から算数と数学の乖離の様相を明らかにしつつ，教材構成や学習過程の改善を目指すものである。そのために,本稿では，戸谷(2007)において考察した，正負の数の単元の中でどのような算数的・数学的特徴が見られ，また，接続教材として考えたときに，どこにそのギャップが見られるかについて整理することから始める。次に，Wittmann の本質的学習場の考えを採用しながら，正負の数の単元と文字式とのギャップをうめる学習の設計について述べ，最後に，実践した授業を分析することによって，正負の数から文字式に向けての生徒の理解，思考の高まりのプロセスを明らかにすることを目的とする。

２．正負の数の加法・減法の指導についての課題の整理

戸谷(2007)では，算数と数学の間にあるギャップについて知るために，まず現行の６社の教科書を，加法・減法の説明の仕方と代数和への接続について分析するとともに，Linchevski ら(1994,1996,1999)の認知的ギャップについてまとめ,課題をあげた。以下，それを簡潔に整理する。

2.1. 教科書における課題の整理

教科書分析の中で，東西移動，カードゲームを利用した説明，大小比較という３つの説明が確認された。

東西移動の場面を利用する説明(杉山他，2005)は，東を正の方向，西を負の方向と考えて，数直線を利用して説明する方法である。加法を式で表すとき，符号＋（プラス）を東への移動，－(マイナス)を西への移動とし，演算＋（足す）の記号を「続けて進む」と意味づけする。

加法の説明では，数直線上で人がどの方向にどれだけ移動したかと，最終的にいる位置をベクトルの合成で意味づけがなされる。一方，減法はベクトルを逆にして加法に直す説明が取り入れられるが，この説明は，文脈から導かれるものというよりは，数学的な要請によるものであり，意味づけが多少こみいったものになっている。

しかし，東西移動の場面設定は，アルゴリズム化や代数和との接続については，むしろ自然のように思われる。なぜなら加法では符号と演算がそれぞれ意味づけされているし，減法の説明は，まさにアルゴリズム化を直接目指しているものであるためである。また，代数和の説明は，加法，減法として意味づけされた式を既習のかっこのある式になおした後，代数和化する工夫がなされている。

《　４－７＋９－５

＝（＋４）－（＋７）＋（＋９）－（＋５）

＝（＋４）＋（－７）＋（＋９）＋（－５）　》

（杉山他,2005,p.21）

＝　４－７＋９－５

つまり，式について，操作的見方を構造的見方の柔軟な切り替え（Sfard,1991）を促す工夫が見られる。

次に，カードゲームを利用した減法の説明(一松他，2005)では，１回目の移動後の位置と，最後の位置がわかっている状態で，２回目の移動を考える。このときベクトルの差の見方あるいは求差の考えが説明の基礎となっている。

説明としてはシンプルであるが，減法を加法にする説明は，加法の４つの式と減法の４つの式を比較することによって，答えが一致する式を組み合わせて対応を明らかにし，そのことによって減法を加法に直すことの説明が示唆されている。この減法の説明は，減法がどのようにして加法に統合されるかの意味づけが弱く，従って代数和へのつながりが弱いと考えられる。

第３の大小比較を利用した場面では，まず，既習の正の数を足すことと，正の数を引くことから始める。ここでは，

《２＋５は，２より５大きい数を求めること

７－５は，７より５小さい数を求めること》

（岡本他,2005,pp.18－19）

と規定されている。ここでは，＋（足す）を「大きくする」こと，－（引く）を「小さくする」というように，加法と減法が日本語に対応づけられ，説明は明瞭である。

しかし，代数和の場面では－の意味が変わる。つまり，－は「小さくする」という意味づけをしてきたが，代数和の説明の場面では，－９という項として見よ，と説明がなされている。言い換えれば，計算の意味づけと代数和の意味づけにズレが生じているように思われる。この場面では，算数や日常世界とのつながりが良好ということの引き換えに，代数和への移行が難しくなっていると考えられる。

以上の点から，東西移動の説明では，演算の意味づけの時点で，強く数学的背景を持つため，数学的な舞台に乗りやすく，代数和やアルゴリズム化への流れが自然であるとともに，式の柔軟な見方を促す工夫も施され得るが，算数からの接続という面では，多少込み入った説明にならざるを得ず，その意味で算数からのつながりが検討事項となるかもしれない。筆者は，算数からの導入はシンプルな方がよいと考えている。その点では，カード

ゲームを利用した説明や大小比較の場面を好む。しかしそれは同時に，代数和へのつながりは弱くなっていると考えられる。また，どの場面を利用しようとも，正負の数から文字式へは，依然大きなギャップが存在すると思われる。

2.2. 認知的ギャップについて

算数から数学への移行は正負の数の加減だけでなく，文字式の学習に向けて方向付けられる必要がある。また，文字式と数の段階とのつながりとしてみていく必要があるとも考える。そのために，数と文字の両方で認知面から接続について検討している，Herscovics と Linchevski らによる一連の研究を整理していく。Herscovics and Linchevski(1994), Linchevski and Herscovics(1996)では，算数と数学のギャップは，文字式におけるイコール記号の意味の拡張と数のまとめ上げのときのマイナスの分離のときに，存在するとされた。しかし，Linchevski and Livneh(1999)は，調査から，50－10＋10＋10 を 50－30 としてしまう「項の指示された演算からの分離」，5＋6×10＝？を前から順に，加法を先に計算してしまう「演算の順序の誤解」，217－175＋217－175＋98＝？の 217 を不正確にキャンセルしてしまうといった「うしろの演算を用いる跳び越え」，という３つの困難が数の段階でも見られたことを明らかにし，文字式のときに存在するとされていた認知的ギャップが，文字式以前の数字式の場合においても存在することが示唆された。つまり，算数と数学の接続には，文字式の単元での指導の工夫だけでなく，数の段階からの指導が重要になってくる。特に，演算や項の認識を高める必要性や，文字式との連続性を考えていかねばならない。

３．本質的学習場

算数と数学のギャップをうめるための視点や方法として，Wittmann (1995,2000)の研究をとりあげた。Wittmann(2000)は，数学教育をデザイン科学と位置づけ，その核心が関連領域や教育実践との相互交流のもとで展開すると述べた。また，Wittmann（1995）は，本質的学習場の概念を提唱している。本質的学習場とは，以下の性質をもつ指導・学習の単元のことである。

（１）算数・数学指導の主要な目的，内容，原理が或る水準において示されていること。

（２）この水準を超えた重要な数学的な内容，過程，方法と結びついており，数学的活動の豊かな源であること。

（３）柔軟性をもち，個々の学級の特殊事情に合わせることができること。

（４）算数・数学指導に関する数学的，心理学的，教授学的観点を統合し，実証的研究の豊かな場を形作ること。

Wittmann はこの本質的学習場の設計が，「算数・数学教育の正に中心に位置づけられるべきである。研究，開発，教師教育は組織的なかたちで本質的学習場と意識的に関連づけられねばならない。」と述べている。つまり，本質的学習場の概念が，数学教育の中心となりうるものであると考えられる。

本質的学習場の教材は，基本的にはオープンなものである。本質的学習場の教材は，生徒に応じて，様々に変容できるものとなっており，本質的学習場を利用して，練習問題をしながら新しく問題を考えることや，ひとつの問題を生徒自身で発展させ，自ら問題解決することが必要であると考えられよう。本質的学習場の教材で，様々に問題を発展させ，考えていく中で，自然に算数と数学をつなげていくことができると考える。

本稿では，この本質的学習場を用いた授業展開が算数と数学のギャップをうめる手立てとなりうるかどうかを授業実践に基づき検討していく。

４．教授実験

4.1.　授業の構想

本調査では，Wittmann が提唱した本質的学習場の概念に基づいた教材，数の石垣と式作りの問題を利用した。

数の石垣は，図１のように，石垣のような形に数字を入れて計算するものである。そのルールは，下の 2 つの数字を足したものがその上の段の箱の中に入るというものである。

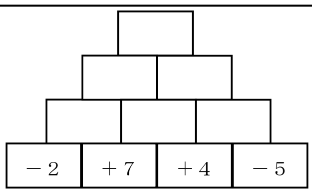

図１．数の石垣.

数の石垣を利用することで，多くの計算練習ができることが考えられる。これは，数の石垣の目的の一つといえよう。また，石垣の中に数字だけでなく，数字式や文字式などを入れて考えることで，文字式の一般性の認識につながることも考えられる。これは，目的としている正負の数の計算より，さらに高い数学的な考え方の内容となっているだろう。さらには，石垣を発展させることで，石垣の上段と下段の関係を考えたり，石垣にある仕組みを考えたりすることもできる。つまり，数の石垣は一つの教材で様々な利用の仕方があることがわかる。これが本質的学習場で言う，柔軟性を持っていることとなる。また，数の石垣は，生徒自身が問題を作ることもできる。このように，様々な実証的研究の場となっている。それは Wittmann が提唱している本質的学習場の本質であると考える。

式作りの問題は，正負の数を使って様々な数を作る問題である。この式作りも，正負の数の計算練習が，最初の目的となり，考えながら式を作っていくので，多くの計算練習ができることが，本質的学習場の性質をもっているといえよう。問題としては，最初は２つの数を使う問題を提示し，３つの数，４つの数と，使う数を増やしていく。この問題のルールは，提示された数字は，必ず１回だけ使うということと，演算記号は何回でも使ってよいということである。さらに，中かっこを利用することも許可している。中かっこを利用することで，式をまとまりでみることにつながると考えられるからである。また，中かっこを使い，式をまとまりでみたり，分配法則を利用してバラバラでみたりするといったような，式の構造的な見方の認識につながると考えられる。これは，目的としている正負の数の計算より，高い水準のこととなるだろう。このような問題を利用することで，多くの計算練習をすることや式をまとまりでみることなど，数学的な目標もあり，さらには生徒の学習状況などによって数字を変えることにより，各学級にあった問題を作ることができると考えられる。

これらのことから，式作りの問題には，Wittmann の提唱する本質的学習場の本質があると考えられる。

4.2.　データ収集と分析の方法

教授実験は，数の石垣の問題場面と式作りの場面を利用して，新潟県内の公立中学校第１学年の１学級を対象にして，筆者が全５時間の授業を行った。

データ分析は，生徒が数の石垣をどのように認識し，その認識がどう変化していくかということと，式作りの問題において，式に対する認識がどのように変化したかということを分析の対象としている。これらの分析は，小学校算数から中学校数学への移行を視点としている。数の石垣の問題の発展や仕組みの発見，文字を利用したことなど，場に応じた生徒の認識が，文字式の認識につながり，さらに式作りの問題では，式の認識の変化を分析することによって，利用した教材が算数から数学への移行に有効であるかを分析・考察していく。

4.3.　授業分析

①数の石垣の場面

最初に，数の石垣のルールを説明し，生徒に石垣を埋めさせた。その後，石垣の下段の数を変化させ，上段の数を考えたり，その逆を考えたりすることで，数の石垣のパターンを生徒が発見していった。

数の石垣を発展させていく中で，石垣の一番上の段の数を変化させ，一番下の段の数がどうなるか考える場面で，わかりやすく説明することを促すと，Ishi が，「式を使えばよい」と提案し，式を用いて石垣を埋めていった（図２）。

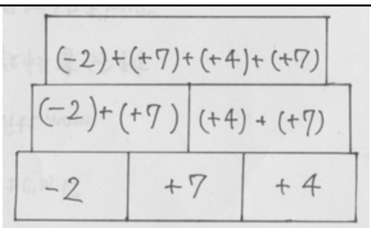

図２．式を入れた石垣.

また，この式を入れた石垣からわかることを生徒に問うと，生徒は次のように答えた（図３）。

3015	Hori	大黒柱は2回足される
3019	Ishi	ずっと式に出てくる
3024	Yama	全部の式に出てくる

図３.

Hori の「大黒柱は２回足される」という発言は，自ら石垣の下段の真ん中の数には，数が足されていくという様子を，大黒柱と名づけ，自分なりにわかりやすい言葉で説明している。また，Ishi の「ずっと式に出てくる」や，Yama の「全部の式に出てくる」といった発言も，自分なりに石垣の仕組みをわかりやすく説明したものである。これらの発言は，石垣を式で埋めたことによって，石垣の中にどういった数が入っているのかが見えていることがわかる。つまり，式を書くことで，石垣の仕組みをより明確化できたから出てきた発言だと思われる。

数の石垣に式を入れたものを発展させて，数の石垣に記号を入れて石垣を埋めさせた。するとすぐに，「丸足す三角だから」のように，多くの生徒が，記号への抵抗無く，記号を用いて式を書いていた。またその後の文字式への変換も，抵抗無く行われていた。これは，数の石垣の中に式を書き入れたものから，生徒達が石垣の仕組みの一般性をある程度理解していたことによると考えることができる。

次に，記号や文字の式から数字式を捉えるよう促した。まず，下段左の記号に入るいろんな数を挙げさせた。そのとき，一人の生徒 Hoso が「何でもいいんじゃないかなぁ」と発言した。この発言を受けて，教師は a の数を 37，b を 16，c の 4 とすることにして，頂上数がどんな式になるか考えさせた。生徒が「37+16+16+4」と述べると，Waka は「ああ，そういうことだったのか」と述べた。つまり，文字式をもとに，文字に数を代入して，文字式と同じ形式の数字式ができたときに，理解を深め，このときはじめて，数字式が完全に擬変数化していると考えられる（図４）。

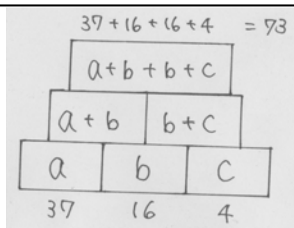

図４．文字を入れた石垣.

またその後，記号や文字を通して，石垣の仕組みをさらに説明させた。その場面で Sasa が，「ａに１足したら一番上も１増える。でも，ｂは２回足されるから，ｂに１足すと２倍になって，一番上は２増える」という説明を行った。これは，下段のｂと上段のｂ＋ｂを，加数（たすｂ）に読み替えた説明であり，文字の柔軟な読みが進んでいると考えられる。もちろんこれは，記号だけに依存した読みというよりは，数の計算練習やパターンの認識に裏打ちされて生じてきたものと思われる。

②式作りの問題の場面

式作りの問題場面では，まず，２つの数字から，別の数を作ることから始めた。黒板に＋３と－２という２つの数を書き，式を作るということを中心に考える場面である。最初に，生徒に 2 つの数を提示し，他の数が見えてこないかということを聞いた。最初は生徒も何を答えたらよいのかわからないといった状態であり，挙手して発言する生徒はいなかった。しばらく待っていると，一人の生徒 Sasa が，「プラス１」と発言した（図５）。

4061	T	一旦ここまで，おいといて，－2，＋3，この2つの数字から，別の数字が見えてこないかな。なんか見えた人？なんか聞こえたけど，言ってほしいな。
4068	Sasa	プラス1
4069	T	プラス1が見えてきた。どうやったら見えた？
4070	Sasa	マイナス2足す3

図５.

この発言は，２つの数から別の数を見つけるときには，計算すればよいのではないかという生徒の考えである。他の生徒は最初，どうしてプラス１が出てきたのかはわからない様子だったが，どうして出てきたのか理由を生徒に問うと，プロトコル No.4070 の Sasa の発言のように，式で答えた。この発言から，この生徒は教師の質問の意図を理解していることが考えられる。このとき，生徒には答えの数だけでなく，式を答えさせた。このことから，他の生徒が考えるべきことを理解できたと考えられる。

3 つの数を利用して別の数を作る問題では，生徒は式を書くことが自然にできていた。これは，2 つの数の段階で，式が答えになるということを体験していたことから，この場合にも式を答えと捉えることができていたと考えられる。また 3 つの数（－１），（－２），（＋３）の数から（＋２）を作る場面では次のような発言があった（図６）。

5026	Ishi	（－2）＋（＋3）×（＋1）
5030	T	これ，どこから計算する。
5031	C	かけ算から計算する。
5032	T	はい，ちょっと，これどこから計算するかわかりますか？
5033	Hori	かけ算からか。

図６.

この場面では，生徒は四則演算が混ざった計算の順序について，しっかり覚えていない生徒がいることがわかる。よってこの場面を利用することで，四則演算の計算の順序の確認ができたと考える。

4 つの数を利用した問題では，中かっこを使う生徒が 3 つの数で考えたときよりは増加していた。その顕著な例が，次にあげる 4 つの数(－１)，(＋２)，(－３)，(＋４)を使って，０を作る場面である。別の考えが出た後の Miya の発表である（図７）。

5091	Miya	（＋4）×{（＋2）－（－1）＋（－3）}
5092	T	ええと，これはどうやってやっていくのかな
5093	Miya	中かっこの式
5094	T	中かっこの式って言うことはここ？ここを最初につくった？
5095	Miya	最初に計算する
5096	T	最初に計算する？ここ計算すると何になる？
5097	Miya	0になる
5098	T	ここが0になる。ここが0になるから，0

図７.

この場面ではまず，中かっこを用いたときの計算順序の確認からしている。この場合，中かっこの計算の順序がわかっていないと，正しい答えを出すことができない。このときの Miya の考えは，０に何を掛けても０になるという考えである。このことから，Miya は自分がわかりやすい数で先に０を作り，その後，残った数をかけることで０を作るという計算をしている。このことから，Miya は中かっこの中の数を，一つのまとまりとして

みることができていたと考えられる。

またこのあと，中かっこの使われている式をもとに，分配法則を説明した。そのとき図８のような板書をした。

$$(+4)\times\{(+2)-(-1)+(-3)\}$$
$$=(+4)\times(+2)-(+4)\times(-1)+(+4)\times(-3)$$

図８．分配法則の板書.

この板書により，分配法則を知ることで，生徒は中かっこを先に計算する方法だけでなく，中かっこの中の数をばらばらにして計算する方法を知ることができたと考えられる。このことは，式の見方を柔軟にするという，式の構造的な見方につながると考えられる。

また，4 つの数を使って式を作る場面では，かっこの必要性を考える場面があった。この場面では，中かっこの必要性を確認する場面であり，中かっこがどんな場合に必要かや，中かっこがないときはどうなるかといったことを，教師が生徒に対し問う場面である。生徒は，中かっこをなくしてしまうと，計算する順序が変わってしまうことから，答えも変わってしまうことに気づき，中かっこを省略してはいけないことを理解していた。実際に中かっこをはずして計算することで，中かっこの必要性を生徒は理解できたと考えられる。

５．考察

ここでは，2 つの場面でみられた特徴から，生徒の思考過程が，どのようになっているかを，分析・考察することを通して，移行の特徴を抽出する。

5.1. 数の石垣の場面

数の石垣は，以下のような学習段階で構成されていた。

①石垣のルールに従って，石垣を埋める。
②下段の端の数を１増加すると，頂上数は１増加する。
③下段の真ん中の数を１増加すると，頂上数は２増加する。
④石垣の下段の変化から上段の変化のパターンを認識する。
⑤上段の数を４増加すると，下段の端の数は４増加する。
⑥上段の数を４増加すると，下段の真ん中の数は２増加する。
⑦石垣の上段の変化から下段の変化のパターンを認識する。
⑧石垣の仕組みを，数字式として捉える。
⑨式を入れた石垣の下段の真ん中の数に丸を付け，頂上では２回足されていることを顕在化させる。
⑩石垣の下段の真ん中の数をいくつか増加させると, 頂上ではそれが 2 回足されるので, 増加した分の 2 倍増加する。
⑪石垣の中に，○，△，□の記号を入れて，石垣を埋めることができる。
⑫石垣の中に，ａ，ｂ，ｃの文字を入れて，石垣を埋めることができる。
⑬文字を入れた石垣の文字を，数に置き換えて，構造が一致するか確かめる。

これらのような学習段階をもとに，生徒は石垣のパターンを認識していくことができたと考えられる。次にこれをもとにして，文字式の認識をみていく。

文字式の一般性についての認識の変化についてみていく。生徒の学習段階の①で，石垣のルールを知り，石垣を埋めることができるようになる。その後，②や③のように石垣の下段の数を変化させたり，上段の数を変化させたりというように，様々に発展させていく中で，石垣の上段と下段，下段と上段の関係をそれぞれ見ることができるようになると考えられる。さらに，この②から⑦に対応する問題を繰り返し考えることで，生徒は石垣のパターンを認識していくことが考えられる。また，その後，⑧のように石垣に式をいれ数

字式で石垣を捉えることで，②から⑦の段階で発見した石垣のパターンを，擬変数化して捉えることができたといえよう。さらには，擬変数化したことを生かし，数字を⑪や⑫のように記号や文字に変え，石垣の仕組みを一般化することができたと考えられる。さらには，⑬のように記号や文字を数字に戻すことで，文字で捉えたことを，数字に戻して捉え直すということになる。つまり，生徒は，数字の段階で発見した石垣のパターンを，文字式を利用して一般的に書き表し，さらにはそれを数字に戻すことによって，文字をもとに顕在化することができたと考えられる。

これらのことから，数の石垣を利用することで，生徒は数字だけから数字式，さらには文字式というように，式の一般性の認識を高めることができてきたことが考えられる。

さらに，文字式の構造性についての認識の変化をみていく。文字式の構造性については，①の石垣のルールに従って石垣を減法を使って埋める練習をする場面や，⑤から⑥のような頂上数の変化から下段の数の変化について考えるときの，数の分解をすることから始まっていると考える。数の分解をすることで，一つの数を式に分解してみることにつながると考えられるからである。さらに，⑧のように石垣に数字式を入れる場面では，数字が入っている石垣と見比べることで，一つの箱に入っている式をまとまりとしてみることができるようになると考えられる。このようなことが，⑪や⑫のように石垣に記号や文字を入れたりする場面でもいえる。これらのような石垣の仕組みを顕在化する場面で，式をひとまとまりとしてみることができたということは，式を柔軟に見ることができるという，式の構造性の認識が高まったといえると考える。また，⑬で石垣に入れた文字を数に置き換えたり，その数を1増加したりすることで，文字式を数字式に読み替えができていることを示している。つまり，石垣に入れた記号を数字に読み替えるといった，式の柔軟な見方が進んでいるということが考えられる。このことから, 数の石垣を使った授業をすることで，生徒が文字式の構造性へ向けて，式の認識をかなり高めることができたと考えられる。

本質的学習場「数の石垣」の場面の分析から，生徒達が石垣の数の変化から石垣のパターンを発見し，そのパターンに基づき数字式を擬変数化して捉え，さらに記号や文字を用いることで，式の一般性の認識を高めていたこと，さらに石垣に式を入れたものと数を入れたものを見比べて，式をまとまりでみることや，文字式を数字式に読み替えるという式の柔軟な見方の獲得，つまり式の構造的な見方を高めたことが明らかになった。このことより数の石垣は，文字式の導入教材としても有用であることが示唆された。

5.2. 式作りの場面

式作りの問題を考えるときの生徒の考えは次のようになっている。

① 2つの数を利用して, 別の数を作る方法を考える。
② 四則演算を用いて, 2つの数から別の数を作る。
③ 式が答えになる場合があることを知る。
④ 計算法則（交換法則）を確認する。
⑤ 3つの数を利用して, 別の数を作る方法を考える。
⑥ 四則演算を利用し, 計算の順序の確認をする。
⑦ 4つの数を利用して，別の数を作る。
⑧ 中かっこを利用して, 数のまとまりを作る。
⑨ 中かっこが無かった場合を考えて, 中かっこの必要性を知る。
⑩ 分配法則を知る。
⑪ 中かっこを利用して, 数をまとまりとしてみたり，分配してばらばらでみたりする。

これらのような学習段階をもとに，生徒は式作りの問題を認識していくことができたと

考えられる。また，この問題をもとに，生徒は式に対する認識を変化させてきたと考えられる。このことから，式作りの場面の学習段階をもとに，生徒の式の認識を見ていく。

まず，①の段階では 2 つ数があるとき，どうしたら別の数を作ることができるかということを考える。生徒はそのとき計算をしたら新たな数が作り出せることに気づく。この場合，計算した結果の数だけでは，他の生徒には何をしたかが伝わらない。そこで，この場合に答えなければならないものが式であることに気づく。このとき生徒の中で，式がただ計算するためのものではなく，答えにもなりうるという考えが新たに出てきたと考えられる。また，この式を答えという見方は，文字式のときにはよくある考えであり，この式の見方の変化は，文字式など今後の数学につながっていくものであると考えられる。さらには，この式の見方の変化には，イコール記号の認識の変化ということが関わることも考えられる。算数では，式から答えを出すためのものであるという認識がほとんどであると考えられるが，このときは答えから式を出すためにイコールを使ったといえよう。つまり，答えを出すためのイコールではなく，等号として，等しい 2 つのものを結ぶためのイコールとして使えていたと考えられる。

この 2 つの数を使って式を作る場面では，交換法則が確認されている。生徒は，加法と乗法のときに交換法則が成立することを実際に計算して確認している。

4 つの数を使って, 別の数を作る場面では，生徒は⑧のように中かっこを利用して式を作るということを行っていた。中かっこを使うことで，式の一部分をまとまりとしてみることにつながると考えられる。この，式の一部分をまとまりとしてみることは，これまでには無かった考えであるため，この段階で生徒は，式の構造的な見方の認識に近づいたことが考えられる。

4 つの数を使って式を作るとき，生徒は中かっこを利用して式をまとまりとしてみることができたと述べたが，その後生徒は，分配法則を知ることで，中かっこで式をまとまりとしてみるだけではなく，分配法則を利用して，まとまりとしてみていたものを，ばらばらにしてみることができていたと考えられる。つまり，生徒は中かっこをつけて式をまとまりでみることと，分配法則を使ってばらばらでみることの両方をできていたといえよう。これは，式を構造的に見ることができていると考えることができる。また，本質的学習場「式作り」の場面の分析から，式自体を答えと捉える見方，中かっこを使って式をまとまりとしてみること，分配法則を使ってまとまりとしてみていた式をばらばらにみることといった，式の構造的な見方を，生徒達が数字式の段階でかなり認識していたことがわかった。つまり，式作りの問題は，特に生徒の式の構造的認識を高めるために有効な教材であるということが示唆された。

これらの考察から，本質的学習場の教材を用いることで，数の段階から，生徒に式の一般性と構造性の認識を高めておくことができることが考えられた。つまり，本質的学習場の教材を利用した授業で，式の見方を柔軟にしておくことが，算数から数学への移行には有効であると考えられる。

6．おわりに

小学校算数から中学校数学への移行を視点とした，正負の数の教材としての捉え方について示唆される本研究の主要な結論は次のとおりである。

① Wittmann の本質的学習場の視点を, 算数から数学への移行過程に活用することで，数や式のパターンから式の一般性や構造性の認識を高める授業設計が可能である。
② 算数と数学のギャップをうめる手立てとして，本質的学習場「数の石垣」を利用す

るとき, 生徒は数字式の中の数を擬変数とみて, 式の一般性の認識を高めることができる。また，石垣の仕組みを考えるとき，式をまとまりとしてみることや, 文字式を数字式に読み替えるといった式の柔軟な見方ができるようになり, その点で式の構造性の認識の高まりにも効果がみられる。

③ 本質的学習場「式作り」の場面では，数字式を答えとしてみたり, 式の一部をまとまりとしてみたりする思考が自然に生じ, 式の構造性の認識の発展が期待できる。また, 意味ある活動の中で, かっこを用いて式をまとまりとしてみたり, それをばらばらにみたりすることをくり返すことで, 式をまとまりとしてみる見方がさらに高まることも示唆された。

本質的学習場を利用した授業を行うことで生徒の式に対する認識が高まったと捉えることができたと考えるが，それが文字式以降の単元においても，有効なものとなったかについては，本研究では調査していない。式の認識の高まりが文字式以降の単元において，どのように関わっていくのかを調査することは今後の課題の一つである。

また，小学校算数での移行過程を研究し，算数から数学への移行の様相をさらに明らかにし，本質的学習場の教材を利用し，小学校算数から中学校数学までの授業展開を連続して考えることも，今後の課題である。

引用・参考文献

藤井斉亮. (2006). 初等教育段階における代数的思考の育成　―擬変数の理解に焦点を当てて―. 数学教育論文発表会論文集, 39, 307-312.

Herscovics, N. and Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59-78.

一松信他. (2005). 中学校 数学 １. 学校図書

国宗進. (1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導. 明治図書.

Linchevski, L. and Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equation. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 39-65.

Linchevski, L. and Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical context. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 173-196.

岡崎正和. (2003). 全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究　―教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から―. 数学教育学研究, 9, 1-13.

岡本和夫他. (2005). 未来へひろがる数学１. 啓林館.

大塚高央. (2004). 文字式の「よさ」の指導に関する基礎的研究　―中学２・３年生を対象にした調査を手がかりにして―. 上越数学教育研究 , 19, 37-48.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and object as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 21-36.

杉山吉茂他. (2005). 新編 新しい数学 １.東京書籍.

鈴木敬介. (2007). 式を読むを視点とした文字式の授業改善に関する研究. 上越数学教育研究, 22, 33-44.

戸谷亜希子. (2007). 正負の数の加法・減法の教科書分析と認知的研究からみえる算数と数学の乖離の様相について. 上越数学教育研究, 22, 163-174.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 355-374.

Wittmann, E. (2000). 算数・数学教育を生命論的過程として発展させる. 日本数学教育学会誌, 82(12), 30-40.