

数感覚を重視した分数の理解に関する研究

進藤 芳典

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

子どもは分数の理解に困難を示すことが多い。「分数のできない大学生」という本が出版されて久しいが、今や分数を習う小学生だけでなく、大学生にまで分数の理解の困難性は広がっていると考えられる。

分数の中には、 $1/2$ や $1/10$ などの日常生活で比較的良好に使う分、捉えやすい分数もあり、 $6/7$ や $9/5$ など日常生活であまり使わない捉えにくい分数もある。特にこの捉えにくい分数に理解の困難性があると考えられる。

分数理解の困難性の原因は、分数理解の仕方にあると考えられる。個々の児童は、分数を小数やわり算、図などによって独自に捉えるが、分数には様々な意味があり、その意味がきちんと捉えられていないため、その捉え方と分数の意味が結びついていないことが起こり得る。分数を理解する過程における知識の結びつきを詳しく見ていくことによって、分数の理解に関する有効な知見を得られるのではないかと考えた。

2. 研究の目的

上記で述べたような知識の結びつきを見ていこうとすると、McIntosh(1995)が、次のように述べていることが参考になった。

《数感覚(Number Sense)は、個人の数や演算に関する一般的な理解に関連する。この一般的な理解は、数学的な判断を行うためにこの理解を柔軟に使ったり、数や演算

を扱う際に役立つ効果的なストラテジーを発達させたりする能力や傾向を伴っている。》 (McIntosh, 1995, p24)

これは、数の理解を柔軟に扱う感覚について述べているが、その扱い方については、個人個人によって違っているということである。確かに、分数を理解する際にも、小数やわり算、図などを利用する様々な方法がある。そのため、分数を理解する方法の仕方は個人個人によって異なったものになっていると、先に述べた知識の結びつきに、この「数感覚」が深く関わっているものと考えられた。

本稿では、McIntosh(1995)が述べる「数感覚」の枠組みを基盤にして、小数やわり算、図などの個人個人の独自な捉え方と分数の意味との結びつき、特に商分数を扱う単元に焦点を当てて、児童の分数の理解の様相について明らかにしていきたい。

その方法として次のように考えた。まず、授業における児童の分数の理解の様相を踏まえ、その上で、知識、数感覚とその結びつきを重視した授業後の調査及びインタビューを行い、児童の分数に関する知識とそこに認められる数感覚の関係を明らかにし、数感覚を重視した分数の理解という捉え方とその重要性を考察していく。

3. 数感覚について

3.1. 先行研究における数感覚の捉え

数感覚に関する先行研究における数感覚の

捉え方を次に示す。

NCTM(1997)では、数の関係についての直観には、数感覚が必要であるとして、次のように述べている。

「よい数感覚を持つ子どもは、[1]数の意味をよく理解しており、[2]数の間の様々な関係を発達させており、[3]数の相対的な大きさをわかっており、[4]数に関する演算の相対的な効果を知っており、[5]彼らの身の周りに共通してある対象物や場面の測定に対する対照物を発達させている。」

(NCTM, 1997, p43)

これは、数感覚について本人が有する効果的な知識の点から論述したものである。

銀島(1994)は、数感覚について次のように述べている。

「問題場面や状況・目的に応じて、数及び演算の意味や性質、関係を適切に関連づけるもの」

(銀島, 1994, p199)

このように関係性を強調するとともに、銀島(1995)では、数感覚を記述するための6つの観点として「対象」「場面」「目的」「方法」「妥当化の手段」「結論」を挙げている。

酒井(1999)、数感覚について次のように述べている。

「数感覚とは、数や演算に関する問題解決場面において、状況・目的にそった数及び演算の捉え方に気づき、数及び演算の理解の各々を関連付けるもの。」

(酒井, 1999, p26)

ここでは、情報を関連づけることによって、新たなことに気づき、それが情報として何かに結びつくという「気づき」と「関連付け」のサイクルが数感覚であるとしている。

Sowder(1992)は、数感覚の特徴として次の4つを挙げている。(酒井(1999)の訳を参照)

「(a)人が数と演算の特性を関係付けるためのよく組織化された概念のネットワークである。(b)数比較、計算の非合理的な結果の認識、そして暗算や見積もりにお

ける非標準的なアルゴリズムの形式に必須の質的、量的判断をするために、数の絶対的、相対的大きさを使用する能力において認識されるものである。(c)数に関する問題を解決する柔軟で創造的な方法によって示されることができる。(d)簡単に教えられるものでもなく、簡単に測られるものでもない。」

(Sowder, 1992, p4) ここでは、数感覚が「概念のネットワーク」であるとし、その関係性を強調している。

杉山(1990)は、「数に対する感覚」として次のように述べている。

「数に対する感覚は、初めから感覚として存在するのではなく、初めは知識として学ぶのであるが、それが感覚的に浮かんでくるまでに自分のものになること、そのようになるように数を多面的にとらえ、親しませることによって育ってくるのではないだろうか。」

(杉山, 1990, p8)

これは、知識として学んだものが、数を多面的に捉えることや、親しませることによって感覚になる、すなわち、知識が結びつくことによって感覚になる、と捉えている。

これらの先行研究はすべて、数感覚あるいは数に対する感覚を捉える上では、知識あるいは数感覚同士の結びつきやそれらの相互関係に着目してみていくことが必要であると示唆していることに注意しておきたい。

3.2. McIntosh(1995)の数感覚を考えるための枠組み

数感覚の先行研究として、NCTM(1997)、Sowder(1992)、杉山(1990)、銀島(1994)、酒井(1999)を取り上げ、数感覚を捉える上で重要となる視点を考察した。ここでは、本稿で中心的に取り上げているMcIntosh(1995)の枠組みを、次の表1に示す。このように、McIntosh(1995)の枠組みは、大きく「数」「演算」「活用」の3つに分けられており、数感覚が捉えやすく工夫されている。また、

Verschaffel(2007)では、McIntosh (1995)の枠組みを「基本的な数感覚の一般に認められた要素のいくつかをはっきりさせて、組織して、相互に関係づける構造を明瞭に表現する最も広範囲で最も影響力あるもの」と評している。これらのことから、本稿における数感覚を捉えていくための主な視点をこの McIntosh (1995)の枠組みにおき、前節で押さえた数感覚の捉え、特にそれらの関係性を留意しながら、考察を進めていくことにした。

表 1. McIntosh (1995)の数感覚を
考えるための枠組み

1. 数に関するもの	1.1 数の規則性に対するセンス
	1.2 数の多様な表象
	1.3 数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス
	1.4 ベンチマークシステム
2. 演算に関するもの	2.1 演算の効果についての理解
	2.2 数学的な性質についての理解
	2.3 演算間の関係についての理解
3. 数と演算の活用に関するもの	3.1 問題の文脈と必要な計算との関係を理解すること
	3.2 多様なストラテジーが存在することの認識
	3.3 効率のよい表象や方法を利用する傾向
	3.4 感覚的にデータや結果を吟味する徴候

しかし、この枠組みは、数全体に関しての枠組みであり、分数に関して限定したものではない。分数の理解についても、表に挙げた枠組みが十分なものかどうかを確認していく必要がある。本稿では、これらの枠組みを分数の理解において検証していく。

3.3. 本稿での数感覚の捉え方

前に述べた、先行研究の数感覚の捉え方を参考にしながら、本研究における数感覚を筆者は、次のように捉えることにする。数の知識として学んだものが結びつき、数の知識が相互に関係し合うことによって、数の知識が数の感覚となる。それを数感覚といい、さらに、その数感覚同士が相互に関係し、結びつくことによって数感覚が育っていくと考える。

4. 分数について

4.1. 分数の理解に関する先行研究

分数の理解に関する先行研究について次に示す。能田(1981)は、次のように述べている。

「“等しく分ける分数”の意味は子どもの日常経験から、“等しく”と“分ける”の両面から正しく理解しており、教師の指導を待つまでもないものもあった。(中略)分数に関する計算ができるのであるが、そこで行われている計算の意味、あるいは、操作の意味を尋ねると、ほとんどわかっていないのである。」 (能田, 1981, p14)

これにより、日常経験で扱う分数に関しては、日常経験と結びつけることによって分数を指導できる。しかし、日常経験で使わない分数に関しては、数を整数として捉えるイメージがあり、困難であることが考えられる。

仲田(1983)は、「児童のもつ常識と分数量習のズレ」として整数と分数の違いを分数の特性としていくつか例を挙げている。その中で、本研究に関係のあるものとして下記の 3 つがある。

「イ. 1 つの数をいろいろな形でかけることのふしぎ」

「ウ. 1 つの数にいくつもの意味、解釈がつけられることの煩雑さ」

「オ. 小数になおすと、循環小数という無限小数になる」 (仲田, 1983, p7)

これらは、本稿での研究の中心となる商分数に関係すると考えられるものである。これにより、子どもの中では整数と分数は異なる世界が展開されており、分数の捉え方は独特なものであることが考えられる。

井ノ川(1993)では、図や数直線、小数などに対応する「理解のモデル」(子どもの理解の様相を表象と捉え、それが表現となって表れるもの)を導入することが有効であると述べている。すなわち、そうすることによって、理解の様相が想定し易くなるということが述べられている。これにより、数を多様な表象

として表すことにより，理解の様相が捉えやすくなることが考えられる。

4.2. 分数の意味について

多様な意味を持つ分数について小学校学習指導要領解説編(1989)と有田・三輪(1959)，筑波大学附属小学校(1990)，仲田(1993)，数学教育学研究会(2001)の研究を比較検討した(進藤，2009，p27)。その上で，筆者は，分数の意味を次の7つに分類した。

- ①分数 (量(kg, lなど))
- ②分割分数 (1を○等分した1つ分)
- ③操作分数 (1を○等分した○つ分)
- ④商分数 (○を○等分した1つ分)
- ⑤の付き分数 (○を○等分した○つ分)
- ⑥割合分数 (2つの量の関係的見方であること)
- ⑦蓋然性を表す分数 (確率を表す分数(○回中，○回))

ここでは，特に③操作分数と④商分数に焦点を当てて検討していく。

4.3. 分数の授業について

4.3.1. 小学5年生での教科書に見られる分数の授業の流れ

ここでは，分数の理解過程を分析する準備として，数の多様な表象という数感覚に関わる操作分数や商分数の扱いに着目し，いくつかの教科書の内容を比較した。

教科書の内容を比較することで，同値分数の導入としては，「数直線を用いて導入する場合」と「分数の表し方から考えて導入し，数直線で確認する場合」という2つのパターンがあった。次に，同分母分数のたし算・ひき算を学習している。そして，整数のわり算の商を分数に表す。その次に，「分数倍について学習した後に分数とわり算，小数の関係を理解させる場合」と，「分数倍を学習せずに分数とわり算，小数の関係を理解させる場合」の2つのパターンがあった。そして，分数と小

数あるいはわり算を結びつけていた。

4.3.2. 教科書に見られる商分数の授業の流れについて

ここで，実際の教科書でのわり算を分数に表す，商分数の場面についてみる。

① わり算と分数

① 2ℓの飲み物を3等分します。
1つ分の量は何ℓになるでしょう。
式

① $2 \div 3$ の商を分数で表すことを考えましょう。

2ℓを3等分した1つ分の量は，右のように表せます。

それは，1ℓを3等分した量の2つ分とみられます。

2ℓを3等分した1つ分の量は， $\frac{2}{3}\ell$ です。

$2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 答え $\frac{2}{3}\ell$

図1. わり算を分数に表す問題(1)
大日本図書(2004)

この図1は2ℓを3等分する図として2つあげられている。1つは，「2ℓという大きな入れ物を3等分した1つ分が $\frac{2}{3}\ell$ と表す方法」，もう1つは，「1ℓを3等分したものの2つ分が $\frac{2}{3}\ell$ と表す方法」である。ここで，前者は商分数を表わし，後者は，操作分数を表わしている。これにより，操作分数の $\frac{2}{3}$ とは違う $\frac{2}{3}$ があることが図によってわかる。児童の既習事項は，操作分数であるため，この図の流れは，子どもの理解とそぐわないことが考えられる。そこで，商分数の理解につなぐために図1の問題の後に図2の問題がある。

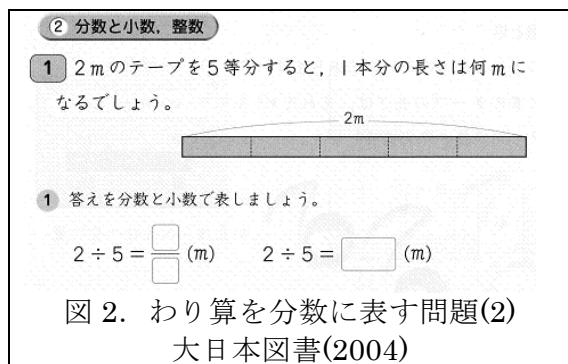


図 2 は、2m を 5 等分している図である。この図より「2 を 5 等分した 1 つ分」と捉えることができ、この図 2 のテープ図を用いて $2/5$ を商分数として $2 \div 5$ と結びつけることができる。また、小数と結びつけることも考えられる。

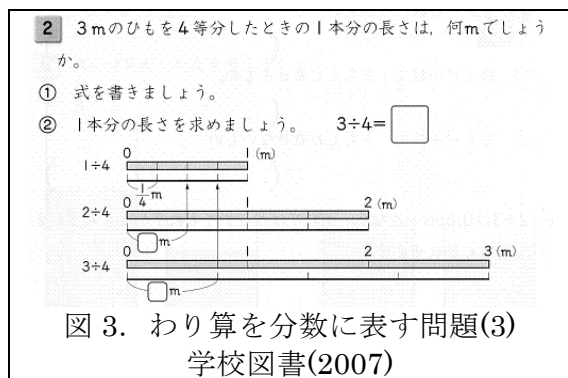


図 3 は別の教科書であるが、図 1 のような問題が終わった後に行う問題である。この問題は、1 を 4 等分する問題と 2 を 4 等分する問題と 3 を 4 等分する問題が並列にあるため、商分数を捉えやすくなっている。そのため、 $2 \div 4$ と $3 \div 4$ だけでなく、分割分数として捉えてしまいやすい $1 \div 4$ に関しても、 $2 \div 4$ と $3 \div 4$ と結びつけることによって、商分数として捉えやすくなっている。それによって、全体が 1 の場合は分割分数と商分数という 2 つの分数の意味があるとして、分数の意味同士が結びつくということも考えられる。

5. 数感覚を重視した分数の理解について

これまでに述べた数感覚の捉え方と分数の意味と理解過程の分析をもとに、数感覚という枠組みを用いて、分数の理解の結びつきを

みていきたい。次の 3 点に留意して、本稿における数感覚を重視した分数の理解について述べていくことにする。

- (1) 今まで述べてきた数感覚は、数全般についてのものであり、分数に関してだけのものではない。ここでは、分数に関してのものに焦点をしばっていく。
- (2) 分数に関しては様々な意味があり、その捉え方が難しいということがある。そこで、分数を理解する上で、分数の意味が結びついているかを中心にして確認していく。
- (3) 分数の理解とそこに認められる数感覚の関係に着目し、児童の分数の理解過程を検討していく。

6. 調査と授業の概要

6.1. 調査について

調査は、授業観察とインタビュー調査の 2 つである。いずれも、ビデオ撮影により全データを収集し記録した。

授業観察の対象は、新潟県の小学校 5 年生、児童 33 名のクラスにおいて、2007 年 12 月 11 日から 2008 年 1 月 15 日までの期間に、算数担当教諭によって行われた分数の単元全てに亘る 10 時限の授業である。

インタビュー調査は、2008 年 2 月 4 日から 2 月 6 日までの期間に、抽出児童 3 名それぞれに対し筆者が行った。調査問題は、教科書と類似の問題を用いて、数感覚を重視した分数の理解に焦点化し、作成した。その問題をもとにした 1 人 1 時間程度のインタビュー調査である。

以下では、授業観察での授業の概要を示すとともに、児童が授業でどのように分数を理解しているかについて述べる。さらに、調査で用いた問題の作成意図について述べ、インタビュー調査におけるプロトコルを数感覚という枠組みを用いて分析する。

6.2. 授業の概要

今回、実際に授業観察を行った授業の全 10 時限の流れを表 2 に示す。

表 2. 授業観察を行った授業の流れ

	実際の授業の流れ
第 1 時	1/2 をいろいろな方法(図やパターンプロックなど)で表すことができる。
第 2 時	1/2 と同じ大きさの分数の見つけ方がわかる。
第 3 時	数直線やパターンプロックを用いて他の分数も、いろいろな分数で表すことができる。
第 4 時	同分母分数の加減のしかたを理解する。和が仮分数になった場合の処理のしかたを理解する。
第 5 時	同分母分数の減法で帯分数から引く場合の処理のしかたを理解する。 2 個のリンゴを 3 人で分けたときの 1 人分の量の表し方を考える。
第 6 時	わり算を小数や分数に直すことができる。分数や小数をわり算に直すことができる。
第 7 時	小数を分数やわり算に直すことができる。
第 8 時	問題練習
第 9 時	問題練習
第 10 時	テスト

表 2 の授業観察の中で第 5 時の商分数に關しての授業の内容を簡単に示す。

商分数の導入として「りんごが 2 こあります。3 人でなかよく分けます。1 人分はいくつでしょう。」という問題を行い、児童は、0.666…と 2/3 という答えを出した。これに対して教師は、2/3 の方がすっきり表せると説明した。次に教師は 2÷4 が 0.5 と 2/4 になることから、「わり算は分数や小数で表すことができる」、「分数や小数はわり算で表すことができる」と説明した。

6.3. インタビュー調査の概要

ここでは、対象児童の 3 人(Tana, Age, Matsu)のインタビューでの商分数について分析する。インタビューでは次の 6 題の問題を行った。

1. 次の分数の組で、大きい方に○をつけよう。等しいときは、両方に○をつけよう。
- (1) $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{9}\right)$

2. 次の計算をしましょう。

(1) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ (2) $1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

3. 商を分数で表わしましょう。

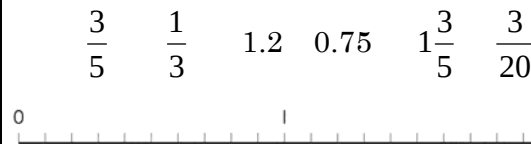
$3 \div 4$

4. 20 のジュースを 3 人で等しく分けました。1 人分を求めましょう。またその理由を説明しましょう。

5. 小数は分数に、分数は小数に表しましょう。

(1) 0.2 (2) 0.13 (3) $\frac{3}{4}$

6. 次の数を、下の数直線の上に↓で表しましょう。



問題 1 は、同分母分数、同分子分数、同値分数の大きさ比較を行う問題である。問題 2 は、同分母分数のたし算・ひき算を行う問題である。問題 3 は、わり算の商を分数で表す問題である。問題 4 は、わり算を立式し、商を求める問題である。問題 5 は、小数を分数、分数を小数に表す問題である。問題 6 は、分数と小数を数直線にプロットする問題である。

本稿では、問題 3 と問題 4 を中心に分析する。ここで、問題 3 と問題 4 については教科書での順番通りではなく、あえて順番を入れ替えて行った。その出題意図としては、問題 3 で故意的にわり算の答えが分数になることを意識させてから、わり算の問題を行うことによってどのように答えるかをみるために入れ替えた。それ以外の問題に関しては教科書での流れ通りに出題した。

6.4. インタビューの分析

6.4.1. 問題 3 について(Tana と Age の場合)

Tana と Age は問題 3 について答えること

ができた。そこで、答えをどのようにして求めたかを聞くと、授業あるいは塾で割られる数は分子、割る数は分母であると教えられたことは覚えていたが、それを教えられたとき商分数に関する詳しい説明を受けていなかったため、その答えの説明はできなかった。よって、この問題に対して答えは出せてはいるが、商分数については理解していないといえることができる。

わり算を分数で表すことはできたが、この場合「機械的」に答えを求めている。これを McIntosh(1995)の数感覚の枠組みを用いてみると、「1.2 数の多様な表象」の中にある「整数の演算」という数感覚と「2.1 演算の効果についての理解」の中の「等しい値」という数感覚が結びついているとは言えない。

6.4.2. 問題 3 について(Matsu の場合)

Matsu は問題 3 について正しく答えることができた。Matsu に、答えをどのようにして求めたかを質問すると、わり算を小数に表して説明した。わり算を小数に表すことによって、小数と分数を結びつけていた。これにより、「整数の演算」という数感覚と小数としての「等しい値」という数感覚が結びついていることが考えられる。また、わり算を小数に表すことによって、筆者がなぜ $3/4$ になるか、 $4/3$ はなぜ間違っているかを質問すると、小数と分数を結びつけて説明した。それより、Matsu 自身わり算の答えが、なぜ分数として表すことができるかを確認することができていた。これより、McIntosh(1995)の数感覚の枠組みを用いてみると小数と分数の「等しい値」という数感覚が、「整数の演算」という数感覚として結びつくことによって、「1.2 数の多様な表象」の中の「数の種類間の関係」という数感覚ができていると考えられる。

6.4.3. 問題 4 について(Tana の場合)

Tana は問題 4 について $2 \div 3$ の式を立て、

それを計算して $0.666\cdots$ と求めた。それを見積もって 0.6 と答えた。ここでの「整数の演算」という数感覚と小数としての「等しい値」という数感覚は既習事項であるため、結びついているといえる。

次に、他に表し方がないか聞くと「分数で表せば簡単だけど。」と答え $2/3$ と表した。そこでさらに $2/3$ の図を書いてもらおうとした際、Tana は $2/3$ の図について「3 個に割ったうちの 2 個分」と説明して図 4 を書いた。この図は説明をもとに「1 を 3 等分した 2 つ分」という操作分数を表わした図であって「2 を 3 等分した 1 つ分」という商分数を表した図ではない。そうであれば、2 を 3 等分した図になるはずである。これにより、この場合児童の捉えは商分数でないことがわかる。よって McIntosh(1995)の数感覚の枠組みを用いてみると、分数としての「等しい値」という数感覚が「1.2 数の多様な表象」の中の「図的表記」という数感覚が結びついていないことがいえる。さらに分数としての「等しい値」という数感覚が「整数の演算」という数感覚と結びついていないとも考えられる。

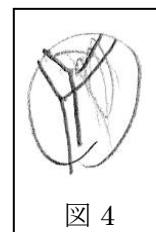


図 4

6.4.4. 問題 4 について(Age の場合)

Age は問題 4 について 10 が 2 つで 20 になり、20 を 3 人で分けると考えていた。これは、1 以外の数を分解することができているため、「等しい値」という数感覚と捉えることができる。しかし、20 を分けるということを理解していたが、Age の書いた図 5 から考えると Tana と同様に答えを操作分数として捉えていることが考えられる。1 以外の数を分解することはできているが「図的表記」という数感覚として分解できていないため、分数としての「等しい値」という数感覚と「図的表記」という数



図 5

感覚が結びついていないことが考えられる。

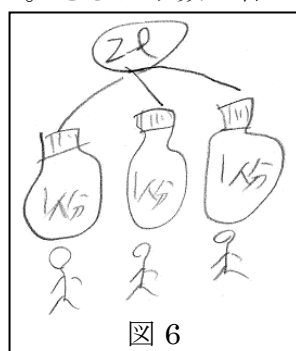
また他に答えがないかと聞くと、小数で表すが $0.666\cdots$ と続いてしまい割り切れないので自信がない様子であった。

6.4.5. 問題 4 について(Matsu の場合)

Matsu は問題 4 について $2 \div 3$ の式を立て、それを計算する際 $0.666\cdots$ となってしまう自信がない様子であったが、見積もって 0.67 と答えを出した。そこで筆者が式について、なぜ $2 \div 3$ にしたのか、なぜ $3 \div 2$ ではないのかと聞くと 3 人を 20 のジュースで割ると考え $3 \div 2$ で出てくる 1.5 は 3 人分で 3 倍しても 20 にならないと、説明したことから、Matsu は「20 を 3 人で割ると 1 人分のジュースの量が出る。」ということを理解していたと考えられる。これより、McIntosh(1995)の数感覚の枠組みを用いてみると、「3.4 感覚的にデータや結果を吟味する徴候」の中の「計算の合理性が分かる」という数感覚があるといえる。

小数の答えは出せたが、分数の答えが出てこなかったもので、こちらから問題 3 をもとに誘導するような質問すると $2/3$ という答えが出てきた。その $2/3$ という答えに対して Matsu は「分数を使えば小数で表せない数も表せる」と説明していた。さらに小数の答えに対しては $0.666\cdots$

と続いてしまうので「違うと思う」とも答えていた。最終的に Matsu は $2/30$ と答えを書いた。この問題に関して図 6 を「図的表記」という数感覚と考



える。20 を分けるという説明を「計算の合理性が分かる」という数感覚と考える。このとき、この 2 つの数感覚が結びついていることがわかる。しかし、「図的表記」という数感覚で捉えているが、それは分数として「等しい値」という数感覚と結びついているかどうか、

つまり、答えを商分数として捉えているかどうかは、本調査においては確認できなかった。

6.4.6. 問題 4 について(3 人の共通点)

3 人に共通していることは、小数で表すと無限小数になってしまったため、分数で表した方がよいと考えて、分数を答えとしたことである。これは、小数と分数が「等しい値」という数感覚として結びついていないといえる。しかし、ここには McIntosh(1995)の枠組みにないが、杉山(1999)がいう「数の美しさに対する感覚」という数感覚が含まれていると考えられる。

6.4.7. 問題 6 の一場面(Age の場合)

児童が問題 6 を解いた後に筆者が「 $1/2$ より小さいものはどれか」という質問をした。この質問の意図としては、数直線に問題 6 の答えをプロットし、 $1/2$ をベンチマークとして、分数と小数の大きさを比較できるかを確認した。

21239	T	さっきこっち(数直線の 1)が 2 分の 1 っていかなかったっけ?
21240	Age	え?これ、こう(数直線の 0 から 2 を 1 として)やって考えたから。
21241	T	こう(数直線の 0 から 2)やって考えるとここ(数直線の 1)が 2 分の 1 で、こう(数直線の 0 から 1)やって考えるとここ(数直線の $1/2$)が 2 分の 1 なんだ。
21242	Age	ここ(数直線の $1/2$)が 2 分の 1 で。
21243	T	両方(数直線の 1 と $1/2$)とも 2 分の 1 なんだ?
21244	Age	えーあーさっき考えたんだけど 2 分の 2 で 1 になっても、ここ(数直線の 2)書いてあるのが 2 だから、ここ(数直線の 2)じゃないなと思って、こっち(数直線の 1)側にした。

(数直線の 2 を 1 として捉えたものを、数直線の 1 を 1 として捉えを修正する場面)

上記のプロトコルで、Age は問題の数直線の上の 2 を 1 として捉え、その半分である 1 を $1/2$ として捉えた。しかし、 $2/2$ が 1 になることから数直線上の 2 を 1 として捉えたも

のに対して違和感を持っていることが考えられる。そのため、数直線上の 1 を 1 として捉えを修正した。

ここでは、何を等分しているかがわかっていないということから、1 以外を等分する「1.4 ベンチマーク」の中の「数学的なシステム」という数感覚が不十分であることが考えられる。

6.5. 考察

今回のインタビュー調査を通して次のような児童の分数の理解の様相が確認できた。

- ・問題 3 では、答えは出せるが、その説明ができないという場面があった。
- ・問題 3 では、その関連の問題を取り扱った授業のときは、それ機械的に答えていた。しかし、インタビューで疑問を投げかけると、独自の方法でわり算を小数に表し説明した。そして、小数と結びつけることによって理解することができていた。
- ・問題 4 において、わり算を分数に表すことに関する計算はできていたが、わり算の商とそれを表す図が結びついていなかった。
- ・問題 4 において、無限小数と分数で表すことに関して、分数で表した方がいいという意識、すなわち分数で表すことの「よさ」の認識が認められた。
- ・問題 6 において、数直線上の 2 を 1 として捉えることに違和感を持っており、1 以外の数を等分することへの困難性が認められた。
- ・全体の流れを通して、児童が問題の答えを機械的に導けることに満足してしまい、その後の数感覚を伴った分数の理解に至らないことが多い。

この中で特に、分数の意味の違いの捉え方について注目してみると、次のことがわかる。商分数の $\frac{2}{3}$ と操作分数の $\frac{2}{3}$ は答えとしては同じであるが、既習の知識があることや計算ができるということから、操作分数という

捉え方をしてしまい、商分数という新たな捉え方には至っていないように見られる。

また、教科書や授業では、商分数において小数と整数と結びつけることが重要視され、商分数の意味に関してはあまり意識されていないことが多い。分数 $\bigcirc/\triangle$ には大きく「1 を $\triangle$ 等分した $\bigcirc$ つ分」と「 $\bigcirc$ を $\triangle$ 等分した 1 つ分」という 2 つの捉え方がある。特に後者の 1 以外の数をいくつかに等分すること、すなわち商分数の意味を理解させていく必要がある。

7. まとめ

本研究は次の 2 点にまとめることができる。

- (1) 児童は、分数に関する数感覚を身に付けていなくても、分数の計算や分数問題の答えを機械的に出すことは可能である。しかし、そのことだけでは分数の理解に至っているとはいえない。児童が問題の答えを導けることに満足してしまい、その後の数感覚を伴った分数の理解を妨げているということを、本稿で数感覚という枠組みを適用することによって、明らかにすることができた。わり算などの演算によって機械的に導き出した答えとしての分数には、McIntosh(1995)の枠組みにおける数感覚である「1. 数に関する知識と、数をうまく扱うこと」の中の、特に「1.2 数の多様な表象」の「図的表記」という数感覚や「1.4 ベンチマーク」の「数学的なシステム」という数感覚などが伴っていないのである。この「図的表記」という数感覚や「数学的なシステム」という数感覚の辺りに分数独自の数感覚があると考えられるが、このことは今後調べていく必要がある。
- (2) 調査における問題 4 への Matsu の対応などから考えると、数感覚という枠組みを構成する要素同士は、互いに密接な関係を持ちながら、児童が算数を意味のあるものと捉えるよう導くものであるといえる。ただ

このことは、本調査によって確認するまでには至らなかった。しかし、分数の意味理解においては、数感覚とその結びつきを重視した分数の理解という捉え方が、重要となる。このことは本調査によって裏付けられたと考える。また、分数の単元全体を通しては、数感覚を捉える枠組みを用いた児童の分数の理解過程とその状況に対する検討が重要である。このことも結論できる。さらに、これらのことに留意して行う教授は、他の単元においても、算数・数学の数感覚を伴った学習につながるものと考えられる。

8. 今後の課題

本研究においては同値分数や商分数を中心に検討したが、分数の単元全体について検討を行い、さらに、数感覚の発達の障害を取り除き、児童に数感覚を育成するための授業を考えていくことが今後の課題である。

引用・参考文献

- 有田逸朗・三輪辰郎. (1959). 分数・小数の新しい指導. 藤原政雄, 18-28, 136-137, 明治図書出版株式会社.
- 銀島文. (1994). 子どもの数感覚を記述するための観点. 数学教育論文発表会論文集, 27, 197-202.
- 銀島文. (1995). 数感覚に関する目的の有効性. 数学教育論文発表会論文集, 28, 255-260.
- 橋本吉彦. (2004). 新版 たのしい算数 5下. 大日本図書.
- 一松信. (2007). みんなと学ぶ 小学校 算数 5年下. 学校図書.
- 井ノ川茂徳. (1993). 分数の学習に関する研究 ―子どもの表現と「理解のモデル」を視点にして―. 上越数学教育研究, 8, 59-68.
- 文部省. (1989). 小学校学習指導要領解説編. 東洋館出版社.
- 仲田紀夫. (1983). 分数の教科心理学的分析 ―算数教育における分数の無用論の背景―. 数学教育学会誌, 65, 6, 2-9.
- NCTM. (1997). 数感覚と十進法. 能田伸彦 (監修), 21 世紀への学校数学の創造 米国 NCTM による「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」(pp.43-46). 筑波出版会
- 能田信彦. (1981). 子どもの分数量学習に関する研究 ―指導前と指導後における分数理解の調査を中心に―. 日本数学教育学会誌 臨時増刊 数学教育学論究, 63, 1-18.
- 岡田禎雄, 橋本正継. (1991). 分数と計算. 数学教育学会, 新算数教育の理論と実際 (pp.106-117). 聖文社.
- Rey, B.J., Rey, R.E., & McIntosh, A. (1995). 数感覚とは何か. 伊藤説朗, 小学校算数実践指導全集 第 2 巻 豊かな数感覚, 23-31. 日本教育図書センター.
- 酒井一馬. (2003). 修士論文 数学教育における数感覚の育成に関する研究.
- 進藤芳典. (2009). 修士論文 数感覚を重視した分数の理解に関する研究.
- 杉山吉茂. (1990). 筑波大学附属小学校算数科教育研究部 編著「数への感覚を育てる指導」. 東洋館出版社.
- Sowder J.T.(1992). Making sense of numbers in school mathematics. L. Gaea(Ed), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp.1-51). Lawrence Erlbaum Assoc Inc.
- Verschaffel, L., Greer, B. and DeCorte, E. (2007). Whole number concepts and operations. F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (second edition)* (pp. 557-628). New York: MacMillan.
- 脇坂郁文. (2000). 商としての分数の指導. 新しい算数研究, 1月号, 48-53.