

勝雄の割合の知識の形成過程における表象の変容と関係性

高 橋 等
上越教育大学

割合は算数において数の乗法的関係を扱う教材の代表的なものである。特に、算数では乗法的関係のうちの比例的関係を教材とする。比例的関係は斉次性を主たる特長とし、この性質は学校数学で扱う関数の考えのうちでも基礎的な性質である。この性質は幾つかの関数教材にわたる考えである。

他方で、割合は現実場面との連関性と数量の関係の抽象性ないし形式性との双方の特性をもつ。この特性は算数の多くの教材がもつものであり、子どもが現実場面から自ら知識を形成していくという、算数における学習の典型的な有り様を支えるものである。

この研究の目的は子どもの割合の知識の形成過程を、現実場面から抽象性ないし形式性をもつに至る表象に焦点を当てて明らかにすることである。

1. 割合の学習過程を扱った幾つかの研究

比例的関係を心的に形成していく過程に相当する比例的推論に係る研究としては、例えば日野(2002)の研究がある。日野(2002)は小学校五年生を調査参加者とし、比例的推論における単位量あたりの考えを子どもがどのように形成していくかを子どもの表記と関連させて明らかにしている。日野(2002)の言う表記をも含めて、子どもが心的構成物を形成していく際の表象は、それが記述されたものとしての表象であろうとなかろうと、その形成過程を明らかにしていくための主要な手掛かり

となる。

布川(2006)は小学校四年生を調査参加者として比例的推論の過程を明らかにしており、その中で 10 倍や半分といった子どもにとって親しみのある数量による単位を形成することに比較し、3 分の 1 などの単位を形成することの難しさを指摘している。布川(2007)は小学校三年生を調査参加者とし、比例的推論を行う際に描く図という表象がその種の推論を押し進めるために有利に働くという知見を得ている。布川(2007)はこの知見を巡り、表象の使用を意識化することにおける学習の促進を議論している。

割合における二量の関係に焦点を当てた研究としては、例えば土屋(2002)、田端(2003)がある。布川(2005)は小学校五年生が割合の問題を解決する際の表象である二重数直線の役割を取り上げている。布川(2005)によれば、子どもが利用する二重数直線は文化的道具であり、制約を伴いながらも多様な関連づけを生むものである。

2. 調査の方法

教授実験を行い、それらの授業中における五名の調査参加者の活動の映像と音声とをビデオカメラでビデオテープに記録した¹⁾。授業における子ども全員の様子を教室の前から、教師や板書の様子を教室の後ろからビデオカメラによりビデオテープに記録した。その他に、一名の調査参加者の授業中の様子と筆記

の様子をフィールドノートに記録した。この研究における報告は、フィールドノートに記録したこの調査参加者(仮名で勝雄と呼ぶ)の記録に依る。

教授実験を新潟県内の小学校一学級で割合の単元九回にわたり行った。一回の授業時間は約 60 分であった。

3. 授業で扱った内容と勝雄の解決の様子

3.1 授業で扱った内容

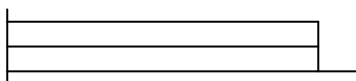


図 1 割合の説明に用いた二重数直線の原型

第一時は、バスケットボールで 20 回シュートしたときに、4 人のそれぞれが 20 回、10 回、5 回、2 回入ったという場面を、割合メーターと呼ぶ可動式の帯図を提示して、扱った。第二時は、もとにする量を 1 とした時のくらべられる量を表した数として割合を説明した。この説明において、図 1 に示したような帯図を発展させた二重数直線が原型となるような図を用いた。第三時は、100ml の原液が 80ml のジュースと 40ml の原液が 20ml であるジュースのこさの比較を扱った。第四時は、定員 50 人のバスに 40 人乗っているときの混み具合を扱った。第五時は、 24m^2 の 60% を求める割合の第二用法の問題を扱った。第六時は、花畑が 90m^2 で畑全体の 30% に当たるときの畑の面積を扱った。これは割合の第三用法の問題である。第七時は、練習問題と、500 円の品物の消費税 5% を加えた値段を扱った。第八時は、帯グラフを扱った。第九時は、円グラフを扱った。

3.2 勝雄の解決の様子

第一時では、シュートの成功回数が 8 回の場合のうまさ度を各自で考える場面において、勝雄は筆算によって $20 \div 8 = 2.5$ を、次いで $1 \div 2.5 = 0.4$ を計算した後に、図 2 の様に二重

数直線に数字と矢印とを書き込んだ。ただし、 $1 \div 2.5 = 0.4$ の筆算を計算後に消していた。

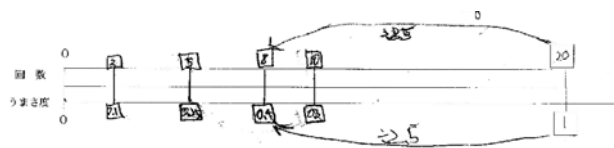


図 2 勝雄の描いた図 1

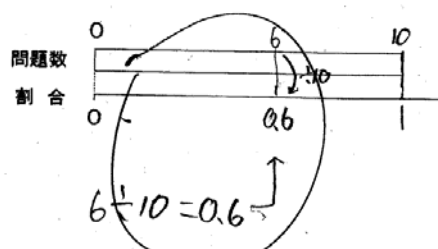
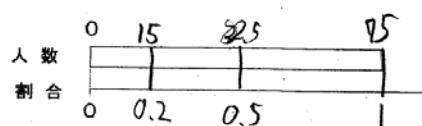


図 3 勝雄の描いた図 2

第二時では、第一時の内容の復習の後で、全体での話し合いにおいて教師に提示された、割合＝くらべられる量÷もとにする量、という言葉の式と用語の説明をプリントに書き込んだ後、勝雄は練習問題を解いていった。一問目の、10 問の問題のうち 6 題が正答した場合の全問に対する正答の割合を求める問題の解決において勝雄は図 3 の様に数字、矢印、および式を書いた。勝雄のこの解決以前の全体での話し合いでは、第一時の復習として教師は $20 \div 10 \times 4$ および $1 \div 10 \times 4$ を反映する横に矢印を描いた考え方と図 2 に表されるような考え方を扱った後で、 $20 \div 20 = 1$ および $8 \div 20 = 0.4$ を反映する縦に矢印を描く考え方を扱い、言葉の式を提示した。矢印を縦に描く考え方と言葉の式は図 3 に表れるような勝雄の考え方を促したと解釈する。勝雄はこの時点において数直線に横に矢印を書き入れる考え方ではなく、縦に矢印を描く考え方を選択した。四問目の解決で勝雄は図 4 を描いた。図 4 では割合が 0.5 になるになる箇所を書き入れており、五問目でも同様の書き込みがあった。

第三時では、ジュースのこさを求める問題



$$15 \div 75 = 0.2$$

図4 勝雄の描いた図3

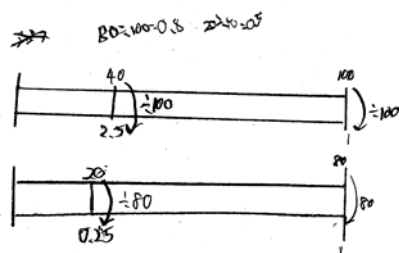


図5 勝雄の描いた図4

を各自で考える場面において、勝雄は、 $100 - 80 = 20$ 、 $40 - 20 = 20$ 、どちらも 20ml カルピスジュースの量が多い、とプリントに書き込んだ。問題文の難しさ、すなわちこさという語の意味の難しさが、勝雄の解決に影響を与えたとも解釈できるものの、何れにせよ比較を求められたときに勝雄が第一に依存するのは未だ加法的な考え方であった。この後、勝雄は加法的な考え方を表した記述に大きくばつをつけ、図5の様な図を描きながら解決を進めた。勝雄は第二時で学習した二重数直線に縦に矢印を描く考え方をこの問題の解決に適用したものの、もとにする量とくらべられる量とを問題文から十分には読み取ることができず、誤った数の組をつくり、計算していた。その計算も間違っていた。とは言っても、加法的考え方から乗法的な考え方である割合の考え方への転換点がここに表れていた。図5に表されるように勝雄は第二時で形成した考え方のこの問題に対する適切さを判断し得たのであり、例えば比較する数の組を取り違えていたとしても、加法的な考え方からの飛躍的な発展があった。全体での話し合いにおいて正しい解決が教師によって取り上げられた

後での、カルピスジュース 40ml の中にカルピスが 30ml 入ったCのコップを扱った問題では、勝雄は数直線に縦に矢印を描き、正しく解決していった。第三時の最後には、教師は男子が 16 人で女子が 20 人の学級でもとにする量とくらべられる量とを互いに逆にした場合の考え方を各々扱った。勝雄は女子 20 人をもとにする量とした場合では自力で二重数直線に数字を記入して計算し、解決したものの、男子 16 人をもとにする量とした場合では 16 と 20 とを二重数直線に書き込んだのみであった。教師による説明を受けて勝雄は二重数直線に 1 と 1.25 とを書き込んだ。

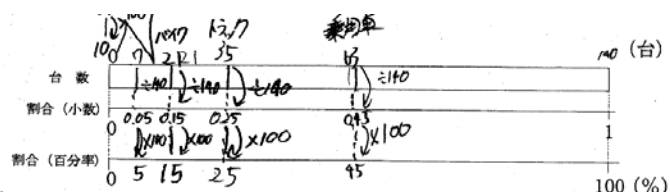


図6 勝雄の描いた図5

第四時では、教師は百分率を導入した。教師による説明の後、勝雄は第三時まで用いた二重数直線の下にさらにもう一段数直線を描いた三重数直線を描いた。この後、勝雄は乗り物調べという題目の五種類の乗り物の通過台数から百分率を各々求める問題を自力で解決した。勝雄は式によって割合を計算し、割合を 100 倍して、百分率を求めた後、三重数直線に数字と矢印を書き込んだ(図6)。第四時の最後に、百分率が 100%を越える問題を教師は提示し、勝雄は全体での話し合いの後で板書を見ながらプリントの三重数直線に数字と矢印を書き込み、さらに式を書いた。

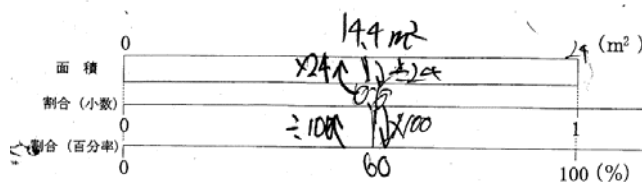


図7 勝雄の描いた図6

第五時では、 24m^2 のへの 60%をペンキ塗りしたときのペンキを塗った部分の面積を求める問題に対し、各自で考える場面で勝雄は図7の様に三重数直線に数字と矢印を書き込み解決した。勝雄は始め、百分率を表す数字 60 を記入してから、その上に割合を表す数字 0.6 を記入し、それらの数字の間に縦の矢印とともに $\times 100$ と $\div 100$ とを書き込んだ。さらにその上に縦の矢印とともに $\div 24$ と記入し、次に $\times 24$ と記入してから、 $60 \div 100 \times 24 = 14.4$ と計算した。その後、全体の話し合いでは勝雄と同様の考え方の他に、くらべられる量を□で表し言葉の式によって計算する考え方や、数直線に横に矢印を描いていく考え方である 24 を 10 等分してから 6 倍する考え方、数直線に横に矢印を描き 24 を 0.6 倍して求める考え方を子どもたちは提出した。

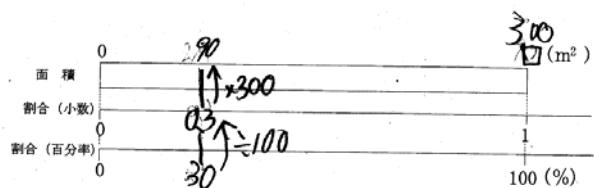


図8 勝雄の描いた図7

第六時では、第五時の復習である 80 本のくじの中の 5%の当たりくじの本数を求める問題と一両が 80 人定員の電車の乗車率が 110%のときの乗車人数を求める問題を、図7と類似した図を描きながら勝雄は自力で解決した。その後での全体の面積の 30%が 90m^2 のときの花畑全体の面積を求める問題に対しては、勝雄は図8の様に数字と矢印を三重数直線に書き込んでいた。最初、勝雄は百分率を表す 30 と縦の矢印、 $\div 100$ を書き込み、次に面積を表す 90 を記してから、 $30 \div 100 = 0.3$ 、 $90 \div 0.3 = 300$ と計算した。その後で、割合を表す 0.3 と縦の矢印、 $\times 300$ を書き込んだ。その後、 $0.3 \times 300 = 90$ という計算も記述したものの、勝雄はこの記述を消した。各自で考える場面の後での全体の話し合いにおいて、教師は横の矢印を書き込みながら、百分率での

関係を表す $30 \div 0.3 = 100$ 、小数での関係を表す $0.3 \div 0.3 = 1$ を説明した。その後の練習問題の解決において勝雄は図8と同様の縦の矢印を書き込みながら、問題を解決していた。答え合わせの際の教師による説明では横の矢印を書き込む考え方が強調されていた。

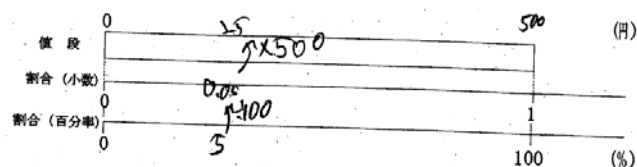


図9 勝雄の描いた図8

第七時では、百分率の練習問題を各自で解決した。面積 24m^2 の砂場が公園全体の面積の 8%である場合の公園全体の面積を求める問題、800 円の 20%を求める問題、全体で 160 人のうち女子が 72 人の場合の女子の人数の割合を求める問題などを勝雄は解決した。勝雄は一問目の解決では図8と同様の書き込みをしたものの、幾つかの問題の解決では数直線への書き込みは矢印のない簡略化されたものであった。500 円の商品の消費税 5%を加えた値段を求める問題では勝雄は図9の様な書き込みをしながら解決した。この書き込みの後、 $5 \div 100 \times 500 = 25$ 、 $500 + 25 = 525$ と勝雄は計算した。その後での全体の話し合いでは教師は矢印を横に描く考え方を説明した。

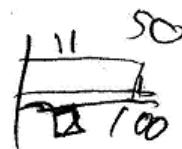


図10 勝雄の描いた図9

第八時では百分率を求め帯グラフを描く問題を各自が解決した。交通事故の原因をグラフ化する問題において合計 23 人のけが人のうち飛び出しを原因とする 11 名の百分率を求める際に勝雄は図10の様な線分図を描いた。五項目の百分率を求める際にすべての場合において勝雄は数直線を描いたわけではな

いものの、勝雄は百分率を計算する際にはその考えの根底で数直線上での数の関係づけを行っているのではないか。しかし、図 10 では 50 と記した箇所に 23 と記すべきであって、勝雄は誤った数値を取り上げていた。その後の合計台数が示されている場合の自動車の種類を百分率から求める問題に対しても、五項目のうち最初の二項目の解決において勝雄は図 11 の様な図を描いた。

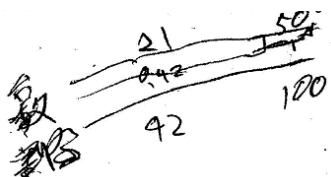


図 11 勝雄の描いた図 10

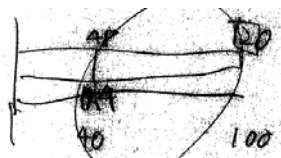


図 12 勝雄の描いた図 11

第九時では、百分率を求め円グラフを描く問題を各自が解決した。勝雄はこの時は数直線を描くことはなかった。その後は、これまでの九時間の内容を網羅した練習問題を勝雄は解決した。その解決において勝雄の描く数直線の多くは矢印が省略された簡略化されたもの(図 12)となっていた。

4. 解釈と考察

4.1 勝雄の解決過程の解釈

第一時、勝雄の解決は全体での話し合いにおける教師の割合メーターの使用と数値と数値間の関係の表象を比例的関係を形成する心的構成物に取り込んだ結果として、勝雄の解決過程で表象されたものである。この勝雄による解決過程の表象は、シュートの成功した回数が 10 回の場合、5 回の場合、および 2 回の場合を教師が扱った後での表象である。勝雄は全体での話し合いで扱われた各々の成功

回数における小数での割合を巡っての教師と子どもたちとの相互作用に参加して、彼はこの相互作用の途中で一度も発言していないのだが、教師の提示した考えを心的構成物に取り込み、成功数が 8 回の場合を表象したのである。

第二時では第一時の成功数が 8 回の場合の復習の際に、教師は縦に矢印を描く表象を取り上げ、その直後に言葉の式を提示した。この縦に矢印を描く表象は全体のシュート数である 20 回を 1 と見なす考え方であり、勝雄は第二時以降にこの考え方を核として問題を解決していった。第二時では、全体を 1 と見なす考え方の直後に教師は言葉の式を提示しており、勝雄のこの考え方は言葉の式とも結び付き比例的推論を行う際の、比較的強い心的構成物となっているのだろう。実際、教師が横への矢印を再度強調し割合の第三用法を扱った第六時以降であっても、勝雄は数直線上に縦に矢印を描き解決していた。勿論、図 8 を描きながら勝雄は $90 \div 0.3$ を計算していたのであり、横への矢印を描かなかったとしても比例的関係を心的に形成していた。ただし、その比例的関係は縦の矢印を描き、割合にもとにする量をかけてくらべられる量を算出するという反省を伴うものである。勝雄が心的に形成した比例的関係は第二用法を反映した関係を核として形成されたものであり、それは勝雄が最も信頼する関係であった。

勝雄は第八時以降は問題の解決において数直線を描くものの矢印を書き込まなくなった(図 10, 11, 12)。図 12 は図 8 の場合と同様の第三用法の問題の解決の際に勝雄が描いた図であるけれども矢印を書き込まず、図の下に $40 \div 100 = 0.4$, $98 \div 0.4 = 120$ と記述した。勝雄が心的に形成した比例的関係は表記という表象においては矢印という動的な関係付けを伴うものではなく、一層形式的なものとなった。とは言っても、矢印という動的な関係付けが勝雄の心的構成物から消滅したのではなく、記述として表象されなかっただけ

であり、依然として内的な表象として勝雄の形成した比例的関係を支え、問題の解決の際に働いていたのだろう。

勝雄の比例的関係の心的な形成は、結局、第二用法としての関係を核として形成されたものであるものの、他の用法の場合、例えば第三用法の場合にもこれらの関係を捉える視点を変えることにより、柔軟に問題を解決していた。この柔軟さは数直線に縦横に矢印を描きながら数値間の関係を比較するような十分な柔軟さではなかったものの、勝雄の固有のものであると解釈できる。

4.2 知識の形成と表象

この研究では、布川(2007)に依って表象という語を用い、特に認知的道具としての言語、記数法、文字式、図式、地図などに代表されるような、文化的道具に含まれる二重三重の数直線を知識形成を促す表象と位置付けている。しかしながら、今回の勝雄の解決過程を記述し、解釈したところ、表象という語の意味を再検討する機会を得た。率直に言えば、表象が生得的なものか経験的なものか、経験が文化に晒されるものであれば生得的なものか文化的なものかと言える、の検討である。人間の知識形成、もっと一般的に言えば思考、において表象は外的なものであれ内的なものであれ、何かしらを表すものである。この何かしらを表すものがなければ、人間は知識を形成することができない。例えば数の知識形成をするためには、具体物であれ、絵であれ、言語記号であれ、数を表す表象なしには、人間は知識を運用できない。

磯江(1998)は表象という語の定義の変容を哲学史を概観することによって解説しているものの、明確な規定には至っていない。何れにしても、表象を人間が知識形成する、ないしは思考する際に何らかの表れとなるものと捉えて間違いない。

心理学的には表象は外的対象や経験の心的代表物(天岩, 1979)と規定されており、これも

知識形成ないし思考の際の何らかの表れと同じ意味である。天岩(1979)は J. S. Bruner(例えば, Bruner et al., 1966)を取り上げ、EIS原理で言うところの表象を説明している。ところで、Bruner et al. (1966)は表象に関してという項目で次のように表象を説明している。

There are two senses in which representation can be understood: it terms or the medium employed and in terms of objective. (p. 6)

Bruner et al. (1966)によれば、表象には心的代表物いわゆる媒体としての意味と知識形成ないし思考の際の対象としての意味とがある。

実は、この研究での教授実験で子どもに提示していた割合メーターおよびプリントに印刷済みの二重三重の数直線は対象としての表象であった。布川(2007)で言う文化的道具としての表象は Bruner et al. (1966)の言う対象としての表象と同様の位置づけとなる。とは言っても、Bruner et al. (1966)よりもさらに詳細に表象と文化性について検討する必要がある。

Bruner et al. (1966)の仕事の少なくない数は心理学的な研究方法を用いての Piaget, J. (例えば Piaget & Inhelder, 1965)の研究の追試であったのだけれども、Piaget & Inhelder(1965)の見解では、人間の心的発達が生得性と環境の双方に依存する。この生得性と環境とを明確に区別することは難しいのだけれども、環境と文化性とを一応、同様と捉えていいだろう。ただし、布川(2007)が取り上げる Vygotsky(1997)ほど積極的には Piaget & Inhelder(1965)は環境すなわち文化性を論じていない。

認知的道具としての二重三重の数直線を文化性を反映したものと捉えたと、勝雄による二重三重の数直線による割合の知識の形成は、文化性が内化したものともとれる。しかし、一旦、文化性を考慮から除いた上で、知識形

成における生得性、心的発達における生得性と言ひ換えてもよい、が表象をもたらさないかと言うと、そうとも結論付けられない。人間が環境すなわち文化性のない場所に在ることは不可能であるけれども、そうだとすても我々は知識形成を行う限り、つまり思考をする限り、表象を生み出すのではなからうか。

Bruner et al. (1966)による実験からは、或る程度は子どもが生得的に比の知識を発達させていると言わざるを得ない。Piaget & Inhelder(1965)の言う段階という語を用いるとすれば、低次の段階では、文化性には大きく左右されないととれる。もし、そうだとすれば、子どもが形成する比の関係やその発展である割合の関係などの比例的関係もまた或る程度は生得的に形成されていると判断できる。

二重三重の数直線は認知的道具という文化性に富むものであるけれども、その二重三重の数直線を使う子どもは、予め心的に比例的関係を素朴に形成しており、その表象を内面に有している。二重三重の数直線は子どもが素朴にもっている割合に係る心的構成物を再形成させ、知識形成を促す表象なのであろう。

4.3 表象の抽象性と関係性

図 10, 11, 12 は勝雄が描いた二重三重の数直線であり、その特長的なところは、数値間の関係を矢印を用いて記述しなくなったことである。図 10 では勝雄は間違った数値の記入をしているものの、図 11, 12 にある三重数直線を用いた解決は成功的であった。布川(2007)は子どもの問題解決の成功には表象の意識化が鍵となることを指摘しているけれども、勝雄の問題解決を通した知識形成において、その類の意識化が行われていたのかも知れない。

Bruner et al. (1966)は対象としての表象の抽象度の違いが、媒介物としての表象の生成に影響を及ぼすことを示唆している。しかし、Bruner et al. (1966)による論では EIS

の三点を表象を説明する主たる視点としており、上記抽象度に対する緻密な議論をさらに必要とする。勝雄が表象した二重三重の数直線は、学習が進むにつれてその抽象性を増していった。同じく映像的表象であったとしても、それらの表象は表象する知識の関係性を伴いつつ、簡略化されていくものとなる。

ところで、上記関係性はどのようなものであろうか。Bruner et al. (1966)で言う対象としての表象は、翻案された教材の構造の表象と対になる。その構造での関係はいわば静的なものであり、揺るぎがない。媒体としての表象は人間の知識形成の過程を表象する。その過程は動的に関係を形成する過程である。

この研究では、各授業で扱った教材や教具を必ずしも静的な構造を表象するものとはしてこなかった。割合メーターは動的で、割合を表すには十分ではない、柔軟な教具である。勝雄の形成していく比例的関係は、それらの教材や教具の影響もあってか、決して静的なものではなく、動的な過程をもちながら形成されていくものであった。勿論、関係性が一定の型をもつに至るとき、活動の飛躍があり得るだろう。

勝雄は、二重三重の数直線への書き込みを見る限りにおいては、割合の第二用法を核とした心的構成物を形成しており、割合の他の用法に係る問題解決においても、第二用法での反省を伴う活動をしていた。勝雄の形成した比例的関係が、一時的にではあっても、柔軟さを失ったものとも捉えられるけれども、他の用法を第二用法で説明し得るという勝雄の知識形成の過程から見れば、これは相当に柔軟な知識であると考え得る。この時、勝雄の知識形成においては関係付けの強弱が生じていると判断する。こうした関係の強弱が、総ての子どもに同様な過程で生ずるとは考えにくく、各々の子どもにとって個性的なものであろう。

問題が割合の三用法の混在したものになるにつれ勝雄による表象は抽象性を増し、矢印

は消え、数値の関係が直接的に、記述した式に反映するようになった。この過程は、動的に形成された関係性が一定の関係を保つようになり、式の上での数字とその関係とを表象するようになったことを示している。勝雄の形成していった比例的関係は、割合メーターから二重三重の数直線を経て、数字と式という各々が文化性を有する表象に移行したのである。この移行において勝雄の焦点的意識の働きがあったことは強く伺えることであり、この点で布川(2007)に同意するものである。

5. 結語

抽象性を増し、やがては記述されなくなる表象は、意識するとしないうちに係わらず、内的な表象として働く。その働きがなければ人間は知識形成のための媒体を失ってしまうのである。ところが、この内的な表象は通常、表象として見取ることができないものである。内的な表象とともに、各々の子どもについて個性的な数学的関係を形成する過程があることを、十分に考慮する必要がある。子どもの学習過程そのものを大事にするのであれば、授業時間において十分な個別活動の時間を確保する必要がある。他方で、形成していく数学的関係の柔軟性を育てるために、十分な練り合いの時間の確保が必要であろう。

付記

この研究は平成 19 年度から 20 年度にかけて行った上越教育大学研究プロジェクト、比例的表象を生かした小学校の割合の授業についての学習過程臨床的研究(研究代表布川和彦)、の一部である。

註

1) 教授実験を次の構成員によって行った: 布川和彦, 高橋等(上越教育大学); 林克巳(上越教育大学附属小学校); 佐藤満, 林尚之, 渡辺由仁, 山澤晴子, 松井守, 濱谷伸広, 磯野和美, 上田貴之, 清水祐子, 中嶋良子(上越教育大学大学院生); 入澤梨香, 黒木真奈

美, 高山いつか, 吉邨公輔, 濁川幸広(上越教育大学学部生)。授業実践を佐藤と林が担当し, 授業案は授業者の二名と布川が中心となり立案し, 構成員で検討した。

文献

- 天岩静子. (1979). 表象. 依田新監修, 新教育心理学事典(p.681). 金子.
- Bruner, J. S. et al. (1966). *Studies in cognitive growth*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- 日野圭子. (2002). 授業における個の認知的変容と数学的表記の役割:「単位量あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して. 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 79, 3-23.
- 磯江景孜. (1998). 表象. 廣松渉他編, 哲学・思想事典(pp.1339-1340). 岩波.
- 布川和彦. (2005). 子どもの学習過程に基づく支援の構想: 5年生「割合」単位における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究, 20, 11-20.
- 布川和彦. (2006). 比例的推論の授業における小学校4年生の学習の様相. 上越数学教育研究, 21, 1-12.
- 布川和彦. (2008). 比例的推論を利用した割合の導入の試み. 日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集, 957-958.
- Piaget, J. & Inhelder, B, 滝沢武久 & 銀林浩訳 (1965). 量の発達心理学. 国土社.
- 田端輝彦. (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, 85(12), 3-13.
- 土屋利美. (2002). 比例の見方を用いた「割合」の指導実践. 日本数学教育学会誌, 84(8), 30-37.
- Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky, Volume 3: Problems of the theory and history of psychology* (pp. 85-89). New York: Plenum Press.