上越数学教育研究, 第 23 号, 上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.157-164.

生徒の知識の形成過程を捉えるための手続き的知識と概念的知識という視点について

渡辺　由仁
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

筆者には二年間，高等学校での講師経験がある。その講師経験で感じたこととして，高等学校の数学授業では計算技能や問題の解法の獲得を生徒に求めている場合が多いことがある。筆者がこれまで行ってきた数学の授業もまた，生徒に問題の解法を教え込む授業であり，またそれを生徒が聞く授業であった。筆者には生徒に多くの数学の知識を理解してもらい，数学を理解することによって数学を楽しんでもらいたいという思いがあったものの，当時は生徒が授業での学習の大部分を問題の解法の学習のみに追われる事は仕方がないことであると諦めていた。筆者は，これまでのような教師が知識を教え込む授業を改善したいと考えている。その改善のための基礎資料を得るために，特に高等学校の生徒が数学のどのような知識を形成しているのかを知ることが必要である。

現在，幾ばくかの数学教育研究者によって研究されている手続き的知識と概念的知識とは数学教育界では知られているものである。Hiebert&Lefevre(1986)は，「生徒がどのようにして数学を学ぶか，そして特に彼らがどのように数学を教えられるべきかについての疑問は，知識のどのようなタイプがより重要か，または，何がそれらの間の適正なバランスになりえるかについて推測される(p.1)。」と述べている。知識のタイプにあたる手続き的知識と概念的知識との形成過程という点から生徒の数学学習を改めて見直すことができるのではないか。

手続き的知識と概念的知識という語は，それぞれ数学教育研究者によって定義が異なる。そこで手続き的知識と概念的知識という語を再考察する必要がある。その作業において生徒の知識の形成過程を見取るための視点を得られるだろう。

本稿の目的は，手続き的知識と概念的知識という語を再考察することにより，生徒の数学の知識の形成過程を明らかにするための視点を得ることである。

２．関係的理解，道具的理解とシェマ

本節では，手続き的知識と概念的知識という視点と深く関連する Skemp(1992)による関係的理解と道具的理解という視点について考察していく。

2.1. Skemp(1992)における関係的理解と道具的理解

Skemp(1992)は,理解を関係的理解と道具的理解という二つの視点で捉えている。Skemp(1992)は,関係的理解をやっていることもその理由もどちらもわかっているということ，道具的理解を Skemp(1992)以前に Skemp

本人が「理由なき知識」と呼んだものであるとしている。関係的理解は手続きだけでなくその理由をも知っていることであり，道具的理解は理由はよくわからないが手続きは知っていることであると考える。Skemp(1992)はこの二つの理解でどちらの理解が優れているかと考える際，関係的理解の方が優れていると述べている。

2.2. Skemp(1973)におけるシェマの考え方

2.1 節の関係的理解，道具的理解を支える一つの見方としてシェマの形成がある。シェマは，知識を相互に関係づけた構造として考えることができる。

シェマの機能として，Skemp(1973)は次の二つを述べている。

① 既存の知識を統合すること
② 新しい知識を獲得する上での心的な用具となること(p.28)

この二つの機能を備えたシェマによる学習の利点は，Skemp(1973)によるインディアンの符号言語に似かよった人工的な記号による実験によって明らかにされている。このSkemp(1973)による事例は，シェマによる学習が素材を学習するときによりよく学習されるばかりではなく，よりよく保持されることを示している。

Skemp(1973)は，シェマによる学習の利点ばかりではなくシェマによる学習の不利な点も述べている。それは，次のようなものである。

① 課題がそれだけで独立しているときには，シェマによる学習は長い時間を要する
② シェマに適合しない経験は，ほとんど学習されないし，一時的に習得されたとしてもすぐに忘れられてしまう(p.32)

これらの不利な点を考えたとしても，数学学習においては知識同士の結びつきを豊かにし，数学を意味あるものとする点で，シェマによる学習が有効であると考える。

2.3. 関係的理解，道具的理解とシェマとの関わり

本節では，2.2 節までに示してきた関係的理解，道具的理解とシェマとの関係について考察していく。

関係的理解は，やっていることもその理由もどちらもわかっているということである。これは計算問題において考えると，計算の関係がわかった状態で計算を行っている，つまりその計算に関する多くの知識同士のつながりを持つシェマが形成されていると考えることができる。

例えば，8＋3 の計算をする際，ただ計算をして 11 と答えるだけではなく，計算で現れる繰り上がりの 1 が下の図 1 のタイル図のように 10 を意味することを理解することは，繰り上がりの足し算に関する関係的理解のために必要である。

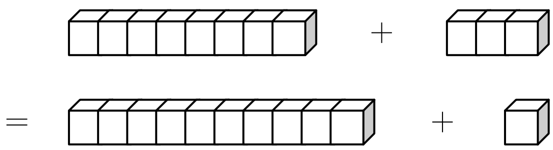

図 1

道具的理解は，やっていることはわかるが理由がわからないことである。これは，計算の計算方法と理由が結びついておらず，つまり，ほとんどシェマが形成できていないと考えることができる。

例えば先の計算の例で考えると，8+3 の計算を九九と同様に機械的に暗記している生徒は繰り上がりの計算に関して関係的理解ではなく，道具的理解をしていると言える。

３．手続き的知識と概念的知識

Skemp(1992)による道具的理解と関係的理解という視点を発展させたものに，手続き的知識と概念的知識という視点がある。

本節では，2 節での関係的理解と道具的理解との比較を交えつつ，手続き的知識と概念的知識との先行研究を考察していくことにする。

3.1. Hiebert&Lefevre(1986)による手続き的知識と概念的知識の定義

近年における手続き的知識と概念的知識との研究の先駆けとなっているものとして Hiebert&Lefevre(1986)がある。

3.1.1. Hiebert&Lefevre(1986)による概念的知識

Hiebert&Lefevre(1986)は概念的知識を次のように定義している。

> 概念的知識は，最もはっきりと，関係において豊富である知識として特徴付けられる。それは，知識の結び付けられた蜘蛛の巣状のもの，即ち，結び付けている関係がその知識情報の断片と同じくらい重要であるネットワークとして考えることができる。(p.3)

事例を考えてみると，生徒に「二次関数」に関係する知識を挙げてもらう際，関数の定義という用語上の知識のみならず,比や割合,変化，対応，変化率，一次関数などの知識を形成し，それらを結び付けていられれば，その生徒は「二次関数」についての概念的知識を持っていると言える。

この Hiebert&Lefevre(1986)による概念的知識の定義に現れるネットワークという語はシェマと同じようなものとして考えることができる。Hiebert&Lefevre(1986)による概念的知識は，多く知識情報が互いに結び付いたネットワークをなす知識と考えることができる。概念的知識が知識情報のネットワークによる知識であることより，概念的知識は関係的理解と同様のものと考えることができる。

3.1.2. Hiebert&Lefevre(1986)による手続き的知識

Hiebert&Lefevre(1986)は手続き的知識を次のように定義している。

> 我々がここで定義する手続き的知識は，二つの異なる部分によって構成されている。一つの部分は，数学における記号表現システム，または，形式的な言語から成り立っている。もう一つの部分は，数学的な作業を遂行するための規則やアルゴリズムから成る。(p.6)

「数学的な作業を遂行するためのアルゴリズムや規則」の例を挙げると,「対数」の単元において生徒が，解を求めるための「対数の性質」「対数の公式」の計算のための手続きを機械的に使用している状態であると考えられる。このようなアルゴリズムの知識を生徒が持っていれば,Hiebert&Lefevre(1986)による定義の手続き的知識を持っていると言える。

この手続き的知識のもう一つの面は，知識情報のネットワークが多方向に広がっているのではなく，知識情報の結びつきがアルゴリズムのような,簡単なものであることである。

Hiebert&Lefevre(1986)による手続き的知識は，道具的理解に応じ，理由なしの計算技能がその例である。

3.1.3. Hiebert&Lefevre(1986)の手続き的知識と概念的知識の関係

Hiebert&Lefevre(1986)による手続き的知識と概念的知識との定義を考察するため，次のような計算を考えてみる。

$$\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 24 = \log_2 (\frac{4}{3} \times 24)$$

$$= \log_2 32$$

$$= \log_2 2^5$$

$$= 5\log_2 2$$

$$= 5$$

このような計算を行っている生徒が手続き的知識あるいは概念的知識を持っているかはこの式からだけでは判断はできない。その生徒が足し算，掛け算，関数，比例，分数，指数，対数などの知識を知識情報のネットワークとして構成してこの計算を行っていれば，その生徒は概念的知識を持っていると言える。また，その生徒が対数の性質，対数の公式のみを用いてアルゴリズムとしてこの計算を行っていればその生徒は手続き的知識を持っている。

3.2. Star(2005)による手続き的知識と概念的知識の再概念化

Hiebert&Lefevre(1986)の後，多くの研究者によって手続き的知識と概念的知識について研究された。その中でも Star(2005)は最近，手続き的知識と概念的知識とに浅い，深いという分類を加え，再概念化を行った。

3.2.1. Star(2005)による概念的知識の定義

Star(2005)は，概念的知識については次のように定義している。

> 概念的知識という専門用語は，知っていること(概念の知識)だけではなく概念の知りえる方法(例えば，深く，そして，豊かなつながりを持った)をも含む。(p.408)

例えば，「二次関数」の概念的知識には，その知識の形成に至るための様々な知識情報を結びつかせるための方法も含まれていると見なすのである。

3.2.2. Star(2005)による手続き的知識の定義

Star(2005)は，手続き的知識を次のように定義している。

> 手続き的知識という専門用語は，知っていること(手続きの知識)だけではなく，手続き(アルゴリズム)の知りえる方法(例えば，浅く，そして，豊かなつながりを持たない)をも指す。(p.408)

例えば，対数の計算をしようとする際，「対数の性質」「対数の公式」の一つ一つの知識を知っているだけではなく，手続きとしてアルゴリズムという単純な知識情報のネットワークを形成することである。この手続き的知識の定義では Hiebert&Lefevre(1986)とは違い，知識情報を単純に結びつかせるための方法という視点をも含んでいる。

3.2.3. Star(2005)による「深い手続き的知識」の提案

Star(2005)では，手続き的知識と概念的知識とに対して「深い」「浅い」という視点を提案した。Star(2005)による表は以下のもの(表1)である。

表 1. Star(2005)による手続き的知識と概念的知識の再概念化

知識タイプ	知識の質	
	浅い	深い
手続き的	手続き的知識の共通の用法	?
概念的	?	概念的知識の共通の用法

(p.408)

Star(2005)は，これまで多くの研究者によ

って使われている手続き的知識や概念的知識と表現していたものはそれぞれ表 1 でいうところの浅い手続き的知識と深い概念的知識とにあたるものであり，深い手続き的知識と浅い概念的知識とが考えられるのではないかと述べている。表 1 の？の部分の中に関して Star(2005)は，深い手続き的知識は，次のものにあたるのではないかとしている。

> 深い手続き的知識は,理解力,柔軟性,批判的な意見，概念の知識とは異なった(しかし，ひょっとすると関係のある)ものを連想される手続きの知識になるだろう。(p.409)

事例を考えてみると，「$y = x^2 + 2x$ の頂点を求める問題」に対して，式から平面に点を取りつつグラフを描き頂点を求める捉え，式を平方完成して頂点を求める捉え，などの多岐な方法でアプローチできるような手続き的知識にあたる。

Star(2005)による手続き的知識の再考察は,それぞれの知識に浅い，深いという視点を提案している点で有効である。なぜなら，手続き的知識と概念的知識という二分化した見方だけではなく，浅い，深いという視点を入れることによって，知識の形成過程を見るための視点を得られる可能性があるからである。しかし，この浅い，深いという視点も二分化として使うのではなく，比較的他の知識よりも浅いか深いかという形で見るべきものである。

3.3. Baroody(2007)による Star(2005)に対する批判

3.2 節に述べた Star(2005)による手続き的知識の再概念化に対しての反応に，Baroody(2007) がある。Baroody(2007) は Star(2005)による浅い，深いを用いた手続き的知識の再概念化に対して同意と批判を行った。

Baroody(2007)は,浅い手続き的知識と浅い概念的知識はそれぞれ手続き的知識，概念的知識と孤立している知識であるとし，また深い手続き的知識は深い概念的知識と強い結びつきがある，正確な手続き的知識であると定義している。この考え方はそれぞれ，知識情報のネットワークの複雑さの程度として考えられるのではないか。

また，Baroody(2007)は，新しく「基礎となる考え」というものを定義している。ここでいう「基礎となる考え」とは原文では「Big Ideas」であり，直訳すると大きい考えとする方が適切かもしれない。しかし，筆者はこの前後の文脈から考えて，基礎となる考えと訳すことが妥当であると判断し用いることにする。Baroody(2007)は，基礎となる考えを次のように定義している。

> 要するに，基礎となる考えは，うまく関係していて，うまく体系化されて，抽象的で，正確な知識(手続き的知識と概念的知識の深い理解)を構成することに絶対に必要なように思われる。(p.125)

Baroody(2007)は,「等しく分割すること」の基礎となる考えは，単位原則，偶数，分割，分数，測定，意味の概念を理解することの中心に存在することであるとしている。

3.4. Star(2007) による Star(2005) と Baroody(2007)との一致点，不一致点

Baroody(2007)の後，Star(2007)によって Star(2005)と Baroody(2007)との一致点，不一致点が示されている。Star(2007)によって一致点として挙げられているものは次の三つである。

① 数学教育者が「一定で明確な」手

続き的知識と概念的知識の定義を持たないこと
② 過去に何人かの数学教育者は暗唱の知識と手続き的知識とが一致していたということ
③ 手続き的知識と概念的知識とが両方とも生徒の数学学習の重大な重要性をもつこと(p. 132)

Star(2007)による Star(2005)と Baroody(2007)との不一致点としては，次のものが挙げられている。

① 数学教育者が手続き的知識の狭い視点を保持し続けるかどうかについて
② 深い手続き的知識そのものについて(pp. 132-133)

不一致点の②である深い手続き的知識そのものの相違点として Star(2007)では，Baroody(2007)にとっては深い手続き的知識を得るためには手続き一つ一つの概念的基礎を持っている必要があり，Star(2005)にとっては概念的基礎を持つ必要がない，と主張している。手続きの概念的基礎とは，知識情報の比較的少なくはない結びつきと考えることができる。

3.5. 先行研究から得られる手続き的知識と概念的知識の示唆

これまで手続き的知識と概念的知識を考察してきたが，これらから筆者の手続き的知識と概念的知識に関する見解をまとめると以下の二つになる。

一つ目は，生徒の手続き的知識と概念的知識を見る際，シェマと同様の役割を果たす知識情報のネットワークと比較しながら考察できることである。

二つ目に，Star(2005)による浅い，深いの分類は有効であることである。なぜなら，手続き的知識，概念的知識という二分化した見方ではなく，浅い，深いという視点を入れることによって，知識の形成過程を見るための視点を得られる可能性があるからである。

4. 我が国における生徒の手続き的知識と概念的知識とを扱った研究

本節では，我が国における手続き的知識と概念的知識を扱った幾つかの先行研究を述べていく。

4.1. 鈴木＆清水(1989)による研究

鈴木＆清水(1989)は生徒の誤りの事例を取り上げ，それぞれの誤りを手続き的知識，概念的知識を用いて捉えることでその誤りの原因を指摘することを研究の目的としている。

鈴木＆清水(1989)は五年間にわたり鈴木の勤務校において，高校 1 年生全員に「二次不等式 $x^2-2x+2>0$ を解きなさい。」という問題を簡単なグラフを提示した上で出題した。この問題に対し，以下のような誤答が現れたとしている。

- $x=1\pm i$
- $1\pm i<x$
- $x<1-i, 1+i<x$
- 解なし(D を計算すると D＞0 だから)
- わからない(p. 114)

これらの誤答それぞれに対して鈴木＆清水(1989)は生徒の手続き的知識と概念的知識とを考察している。

ここで，同じ誤答をした生徒それぞれが持つ手続き的知識と概念的知識が全く同じであるとは考えにくい。一人一人の生徒を対象としたインタビューなどにより，知識の形成過程を丁寧に見ていく必要があるのではないか。

4.2. 山本ら(1992)による研究

山本ら(1992)による研究グループは「量と

測定」の研究をしてきたグループである。山本ら(1992)は佐伯(1983)による理解の四つの要因

①　具体的な問題が解決できること
②　ものごとの根拠が示せること
③　現実の社会・文化が結びつくこと
④　関連する社会が広がること(p.164)

という理解についての考え方を基に，面積の学習における「浅い理解」から「深い理解」への四階層を自ら考えだしている。

次の図２が山本ら(1992)による面積概念における理解の階層モデルである。

A	B	C	D
たて×よこの式が使える	たて×よこの式が使える	たて×よこの式が使える	たて×よこの式が使える
	単位面積のいくつ分が想起できる	単位面積のいくつ分が想起できる	単位面積のいくつ分が想起できる
		普遍単位が生み出された過程がわかる	普遍単位が生み出された過程がわかる
			より広い所より狭い所を測定する時にどの単位が有効かが分かる

図２.　山本ら(1992)による面積概念における理解の階層モデル(p.40)

山本ら(1992)は図２におけるD階層の生徒が「深い理解」に達した状態であり，また，現実の授業ではB階層で止まっていることが多いと述べている。また,「公式化」を急ぎすぎるために「浅い理解」にあたるA階層で止まっている生徒も多いと述べている。

この山本ら(1992)による理解の階層モデルにおいて手続き的知識と概念的知識とを考えると，A 階層の生徒は計算式を扱える点で面積の手続き的知識を持つが単位面積について理解していない点で概念的知識はまだ持っていないと考える。また，B，C，D 階層の生徒も手続き的知識は持っているが，概念的知識についてはB階層よりもC階層が深く，C階層よりもD階層が深いと考えることができる。

この山本ら(1992)による理解の階層モデルは生徒の理解の程度を分類するためには一目にはわかりやすい。しかし，生徒の面積概念をこの四階層のみで分類することはできないのではないか。生徒の学習過程を直接的に扱い，知識の形成過程を見る研究が必要なのではないか。

4.3.　礒田(1999)による研究

礒田(1999)は，考えの拡張場面で現れる生徒の考えを概念的知識(意味)，手続き的知識(手続き),ミスコンセプション(過般化／過度の一般化，過り)という語で説明している。

礒田(1999)は，意味とは「～は・・・である」と表せる内容であり，定義や性質，根拠を基にした推論などが該当するとしている。

礒田(1999)は,「(略) $\sqrt{2}$ は 1.4142 であり，$\sqrt{3}$ は 1.732 である。だから左辺は $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\fallingdotseq 1.4142\times1.732\fallingdotseq 2.449$ である。(略)(p.9)」というようにこれらは「～は・・・である」と表されており，教師の側からみれば意味説明であるとしている。

手続きとは,「～ならば・・・しなさい」と表せる内容であり，やり方や書き方，形式，無意識に進む計算，暗算などが該当するとしている。

礒田(1999)は,「$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ の近似値を求めたいならば，$\sqrt{2\times3}$ の近似値を求めなさい。(p.10)」という手続きは，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ という意味からただちに得られると述べている。

５.　おわりに

本論文では，手続き的知識と概念的知識とから生徒の知識の形成過程を捉えるための視点を得るために先行研究を考察してきた。概

念的知識の形成を主眼におきながら手続き的知識においても，知識情報のネットワークの形成を行うことの必要性が文献からも考察できた。また，生徒の知識の形成過程を見ることの重要性を考察できた。生徒の活動を知識の形成過程で見るということは，理論的には知識情報のネットワークの形成過程として手続き的知識や概念的知識の形成過程を見ることができることになる。

筆者の今後の課題としては，教師主導型の授業になりがちである高等学校の数学の授業において，生徒の知識の形成過程を観察し考察していきたいと考えている。

引用，参考文献

Baroody, A. J., Feil, Y., ＆Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115-131.

Hiebert, J. ＆Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics : An introductory analysis. In J. Hiebert(ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge : The Case of Mathematics*(pp. 1-27). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum.

礒田正美，原田耕平．(1999)．生徒の考えを生かす問題解決授業の創造：意味と手続きによる問いの発生と納得への解明．明治図書.

佐伯胖.(1983).「わかる」ということの意味：学ぶ意欲の発見．岩波書店.

Skemp, R. (1973). 数学学習の心理学.（藤永保／銀林浩訳）．新曜社.

Skemp, R. (1992). 新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－.(平林一榮監訳)．新曜社.

Star, J. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*, 404-411.

Star, J. (2007). Foregrounding Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 132-135.

鈴木康博，清水克彦．(1989)．数学学習における概念的知識と手続き的知識の関連についての一考察：誤りの分析から思考の開発へ向けて．筑波数学教育研究, *8*, 113-125.

山本滋基ほか７名．(1992)．算数教育における「理解」の研究－面積学習における「理解の階層」についてー．日本数学教育学会誌, *74*(2),38-43.