上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.163-172.

割合単元における児童の心的構成物を見る枠組みについて

富田　一志
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

「割合が 0.7 倍ということを求めることはできるけど，どうしてこういう計算をしたのか分からない。」

筆者は，自身の授業実践を通して次のような児童の声を多く聞いてきた。

割合単元の学習は，問題場面を把握することの困難さに始まり，その中にある数学的内容の複雑さ，計算自体の複雑さなど児童が克服すべき多くの課題がある。

また, そうした中で児童が問題の場面から，どのような既有の知識を用いるのかを判断すること，そしてその判断に沿って活動していくことは困難なことである。更に，その困難をどのような活動でどのように感じるのかは，児童一人一人により多様である。

そのような児童の困難を受け，筆者は分かりやすく伝える授業展開を心掛けてきたつもりである。しかし「児童がどのような考えをもち, 活動していくのか」という視点をもち, 授業を行っていなかったことを反省する。教材解釈と並行して，そこで用いられる児童の考えを捉え，児童自らが算数を形成していく姿を求める。このことで，割合単元に顕著であった困難に応えていきたい。

本稿の目的は，児童が割合単元の問題を解決していく中で，新たな知識を構成し形式化していくために用いられる心的構成物を見るための理論的枠組みを得ることである。

本稿では，第一に，児童のもつ心的構成物であるモデルの自己発達に関して考察する。第二に，割合単元の先行研究から解決に用いられる方略について触れる。第三に，割合の困難さや百分率の意味に触れながら，割合単元におけるフォーマルな知識とモデルとの関連について考察する。

2. 児童の活動を中心とした視点

2.1.モデルの自己発達

2.1.1.Gravemeijer（1997）のモデルの自己発達

吉田（1999）や高橋（2003）の研究は日常場面に焦点を当て，児童のインフォーマルな知識が，如何にしてフォーマルな知識へと発展していくのか研究したものであった。そこで筆者は, 児童の素朴なアイデアに目を向け，それを自己発達させていこうとする研究に注目する。

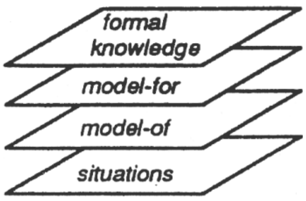
日常性の文脈からカリキュラムや教材を始める一派がある。オランダのフロイデンタール（Hans Freudenthal）の流れを組むチームであり，彼らの提唱する理論は現実的数学教育 Realistic mathematic Education（略称 RME）と呼ばれる（高橋，2003）。

RME は、Freudenthal,H による，人間の活動としての数学，という数学教育観に根底を置いている。子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し，算数や数学を経験し、知識を構成することを，Freudenthal 派は目指し

ている。RME で言う算数・数学的活動は，子どもにとって身近な現実場面から出発するものであり，現実感を伴うものである。また、その活動を通して，子ども自ら数学を生成し構成するとされる。

Gravemeijer（1997）は，抽象的な数学の知識，及び手続きが操作を伴って導入され，例示される活動に基づいた情報処理的アプローチの欠点として，生徒の「洞察力が働かないこと」「応用に関する問題」の 2 点を挙げている。こういった問題が，生徒の「インフォーマルな知識及び方略」を蔑ろにすることに繋がるとする。そこで氏は，インフォーマルな知識が，抽象的な数学的知識へと向かうための起点であるべきだとする，モデルの自己発達という RME の鍵となる原理を示した。

RME におけるモデルとは, 生徒自身がもつ心的構成物のことであり，問題を解決する際にフォーマルな知識に向かって発展するものである。また，問題状況や解決手続きをモデル化することで表面化するものである。Gravemeijer（1997）は，生徒が底上げ的な方略を追究するものとして，図 1 のモデルを示した。



situations　ー　状況的

紙や鉛筆を使ってではなく，現実世界の活動として結合されるもの。

model-of　ー　「 ～のモデル」

最初の水準のものが，紙と鉛筆によってモデル化されたもの。「a model of the situation」であり，解決プロセスには到達していない。

model-for　ー　「 ～に向かうモデル」

焦点が，数学的見地からの方略に変えられたもの。「a model for mathematical reasoning」であり，数学的な活動を記号化するよりも，数学的な推論の手段として働く。

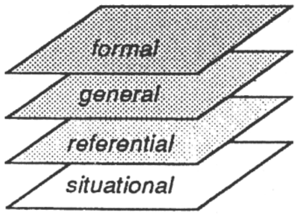
formal knowledge　ー　形式的知識

標準的に記述されたアルゴリズム。

図 1　Gravemeijer（1997）のモデル

最初のモデルは生徒にとって身近な状況のモデルであり，それを一般化し形式化することによって, モデルはそれ自体が実体となり，数学的推論を行うためのモデルとして，このモデルを使用することを可能にする（Gravemeijer，1997）。

また，Gravemeijer（1997）は，Level（水準）という用語を用いて，このモデルを図 6 に見られるような思考水準の発達として表した。



situational　level　ー　状況的水準

ある特定領域の状況的な知識と方略が，その状況（主として学校外の状況）の文脈の中で使われる。

referential　level　ー　参照的水準

モデルと方略が，（おおよそ設置する学校で生じる）問題において描写される状況を参照する。「モデル，記述，概念，手続き，具体的ないし模範的状況」を参照する方略を好む。

general　level　ー　一般的水準

方略に関わって，数学的な焦点が文脈の参照を支配する。反省が支配的になる方略を好む。「一般化，調査，反省」により参照的水準からレベルが発達する。

formal　level　ー　形式的水準

人が従来の手続きと表記を用いて活動する。一般的水準の形式化であり，一般的水準を具体的ベースとする。

図 2　Gravemeijer（1997）の水準

Gravemeijer（1997）は，水準を絶対的なものではなく，より高い水準に進んだり，より低い水準に戻ったりできる，不可分なものとして捉えている。

異なる水準が分離されないという別の意味で，水準は絶対的ではない。この考え方は，生徒たちがより低い水準に戻ることも可能であるべきである。更に，より低い水準は、より高い水準の中に組み込まれるということを意味している（p.342）。

Gravemeijer（1997）は，モデルの自己発達に関して，状況的水準と形式的水準との中間に，参照的水準と一般的水準を想定した。モデルの自己発達を情報処理的アプローチと対比させながら説明することで，生徒のボトム-アップ的方略を自発的な姿で浮かび上がらせることを可能にした。学習の起点となるインフォーマルな知識は決して教師により教え込まれるものではなく，生徒自らがもち，つくり上げていく知識である。インフォーマルな知識は，数学的関係に徐々に近付いていくことによってフォーマルな知識へと向かっていく。

2.1.2.Van den Heuvel-Panhuizen（2003）のモデルの自己発達

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，Gravemeijer（1997）のモデルの自己発達を一歩進めて，model-of から model-for への移行を，単一的な転換ではなく，より局所的で連続的なものとした。このことにより，モデルはより柔軟で強固なものとして示された。

この転換に関して，文脈に結び付く水準でインフォーマルな解釈を記号化したモデルが，局所的かつ連続的発達を伴い，最終的には一層一般的で形式的な解決のためのモデルになることを明らかにしている。インフォーマルな知識がフォーマルな知識を形成し，それが次のインフォーマルな知識となり多様な形でフォーマルな知識の構成にかかわってくるという見方もあるが，実はボトム-アップ的な方略はインフォーマルな知識の構成を文脈に応じて繰り返していくことであり，フォーマルな知識はなかなか辿り着けるものではないことになる。学習者にとって，モデルは漸進的に自己発達する心的構成物である。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，このような局所的かつ連続的な転換の様子を，図 3 のように示している。

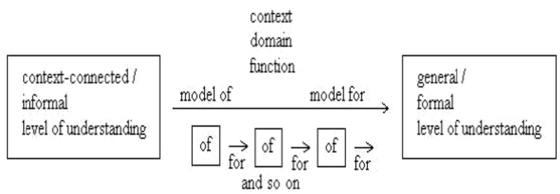


図 3．Van den Heuvel-Panhuizen（2003）による理解水準と model-of から model-for までの移行

図 3 において，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）でいうところの context（文脈）は，Gravemeijer（1997）の situations（状況）とほぼ同義と捉えてよいだろう。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，可逆性を認めつつ，区分は曖昧であるとされていた Gravemeijer（1997）の model-of から model-for への移行を，「model-of が model-for へと局所的かつ連続的に翻る」姿で示して見せた。この視座に立てば，理解が非形式的な水準から形式的な水準に発達していく過程において，前の活動における model-for が次の活動における model-of である。つまり，如何なる model-for においても，文脈依存的（context-conected）なのであって，問題解決に困難が生じた際、何時でも何処までも，か

つての文脈に立ち返ることが可能で，双方向性をもつ。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，百分率の教授-学習過程において，model-of から model-for への移行として，次の過程を示している。そこでは、MiC カリキュラムのために計画された一連の教授単元において，如何にしてモデルが現れ，漸進し，生徒の学習を支えていくのかについて記述している。

百分率の学習で，子どもたちは，最終的には演算決定のために百分率を使用する方略を得ることで終わる。また，ここでのモデルの移行とは，直面する文脈が，かつての文脈と直接結びついていないにもかかわらず，新たな文脈で有益であることを指す。つまり，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）のいうモデルの移行とは，子どもたちの視座の点におけるものであり，子どもたちの思考の中で形成されている。

以下に示す 1 から 11 は，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の挙げている model-of から model-for への移行が見られる活動である（1～11 の番号は筆者による）。

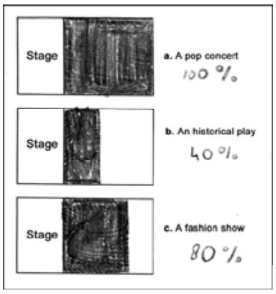


図 4　学校の劇場において占有された座席の百分率

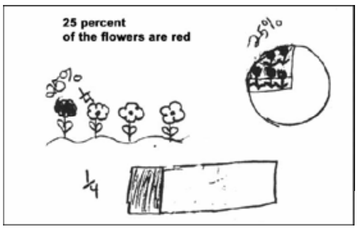


図 5　百分率を表現するために絵図を使用すること

1. 劇場ホールの着席状況を着色すること（図 4）が，他の状況（25%の花は赤い）に対して，絵的な図からパイ・チャート，そして帯図に表現する方法（図 5）になること。

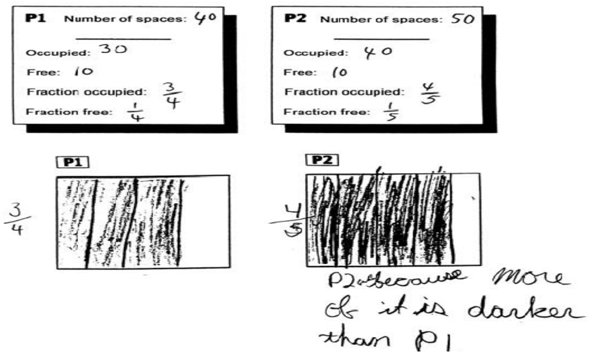


図 6　駐車場の満車率を比較すること

2. 劇場ホールのすべての座席を表す四角に対して着色された部分の四角（図 4）が，どの駐車場が満車に近いか表す四角に置き換えられること。満車率は分数で表現される（図 6）。

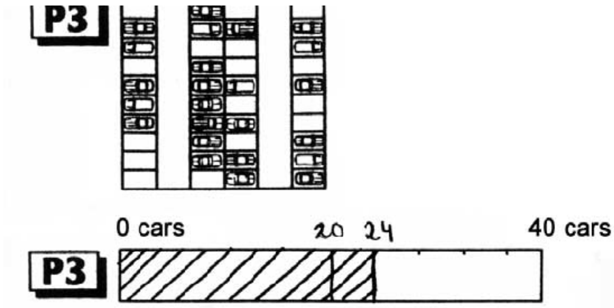


図 7　占有メーターが駐車場の満車を示す

3. 現実の駐車場として表現された長方形の枠（図 7 上）が，一本の「占有メーター」に置き換えられること（図 7 下）。そのような「占有メーター」は，掃除機の埃の量をチェックするディスプレイやバッテリーの充電器の表示に似ており結びついている。

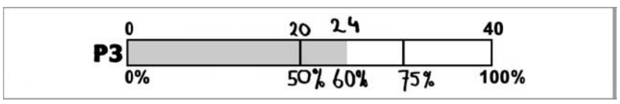


図 8 占有メーターが駐車場の満車に関する百分率を明らかにする

4. 「40 台中 24 台」という占有メーター（図 7 下）が，占有された部分の百分率として視覚化されること（図 8）。

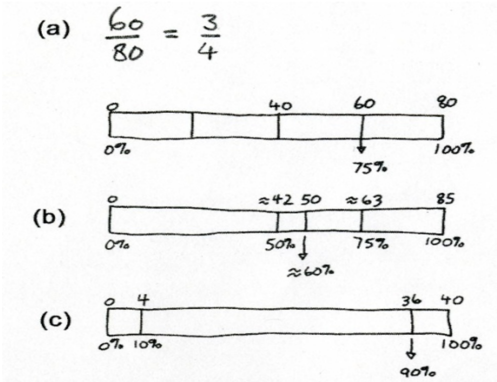


図 9　満車率を見つけることに係る占有メーターの異なる使い方

5. 駐車場の敷地の問題で実際の数に依存しながら，占有の尺度（図 8）がいろいろな駐車率を発見するために用いられること（図 9）。

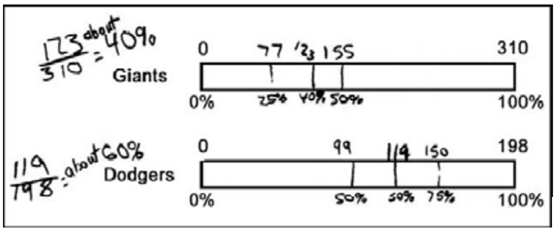


図 10　概算モデルとして帯図を使用すること

6. 占有メーター（図 9）が，徐々に分かりやすく，適合性の高い帯図へ変わっていくこと（図 10）。ここでは，現実的なシフトが生徒の思考の中で起こっている。シフトとは，モデルがもはや駐車場の文脈と結びついておらず，しかしながら，生徒が，例えば野球の記念品に対するファンの好みを比較するために用いられることである。

Year of marathon	Total number of competitors	Number of dropouts	Percent of dropouts	Describe your strategy
1991	1,603	91	≈5%	≈16　1,603　1%　16)91　5　-80　11

図 11　ベンチマークとして 1%を用いた計算モデルとして帯図を使用すること

7. 帯図（図 10）が，生徒たちがおよその百分率を見つけ出すためにどんな計算を実行すべきか，分かりやすいやり方で教える概算のためのモデルになること（図 11）。生徒たちは，部分を総量の 1%で分割する。

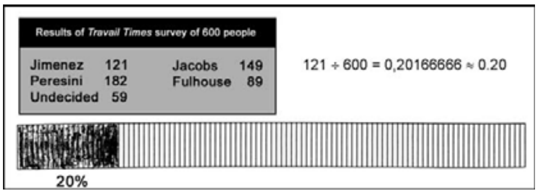


図 12　小数を経て百分率に変換された全体からいくつ分という状況

8. 割合を解釈する経験と帯図（図 11）が結び付き，多様な状況を‘直接’百分率に変換するための計算モデルになること（図 12）。

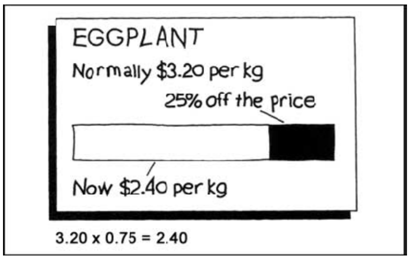


図 13　1 回のかけ算で安売りされた値段を調べること

9. 帯図（図 12）が，基準量からかけ算で比較量を求めるための計算のためのモデルに変わること(図 13)。

10. 帯図（図 13）が，指数関数の増加（例えば年利 6%の場合 3 年後いくらになるかという状況）のためにどのような計算を行わなければならないかはっきりさせる計算のためのモデルになること。

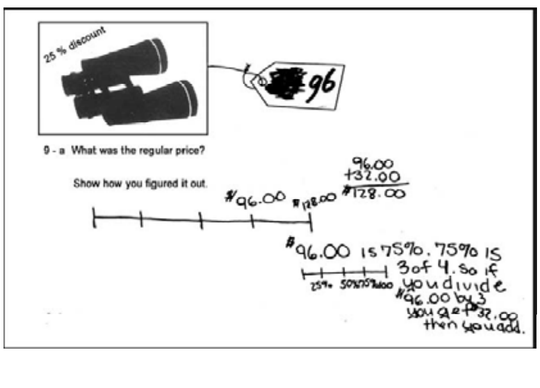


図 14　反対方向の推論を進めるための 2 重数直線

11. 帯図の代わりに，基準量を求めるための簡単な二重数直線が反対方向の推論を進めるために用いられること。帯図は思考モデルに変わる。

1~2 は，文脈に依存したインフォーマルな解釈である。劇場ホールの着席状況を捉える model-of が，その後駐車場の満車率など他の文脈を捉える model-for の活動に移行する。

3~6 は，割合を示す状況を図式化する活動である。劇場ホールの満席率を表す着色が，占有メーターに発達することによって，生徒たちの百分率を捉えるモデルにおける問題文の状況、文脈への依存度は低くなる。すなわち，子どもたちは心的に model-of から model-for へと転換している（橋本，2007）。

7~11 において，簡単な帯図を用いた活動は文脈への依存度を更に低くする。これまでの活動を通して帯図に表してきた関係を,概算，計算，そして思考の道具として用いるようになる。そこから数値間の倍関係，割合の関係に着目するようになる。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，model-of からmodel-forへの移行とは，モデル自体の機能の変化であると同時に，子どもたちのモデルの見方の変容と述べた。model-ofからmodel-forへの移行とは,教授-学習過程の中で生成されたモデル全てが，如何にして生徒によって対象化され利用されるかによる。また，何をmodel-of, model-forと見なすかについては，その都度子どもが対峙する文脈，領域，機能に依存する。この視点は，モデル自体の発達と見るGravemeijer（1997）とは異なるものである。

2.1.3. 児童が描く絵図と問題解決

この活動で示された絵図や帯図を数学的表記とみなせば，複数の表記を自分なりにつくり出しながら，試行錯誤を試みたり意識したりした児童に表記の内化が大きかったとする日野(2008)の知見と一致する。また問題解決において，児童が直観的に描いた絵図がその後の解決に有効であることは花形（1990）も指摘している。

絵図と計算の関係については，廣井（2003）が計算結果と自身が生成した図との不整合が問題構造の理解に寄与したことを示している。これは，児童が描く絵図が演算決定に大きく寄与する可能性を示唆している。

2.3.4. 児童の活動を分析する視点

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の示す図7の枠組みを基に，数学の知識を形成していく過程を分析する。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みを採択したのは，知識の形成過程を漸進的に捉えることで，model-of からmodel-forへの移行に，新たな視点が与えられると考えたからである。

3. 割合に関わる先行研究

3.1.異種と同種の割合の指導順序について

同種の量の割合と異種の量の割合のぞれぞれの導入場面を分析した田端（2002）は，学習者の思考過程と数学的アイデアを分析し，以下のように示した。

異種の量の割合

①一方の量をそろえて他方で比較する。
・公倍数の考え　・平均の考え
②一方を単位量として他方で数値化する。
・等分除的解釈　・単位量あたりの考え

同種の量の割合

①一方の数量をそろえて他方で比較する。
・公倍数の考え　・平均の考え
②一方を単位量として他方で数値化する。
・等分除的解釈　・単位量あたりの考え
③一方（全体）を 1 とみて他方を測定して数値化する。
・包含除的解釈　・測定の考え

図 15. 田端（2002）の割合の指導段階

田端（2002）は，同種の割合にのみ「包含除的解釈」と「測定の考え」があり，当時の学習指導要領の指導順序について問題点を指摘している。

図 15 から, 同種の量の割合のみ包含除的解釈を必要とする。包含除的解釈は本来，「全体に対して部分を何回除くことができるのか」ということなので，加法的解釈の意味合いが強い。一方，等分除的解釈・単位量あたりの考えは, 比例を用いた乗法的解釈である。これは本来「全体を均等に割る」ことを意味するので，包含除の加法的解釈とは異なるものである。

2008 年の学習指導要領の改訂により, 割合の指導順序は，異種の量の割合の後に同種の量の割合を学習する 1992 年のカリキュラムへ戻された。このことからも，児童にとって等分除的解釈を用いて多様な単位を考えることは，その後，全体を 1 とみて他方の大きさを捉えるアイデアを何らかの形で支えていくと推察される。ただ，乗法的解釈と加法的解釈の繋がり方については検討の余地があるだろう。

3.2.同種の割合の導入を扱った先行研究

同種の量の割合の導入場面で，早川（2003）は, シュートの試投数と成功数の対比を示し，「同じうまさ」をつくる活動を行った。「同じうまさ」の根拠を議論することで，基準量に対する比較量の割合を児童に考えさせている。

	A さん	B さん
入った数	10 回	12 回
投げた数	20 回	□回

図 16. 早川（2003）の導入問題の事例

図 16 では, 基準量と比較量の同値の比をつくり，「同じうまさ」の数表をつくる。ここで，比例の見方が養われるという。

溝口（2006）は，「同じ割合」をつくる活動を支持し，このような導入で割合の考え方や概念に迫ることができるとした。「数表を用いて同じうまさをつくることで，割合の前提となる比例を意識させ，縦の関係から商一定の関係を導くことも可能である」（p.108）という。

入った数	0	**10**	20	30	···	90
投げた数	10	**20**	30	40	···	100

図 17. 溝口（2006）の差の考えによる同じうまさ

入った数	5	**10**	15	20	···	50
投げた数	10	**20**	30	40	···	100

図 18. 溝口（2006）の倍の考えによる同じうまさ

図 17，18 の比較から児童は図 17 の「加法方略による解決」を反省し，倍の考えに「同じうまさ」を認めるようになる。

「同じ割合」をつくることは，児童が対応する数量関係に着目しながら数表を構成する活動である。図 18 で割合 0.5 をつくる場合，（a）投げた数 20 を÷20 して 1 をつくり，それに対応させ 10÷20 で 0.5 をつくる比例的推論を用いた課題解決を行いつつ，（b）20 回を 0.5 倍すれば 10 回になるといった縦の倍関係に気づき，それを課題解決に生かすことで割合の概念を構成していく。（a）は，田端（2002）の②一方を単位量として他方で数値化する活動であり，（b）は，③一方（全体）を 1 とみて他方を測定して数値化する活動である。また（a）を等分除的解釈（b）を包含除的解釈とみなせば，（a）で分割された任意のまとまりがやがて 1 あたりの量に分割され，その 1 あたりの量が全体と部分の間の共通の規則として意識された時，（b）の見方に繋がると考えられる。しかし，この思考の過程には，児童にとってある程度の跳躍（ジャンプ-アップ）が必要となるであろう。

3.3.割合と比の三用法に関する先行研究

割合と乗除との関連は密接であり，等分除と包含除は，比の三用法で一体化される。比の三用法の指導では，用法を別個に指導するのではなく，他の用法と関連づけながら繋がりを明確にしていくことが必要となろう。

吉田（1999）は，第 4 学年の除法の筆算アルゴリズム形成に関する教授実験を行った。

ここでは，現実場面（チョコレート配りやトランプ配りなど）の経験と記号を対照させて捉える活動が，減算モデルの形式に対して除数を取り去るプロセスとしての意味を与えていた。例えば，「チョコレート配り」という等分除の文脈でも，筆算アルゴリズムを形成する場合，子どもは「除数を取り去る」という包含除の方略を用いていた。ここにも等分除から包含除への跳躍が認められる。

高橋（2003）は，小数の乗法及び除法の学習における，子どものもつ心的構成物であるモデルの発達と過程を仮定し，その過程に基づいた単元を構想・実施した。

高橋（2003）の教授実験から，児童は単元の中で，解決のための単位を様々に設定することによる場に応じた活動のモデルを，様々な単位を 1 と見なす割合の考えに基づくモデルへと発展させることが明らかになった。児童が設定した解決のためのインフォーマルな単位は，比の三用法というフォーマルな知識へと統合されていた。

以上のことから，比の三用法は，様々な単位を 1 と見なす割合の考えに支えられながら導かれていくのであり，等分除を包含除に解釈し直す過程を含みながら,統合されていく。ここでいう様々な単位とは，等分除的解釈で分割された任意のまとまりのことであり，このまとまりが 1 になるとき包含除的解釈への跳躍の足場が形成される。

4. 割合と百分率

4.1.割合の難しさ

児童が割合を理解する際，もっとも困難を感じるのは「1 でないものを 1 と見る」ことなのではないだろうか。4 年生までの学習では 1 は単数の「1」そのものであり，それ以外の見方はしていない。ところが，割合の学習になると，1 でないものを 1 と見て他方の数との関係を表すことを要求される。児童が解決する問題は，ほとんどが「1m で 200 円の紙テープを 3m 買いました。代金はいくらですか。」というような問題であり，予め 1 あたり量が示されている。よって，児童が自ら 1 あたり量をつくる機会に乏しい。

また,シュートの上手さ度といった問題は,1 回あたりのシュート成功数を考えることが現実的に難しいといった側面も考えられる。「1 回あたりの成功数 0.5 ってどういうことなのだろう？」という疑問は，他の導入問題（定員に対する倍率の問題，サッカーなどの勝率の問題）においてもいえることだろう。

4.2.割合を百分率で考えること

同種の量の割合の単元構成は，①割合の意味指導の後に②百分率が導入される。①では,割合の意味について考え,割合を小数で表す。②では，小数で表した割合を百分率に直す。よって百分率は，割合の言い表し方の特別な場合として扱われている。

百分率は生活に密着した表し方であるだけでなく，特別な単位を導入して数値を整数に直し目安としている以上，抽象度の高い小数に対して，大きさを捉えやすいという便宜さがある。したがって百分率は児童にとっても分かりやすく扱いやすい。

従来の割合指導における百分率は「基準量を 1 とみたときの比較量の割合を 0.01 を単位にして表現したもの」である。一方で，百分率とは，per（～につき）cent（100）という語の構成からも分かるように，本来「100 につきいくつ」という表し方である。つまり，1 ではなく 100 を基準とした表し方になってい

る。これは「100 につきいくつ」という比（A:B=X:100）としての理解である。

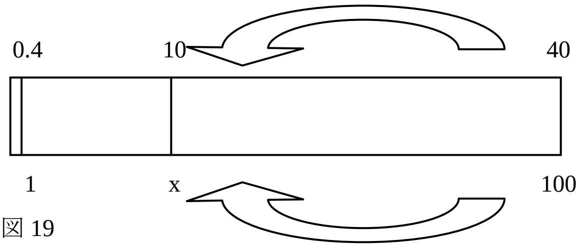


図 19

図 19 のように 100 を基準量とみた場合, 児童は等分除的解釈や単位量あたりの考えを用いて X を求める（10:40=X:100 ）。帯図であるならば概数として見当を付けることも可能である。これは，百分率が割合の身近な表し方であることや，整数故に大きさが捉えやすいことに起因している。また，シュート数を例に挙げれば，100 回につき X 回は現実的に違和感も少ないだろう。

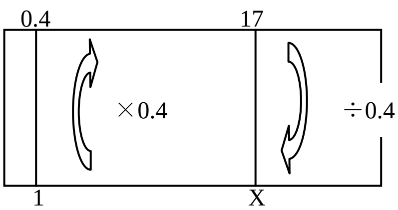


図 20

比較量が 17 などの場合，X%を計算で求めるときには，児童は 1 あたりの大きさ，つまり 1%あたりの大きさを導入する文脈に対峙する。この 1%あたりの大きさ 0.4 は, 1 と 0.4, X と 17, 100 と 40 に規則的に成り立つ倍関係である（図 20）。この過程においても等分除的解釈から包含除的解釈への跳躍が起こり得る。割合の知識形成にこの跳躍が必要であると考えると，特に異種の割合を先に学習した児童を想定した場合，「基準を 100 とみる」ことが「基準を 1 とみる」ことに先行することも十分想定できる。このような児童にとって，「基準を 1 とみる」ことは，より抽象度の高い知識とみなすことができよう。

5. 割合単元におけるフォーマルな知識とモデルとの関連

児童が設定した解決のためのインフォーマルな単位が，比の三用法というフォーマルな知識へと統合されていったとする高橋(2003)の知見を参考にする。

割合単元においても，基準を 1 とみたり基準を 100 とみたりすることを自由に行き来し，互いに変換できることが統合されたものとして理解され，かつ形式的に表せればフォーマルな知識とみなす。

単位は自由に設定してもよいものであり，最も抽象的なものが全体を 1 とみることである。ただし，その抽象的な状態に留まるのではなくて，基準と見なすものを自由に変えても，情報的な比較という点において割合概念として同一なものなのだということが分かれフォーマルな知識が構成されたとする。

また，モデルの自己発達やモデルの翻りという考え方を想定すると，インフォーマルな知識とはビルド-アップされていくような, 子どもが自らつくる知識である。子どもが自ら構成していく知識で，model-of と model-for を行き来しながら，フォーマルな知識へと向かっていくと考える。

割合単元においても，フォーマルな知識へ向かう，その子自身のインフォーマルな知識ないし model-of が存在することを想定する。すると，model-of は問題場面の状況に応じた「20 を 1 とみる」ことだったり「40 を 1 とみる」ことだったりするだろう。無論何かを 1 や 100 と見る場合も考えられる。更に，「4 分の 3」や「80 に対する 25」のような見方も考えられる。model-of は児童によって多様である。

また，model-of は児童によってすでにもっている知識なので，それは数直線など外から提示され与えられるものではなく，児童自身がつくりあげる心的構成物である。問題解決当初は，解決に直接結びつかなくても，

model-of から model-for へと連続的に翻っていくことによって割合の多様な文脈を説明する強固なモデルになることを想定する。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の百分率の教授-学習過程の初期段階で出現した model-of は，インフォーマルな絵図と見なすことも可能であろう。絵図は数量の包含関係（全体と部分）を視覚的に表す効果がある。また絵図は心的構成物として，児童が等分除的解釈から包含除的解釈へ向かう跳躍を，連続的かつ視覚的に捉えるための助けとなるだろう。よって割合単元を構成する際，児童が描く絵図を学習の起点として重視したい。

なお，筆者が想定する model-of は，あくまでも単元構成上のものであるので，筆者が想定する以外の model-of も考慮に入れておくべきであろう。

6. 今後の課題

今後の課題として，Gravemeijer（1997），Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論をもとに，子どもがインフォーマルな知識をフォーマルな知識へと自己発達していくまでの model-of，model-for について詳細に検討し，割合授業の単元構成を行う必要がある。

引用・参考文献

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T.Nunes & P.Bryant (eds.), *Leaning and Teaching Mathematics : AnInternational Perspective* (pp.315-345). UK:Psychology press.

高橋等．(2003)．子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．上越数学教育研究，第 18 号，31-48.

高橋裕樹．(2003)．比の三用法を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について．上越数学教育研究，第 18 号，101-110.

田端輝彦．(2000)．同種の量の割合と異種の量の割合の順序に関する考察．日本数学教育学会誌，第 *84* 巻，第 8 号，22-29.

田端輝彦．(2003)．同種の量の割合の導入に関する一考察．日本数学教育学会誌，第 *85* 巻，第 12 号，3-13.

橋本英明．(2007)．確率の授業における中学生の知識の形成過程に関する研究．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊）．

花形恵美子．(1990)．文章題の解決過程における絵の役割．日本数学教育学会誌，第 *72* 巻，第 12 号，28-36.

Van den Heuvel-Panhuizen，M．(2003)．The didactical use of models in realistic mathematics education : an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* , *54* , 9 -35 .

日野圭子．(1998)．フォーマルな方法はいかに学ばれるか：ある 5 年生の教室から．筑波数学教育研究，第 *17* 巻，115-126.

日野圭子．(2008)．数学的表記の内化を促す文脈についての一考察―「単位量あたりの大きさ」の授業を実例として―．日本数学教育学会誌，第 *90* 巻，第 4 号，33-44.

廣井弘敏．(2003)．小学校 5 年生に見られる図による問題把握．日本数学教育学会誌，第 *85* 巻，第 6 号，10-19.

溝口英麿．(2006)．割合の学習における児童の思考過程についての研究～同種量の割合に焦点をあてて～．上越数学教育研究，第 *21* 号，107-118.

吉田亮．(1999)．子どものリアリティを基盤とした活動の構成　－第 4 学年・除法の筆算アルゴリズムの形成を目指した教授実験を通して－．上越数学教育研究，第 14 号，99-110.