

関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて

ー 中学校 2 年「一次関数」の単元における影響についての一考察 ー

上田 貴之

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

平成 20 年度全国学力・学習状況調査(4 月 22 日実施)の結果をみると、数量関係領域の正答率が低いことがわかる。この調査における領域別の平均正答率は、「数と式」「図形」「数量関係」の順に、数学 A(主として知識)では 68.8%、63.3%、59.5%であり、数学 B(主として活用)では 55.1%、58.4%、45.5%であった。さらに設問ごとに平均正答率の著しく低いものに注目すると、数学 A・B とも関数単元の問題がほとんどであった。関数の学習が生徒にとって定着しにくいことは、全国的な傾向であると言えよう。

筆者の教職経験でも、関数単元では学習に困難を感じる生徒が他領域の学習の時よりも多いのではないかと感じていた。そのような生徒は関数の学習に対して「訳が分からない」「何をしているのか、何のためにしているのか分からない」「得体のしれないもの」などの感覚を持っていることが少なくない。多くの生徒が、関数の学習で何をしているのかわからない状態ではなく、手応えを感じながら学習を進めていくための指導のあり方が求められる。

そこで本稿では、関数の学習において初学者が確かな考察の根拠をもちながら学習を進めるための要因を探り、グラフを利用したアプローチがその一つ的手段として有効に働く可能性を示すことを目的とする。

2. 関数学習におけるグラフの役割

2.1 式を中核としている中学関数指導

現在、関数指導の目標として中学校学習指導要領解説：数学編(2008)では次のように示されている箇所がある。

関数の特徴を見いだすのに、表、式、グラフが有効であることを理解し、伴って変わる二つの数量の変化や対応を、表、式、グラフによって表現することによって関数の特徴を能率的に調べることができるようにする。特に、中学校数学科では、式の形に着目して関数を調べることができるようにする。

二つの数量の関係を表に表し、その表を基に変化の様子を調べ、対応のきまりを見いだし、それを式で表現する。また、式を基に表を作って変化の様子を調べたり、式から変化の割合を求めたりする。さらに、表や式を基にグラフをかくて変化の様子を調べる。このようにして、表、式、グラフを単独で用いるのではなく相互に関連付けて関数の特徴を調べる能力を伸ばすことを重視する。(p. 45; 下線引用者)

この目標にあるような生徒の姿を目指して、全国の学校でも関数の概念理解に向けた指導が行われてきているはずである。しかし、学力調査の結果や生徒の様子を見ると満足いく成果が上がっているとは言えない。また、内容においては引用中に下線

で示した通り、式が重視されていることがわかる。もちろん、表・式・グラフを相互に関連づけることを重視してはいるが、三者のうちで基になっているのは式であり、中学校数学科では式が関数学習の中核となっているようにも見える。

中学の関数学習において式で表す意義は様々存在するであろう。それは式でその関数を定義する簡潔性や、式に表したことで変形が可能になる汎用性など式表現のよさがまず挙げられる。そして、高校では式定義から関数自体を考察の中心としていく活動内容になっていくので、中学校の学習は「移行期」(磯田, 1990, p. 49)としての意義もあるであろう。しかし、先の結果のように現状では成果が上がっているとは言えず、初学者の段階で、学習する関数の概念や性質を式に基づいて考察していくことは困難を伴っている現状があると考えられる。

2.2 関数指導におけるグラフの役割

小倉(1973)は関数教育を考える際に、グラフで表現することの良さとして「直感的にその変化の有様を明瞭にする」(p. 125)ことを挙げている。また、式から情報を得にくい場合でも「グラフはわれわれに多くの事実を教えてくれる」(p. 127)としている。そうであれば、グラフは直感的で視覚的にも理解しやすいため、式表現で考察することに抵抗のある生徒でも、グラフを中心として学習することが関数の概念や性質を理解する上で有効な手段となり得るのではないかと考えられる。

ここで筆者における例を一つ挙げ、グラフで表現するよさを補足したい。例えば次のような式を与えられたとしよう。

$$x = (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \theta \right)$$

$$y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \theta \right)$$

この式を見て、筆者の乏しい知識ではどのような変化であるかイメージできなかつた経験がある。ましてや、 θ が変化するにつれてどのような変化をするのかや、 a , b の値の違いによってどんな違いが出てくるのかなどは筆者には考える手段をもつことができなかった。(数学に長けている方や専門でこのような式に触れる機会の多い方にはイメージできるかもしれない。後に筆者は、外サイクロイドという曲線であることを知った。)ただ、このようなイメージできない場合にもグラフで表すことができると、少し身近に感じることができる(図1)。

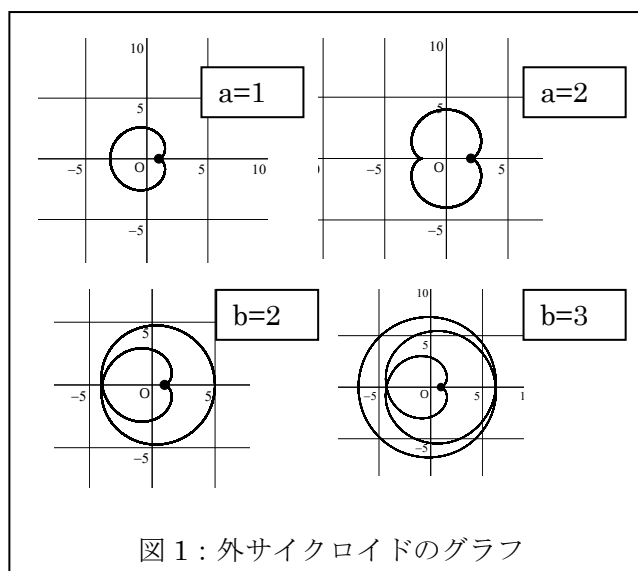


図1：外サイクロイドのグラフ

これらはグラフ表示ソフトによって、先ほどの式をグラフで表したものである。このように表すことにより、 θ による変化の様子や a , b の値によるグラフの形状の違いやその意味について考察することが筆者でも可能になってくる。これこそがグラフで表すことのよさの一つであり、小倉のいう「直感的にその変化の有様を明瞭にする」良さだと考えられる。

中学生で式表現に抵抗を感じる生徒の感覚と、この例で筆者が感じている式表現に対する抵抗感は同種のものであろう。式の程度の違いこそあれ、式に対する親密度が

薄ければ抵抗感が強くなってしまうことがわかる。その点、グラフで表現されていれば視覚的で直感的な把握から変化の様子や特徴を考察することが可能になってくる。中学生が式に慣れていない学習当初の段階に、グラフで変化の様子を考察していくことは、この種の抵抗感を打破する可能性があると考えられる。

2.3 グラフに示された背後の事象

ここまで、初期段階において関数の概念や特徴を理解するためにグラフの果たす効果の可能性について述べてきたが、単なるグラフ表現だけでは抵抗を示す生徒も存在すると考えられる。例えば、グラフがシンボル化されていく過程にも段階があり、その様相についての研究もなされている(大谷 ほか, 2001)。単なるグラフ表現だけで関数の学習が初学者にとって容易になるとは考えにくい。もともとグラフ表現はある考察対象となっている事象の変化の様子を表すものであると考えれば、図形的なグラフ表現とその背後の事象のつながりが考察を深める上で大切な要素になってくると考えられる。

久保(2000)は、現実的な事象と関数のグラフに関する問題について、学年別のデータを用いて検証・分析を行っている。その分析から「現実的な事象から関数のグラフを発見したり、関数のグラフから現実的な事象を解釈することは、学年進行とともに自然と理解が深まるわけではない。」(p. 318)と述べている。つまり、学年が上がってもグラフと現実事象の結びつきを図る関数指導が必要であると考えられる。そして久保は、この理解が深まっていない原因として「関数の指導が、現実的な事象と関連づけて行われていないことに原因があるのではないか。」(p. 318)と述べている。このことから、グラフだけを頼りにするのでは

なく、事象を関連づけて関数の指導が行われる必要があることが示唆される。つまり、グラフを利用する際にも、その背後の事象と関連づけられたグラフであることが理解を深めるための必要条件であると考えられる。

3 実験授業の概要

ここまで、関数学習におけるグラフの効果や、グラフ自体も事象と関連づけられている必要があることを述べてきた。このことを実証するために以下のような実験授業を実施した。

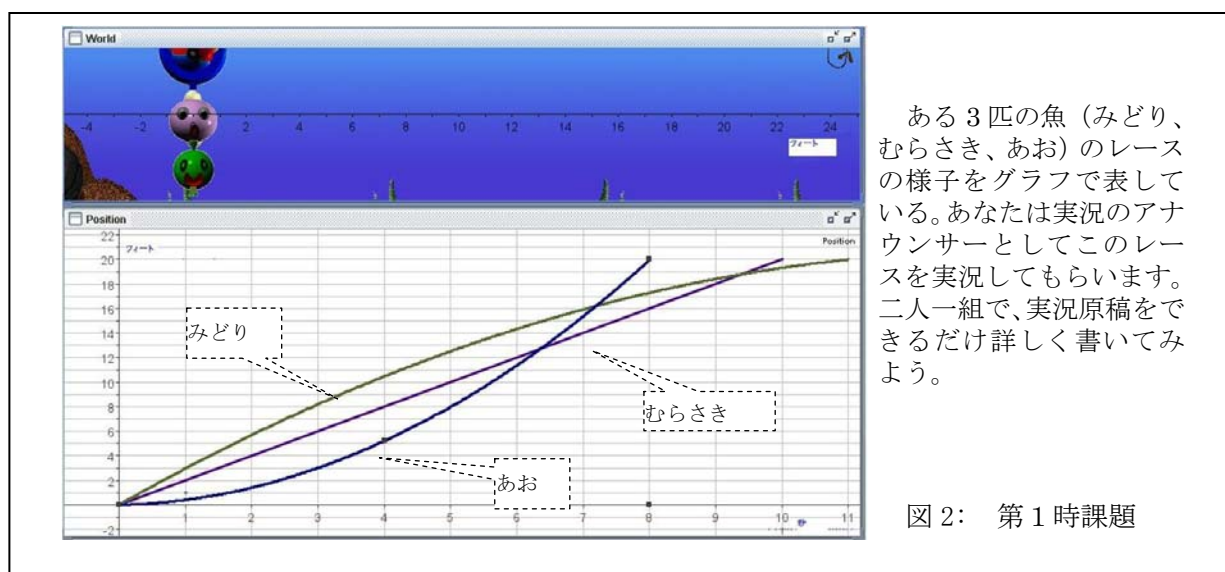
3.1 実験授業の目的と方法

本実験授業の目的は、グラフと事象のつながりを利用した一次関数の授業を導入し、学習者が意味を伴った考察を進めることが可能となることを明らかにし、グラフを利用したアプローチが関数の学習において有効に働く可能性を示すことにある。

実験授業はN県公立中学校2学年1クラスに対して全12時間の授業を行った。そして学級全体と抽出児の学習過程をビデオで記録し、それを基にプロトコルを作成した。また、生徒が書いたプリントも回収して記録として残した。このように収集したデータからプロトコルを基に、グラフと事象のつながりとその影響を中心に分析した。

3.2 実験授業の構想

授業では、グラフと事象のつながりを促す学習を単元最初の導入において計画した。単なる図的表現であるグラフに、その背後にある事象との結びつきを強めておくねらいがあった。具体的には、コンピュータソフトの SimCalc MathWorlds® (Kaput, 2008)で、魚のレースを表したグラフからそのレースの状況を想起して実況原稿をつくる学習を単元の導入として行った(図2)。



この活動で直線のグラフが表している変化の特徴を捉え、その後の学習においてその特徴を根拠として学習を進めていくのではないかと考えた。そして、単元前半は導入時と同じ魚レースの文脈の課題を扱うようにし、徐々に違う文脈の課題や背後の事象を特定できないような課題に取り組ませるようにした。紙幅の関係上、本稿では単元の初期段階（1時間目から4時間目）までの一次関数の特徴を構成していく過程を中心に考察を行う。

3.3 抽出生徒について

抽出生徒シロー（仮名）は、定期考査などでクラスの中では中位の成績もしくはやや上位の成績を取る生徒であり、数学に対する関心は周りより特に高かったり低かったりするわけではない。この学級の数学担当教師によると、シローは他の生徒より比較的発話が多く、考えていることが外在化しやすい生徒であると教えられた。また、シローの座席の周りの生徒達も、シローにとって話しやすい生徒で占められており、お互いに相談して学習する様子も学習過程を分析する上で貴重なデータとなりうると判断した。

4 抽出生徒の学習の様相

4.1 グラフと事象の結びつきを図る場面

1時間目は先に示した導入課題を解決する活動であった。この時間の生徒達は、周りの生徒と相談しながらグラフから事象についての考察を徐々に深めていき、全員の生徒が実況原稿を完成させた。抽出児シローもグラフと事象の結びつきを感得することができたと考えられる。以下にその様相を紹介する。

最初の段階でのシローの実況は、次のようなものであった。

「おっ。今スタートした。あお、出遅れた。ふふ。あおはやい。あおはやい。あおはやい。今あおゴール。むらさきゴール。みどりゴール。へへへ」

スタートから、あおの魚のグラフを時系列に沿って追っていることがわかる。シローがこの発話に至った過程では、熟考した様子は見られず、シローにとって今の課題は難易度が高いわけではなく、ごく自然に発話している様子であった。

このような初期の段階の実況から、シローは徐々にレース全体の考察を深めていき、最終的につくったシローの原稿は次のようなものであった。

「さあ、3匹いっせいにスタートしました。おおっと青出遅れた。みどりがトップです。むらさきがペースをキープ。しばらく変化は無いもよう。ああっとあおが追い上げてくる。むらさきペースがおとろえない！ここであおがむらさきをぬいたー！そしてペースを上げ、みどりも抜いていく。みどりペースがおちる。みどり大丈夫か？むらさきもおいついてくる。おおっと、あおがここでゴール！むらさき、みどりに追いついてくる。ゴールは目の前だ。おおーっとここでむらさきのみどりを抜いて2位でゴール！少しおくれてみどりが3位！」

シロー以外の多くの生徒は、レースの状況を考察していく中で、経過時間や速度に注目していった。しかし、シローのこの最終的に完成させた原稿にはそのような数値情報が書かれていないことに特徴がある。そして、授業後の感想には「グラフが緩やかに進んでいるとか、一定のペースで進んでいるとかが分かったし楽しかった。」と記述し、やはりグラフから数値が読み取れることについては触れていなかった。

2時間目では図3のように、前時の魚レースにおける指定された区間の速さをそれぞれ求める活動を行った。

変化の割合に焦点をあてるため、魚レースにおける速さに考察対象をシフトした。

シローは前時では数値情報を読み取ろうとしなかったが、本時は数値情報を読み取る必要のある課題であり、シローにとっては魚レースで数値情報を初めて扱う場面となった。シローは速さの意味について、当初はみ・は・じのマークに当てはめるだけの不確かな知識であった様子が見られたが、学級全体で速さの意味を確認していくことで単位時間あたりの進んだ距離という確かな知識へと変容していった。

最後にむらさきの魚（直線のグラフで表された魚）の速度については、教師が3つそれぞれの区間を一度に求めるように指示を出し、3問とも終わった生徒は挙手するように指示した。するとシローは指示を出してからすぐに、プリントに3つの区間に共通の速さである2をそれぞれの解答欄に続けて記入しながら真っ先に挙手した。そして、本時のまとめでは「直線なら速さは一定だ」とプリントに記入して振り返りを行っていた。

4.2 直線のグラフの特徴を利用する場面

ここまでの授業で扱った直線のグラフはすべて比例であったが、3時間目では初めて一次関数の課題を扱った（図4）。前時までに培った直線のグラフが表している変化の特徴を利用して、シローは自分の力でほぼ混乱なく解決を図っていった。

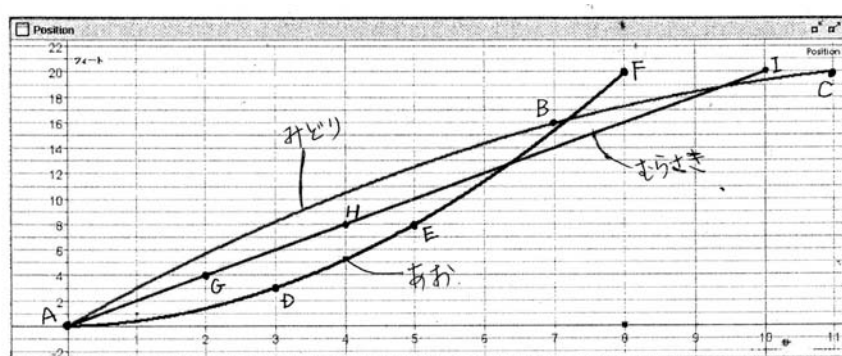


図3：第2時課題

速さはどうなっているだろう。

みどり君

AからB BからC
AからC

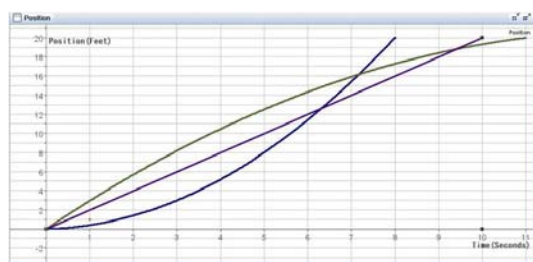
あお君

DからE EからF
DからF

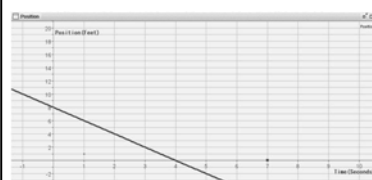
むらさき君

GからH HからI
GからI

青 むらさき 緑



- ①むらさき君(直線で示された魚)がこのまま泳ぎ続けると、20 秒後はどこにいるだろう。
- ②むらさき君が青君と同時にゴールするためにハンデをもらうなら、どの位置からスタートすればいいだろう。
- ②' そのときそのまま泳ぐと 50 秒後はどこにいるだろう。
- ③むらさき君が緑君と同時にゴールするためにはどの位置からスタートすればいいだろう。
- ③' そのとき 50 秒後はどこにいるだろう。



④ 次のグラフのような動きで泳ぐ魚がいる。この魚が 40 秒後はどこにいるでしょう。

図 4：3 時間目の課題

問題①は比例の問題であり、スタートから 10 秒までの様子がグラフで示されている。そして 20 秒後の位置はどこかという課題であった。この問題におけるシローの解決は「1 秒間に 2 フィート進むから 2×20 で 40 フィート」だからとプリントに理由を記入していた。

問題②ではむらさきの魚(直線のグラフ)があおの魚と同着するためにはどの位置からスタートすればいいかという問題であり、一次関数を初めて扱う場面であった。シローはこの問題の解決に際して、グラフ用紙の x 軸上にペンを置き、3, 4, 5, 6, 7, 8 と動かし、すぐに 9, 10 と動かしている。そして、「むらさきは 2 秒の遅れをとっていて、その 2 秒分をむらさきが進む距離が 4 フィートだから」と答えている。

問題②' では「4 フィートのところからス

タートして 50 秒だから、 $2 \times 50 + 4$ となって 104 フィート。」とした。机間巡視の教師がもう少し詳しい説明を求めると、「まずあのまま、50 秒走ったら 100 フィート進むじゃないですか。1 秒に 2 フィート進むから。さらに(グラフの切片を指差しながら) 4 フィートラインからスタートするから、4 フィート足して 104。」と説明した。

問題③と③' もそれぞれ「むらさきがみどりより 1 秒早くゴールしているから、-1 秒すると -2 フィートになるから」「-2 フィートのところからスタートして 50 秒だから、 $2 \times 50 - 4$ (筆者注：本来は -2 が正しい) となって 98 フィート」と答えた。問題④では初めて変化率が負になる課題を設定したが、シローは「8 フィートから進んでいって 1 秒間に -2 フィート進むから $-2 \times 40 = -40$ 。(筆者注：後から他生徒の解答を見て計算間違いに気づく。) 8 フィートからスタートしてるから $-40 + 8$ で -32。」と導いている。

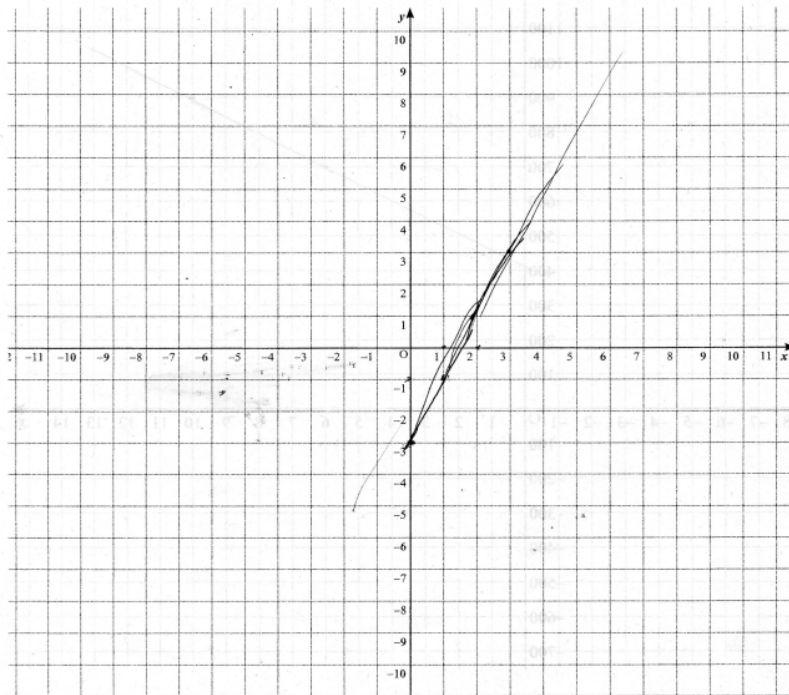
4.3 式による解決を始めた場面

4 時間目ではプリントを用いて、一次関数になっている事象について、いくつかの課題を解決していく授業を実施した。シローの記入したプリントは図 5 に示す。

この時間のシローの解決方法は、今までの様相と少し違い、式による計算の方法を志向し始めていた。ちなみに 3 時間目から本時まで 4 日間の空白があった。以下にシローの解決の様相を述べる。

最初シローは、方眼に (0, -1) (1, 0) の点を取るが、これは題意に沿っていない。次に (1, -1) (2, 0) (3, 3) を順に取り、その後 (2, 0) を (2, 1) に点を取り直した。そのとき直線は引かれていない。次にシローはプリントの余白に、 $y = 2x - 2$ と書いた。

ここで注目したい点はこの時間までに一次関数の式は授業で扱っていないことであ



一定の速度で泳ぐ魚がいます。この魚は 1 秒後 -1m の位置に、2 秒後は 1m の位置に、3 秒後は 3m の位置に、4 秒後は 5m の位置に、5 秒後は 7m の位置にいます。

- ① 8 秒後はどこにいますか。
- ② 4.5 秒後はどこにいますか。
- ③ スタートはどの位置にいましたか。

<プリントの課題>

一定の速度で泳いでいる魚がいます。この魚は 1 秒後は -1 m の位置に、2 秒後は 1 m の位置に、3 秒後は 3 m の位置に、4 秒後は 5 m の位置に、5 秒後は 7 m の位置にいます。

① 8 秒後はどこにいますか。

② 4.5 秒後はどこにいますか。

③ スタートはどの位置にいましたか。

図 5：4 時間目のシローのプリント

る（注：もちろん 1 年生の時には比例・反比例で x や y を使った式は既習である）。その後、 y に 8 を代入し、 $8 = 2x - 3$ を計算して $x = 5.5$ を導く。そして、プリントの余白に $10 - 2$ と書き、①の解答欄に 8 と記入した。そこで周りの生徒と比べ、「うそうそ」と発話して答えを消している。

次に、「5」と発話してからペンでプリントの問題文「5 秒後は 7m 」の位置を指し、ペンの位置をすぐ下の空白に動かして「9」、リズムをワンテンポとってから「13 だ」と

発話し、①の解答を導いた。ここでリズムをワンテンポとっているのは、心の中で「11」という数を唱えていたと考えられる。つまり、7, 9, 11, 13 と 2 ずつの変化で求めたと考えられる。次に、問題文の「4 秒後 5m 、5 秒後 7m 」のところを順にペンで指し示してから②の解答 6 を記入した。変化が一定であることから、真ん中の数を答えたと考えられる。その後、 y 軸上をペンで指して「バカだな俺」と発話してから、(2, 1) (1, -1) を順にペンで指してから (0, -3) の点

を取り、③の解答を導いた。これはグラフ上で切片を見つけ、スタート位置を確定している行為である。

ここでプリントには①から③すべての解答が示されたが、シローはそこで探索をやめなかった。シローは「つーことは」と発話して、 $y = 2x - 3$ と書き、 $8 = 2x - 3$ $2x - 3 = 8$ $2x =$ まで書いてから横線で消した。次に、 $16 - 3$ $y = 13$ とその横に記入し、暫時考えてから「 x って進んだ…」 「8 秒後」と発話し、 $8 = 2x - 3$ $2x - 3 = 8$ とまた記入してから「あれ、違う」と言い、横線で消した。「ん。… x が進んだ距離… 8 秒後。じゃあ進んだ距離。13 の時」と発話し、 $13 = 2x - 3$ $2x - 3 = 13$ $2x = 16$ と記入、「ん？」と発話して $x = 8$ と記入し、「あ、いいんか」と発話した。そして、「おお、すげー」と発話しながら 13 を代入した計算をすべて塗りつぶした。

5. 抽出生徒の学習過程の分析と考察

ここでは前節で述べた抽出児シローの学習過程について分析と考察を加えていく。

5.1 シローが構成していた考察の根拠

シローはそれぞれの課題について、本質的な部分で混乱したり、訳がわからない感覚で取り組んでいたりしてはしていなかった。それは、シローが考察の根拠をもってそれぞれの課題に取り組んでいたからである。その根拠となっていた事柄は「直線なら速さは一定だ」という事であった。

3 時間目でシローが初めて一次関数の課題に取り組んだ様相を分析してみる。問題①のシローの解決方法は、「1 秒間に 2 フィート進むから 2×20 で 40 フィート」という方法であった。問題①は原点を通る直線であるから比例の問題である。そして、問われている秒数が 20 秒後のところ、グラフには 10 秒までの様子が示されていた。よって、

シローの方法以外にも「10 秒の 2 倍の 20 秒だから、進んだ距離も 2 倍の 40 フィート」と考えることも可能であった。実際に後者の方法で解決した生徒も学級の約半数を占めた。シローの方法は後者の方法に比べて、単位量あたりに進む距離（すなわち速さ）を強く意識した解決方法であるといえる。

問題②は、同着になるためのハンディを考察する課題で、一次関数になる事象であった。この課題でのシローの考え方は、「むらさきは 2 秒の遅れをとっていて、その 2 秒分をむらさきが進む距離が 4 フィートだから」というものであった。この課題でも別の考え方が可能である。それは、8 秒時（青がゴールした時）の 2 匹の距離差をグラフから読み取り、それをスタート時のハンディとする方法である。そして、それは計算の必要が無い点ではシローの方法より簡単であると言える。しかし、シローの考えている方法は問題①と同様の考え方を応用している点で、一貫性があるというよさがある。その考え方は 1 秒間に進む距離、すなわち一定の速度であることを基本的な考察の根拠とするものである。

問題②' ではシローが教師に説明する場面において、「まずあのまま、50 秒走ったら 100 フィート進むじゃないですか。1 秒に 2 フィート進むから。更に（グラフの切片を指さしながら）4 フィートラインからスタートするから、4 フィート足して 104。」と発話している。スタート位置は 4 フィートの位置という問題の文脈の中で、ハンディがなかった時のことを仮定して考えていることが分かる。その計算結果に後からハンディ分を加えるという考え方である。ここでもシローがこの課題を解決する際に優先していることは、「あのまま走ったら」「1 秒に 2 フィート進むから」という発話に見られるように「一定の速度」ということであり、ハンディの分は後から調節すればよ

いという考え方に基づいていると考えられる。

続く問題③③'④でもシローは同様な考え方で解決していった。その考え方は「一定の速度」ということをよりどころとし、進んだ距離にハンディの分を調節する考え方であった。

このようにシローが一貫して解決の根拠としていた「直線なら速さは一定だ」という考えは、前時までのグラフを利用したアプローチによって作上げられたものである。2 時間目には授業のまとめとして「直線なら速さは一定だ」と明文化しているが、それ以前にシローの中では構成されていたと考えられる。それは 1 時間目における実況原稿に表れている。シローのつくった実況原稿には「むらさきがペースをキープ」「むらさきペースがおとろえない」といった表現がなされている。このことからシローは 1 時間目で、曲線で表された魚は徐々にペースが上がる（下がる）のに対し、直線で表された魚はペースが変わらないものとした考えが構成されたと考えられる。

そう考えるとグラフを利用したアプローチは、学習者が確かな根拠をもちながら考察を進めるための一つの手段となり得ると考えられる。グラフを通じて変化の様子を考察することで、その図形（線）全体として変化の様子を捉えることが可能になり、学習者が直感的で確かな根拠を作りあげることが見られたからである。

5.2 グラフの利用で初期段階における動の見方の重要性

それではシローが全体として変化の様子を捉えるまでの過程を分析してみる。シローは最初から全体の変化を捉えていたのではない。

1 時間目の導入時の課題は、当初生徒にとって困難な課題ではないかと筆者は考え

ていた。そのような中、シローは課題に取り組み始めた初期の段階から、ある程度背後の事象を想起できていた。初期のシローの発話に、「今スタートした。青、出遅れた。青、速い、青、速い。今青ゴール。紫ゴール。緑ゴール。」というものがある。これは青の魚について時系列に沿ってその動きを追っていく見方である。テレビカメラで例えるなら、青のアップの様子をゴールするまで追いかけていき、ゴールしてから周りの次々ゴールしてくる魚を実況することに該当する。このときのグラフの見方は、青の魚を表す曲線上を右方向に（時系列に沿って）徐々に追っているのであり、その様子を実況として解説している。このように線の上で視点を徐々に動かしていつている見方をグラフを動的に見る見方と表現することとする。

初期段階でシローはグラフを、この動的な見方で考察しており、徐々に考察対象がレース全体になっていくにつれてグラフの線が表す変化全体の特徴を構成していったと考えられる。つまり、最初から全体として変化の特徴をつかんでいたのではなく、動的な見方を進めていく事で全体としての変化の特徴を構成していったのだと考えられる。

初学者にとって、グラフを利用したアプローチは全体の変化の様子を捉えてから考察を進める事ができる利点がある。しかし、初学者に最初から全体を捉えようとさせるのではなく、初学者のうちは動的な見方でグラフを考察しながら全体の変化の特徴を構成させることが重要だと考えられる。

そして、その動的な見方はその後の学習においても影響している場面が見られた。それは 3 時間目の問題②でゴールの時間差「2 秒分」をシローが見いだす場面である。この「2 秒分」をシローが見つけたときに行ったのは、グラフ用紙の x 軸にペン先を

置き、3, 4, 5, 6, 7, 8 と x 軸の格子点を押さえながら右方向に動かして、次に 9, 10 と動かす行為であった。8 秒で一度止めて、9 秒 10 秒と時間差「2 秒分」を見つけているのである。これは時系列に沿ってグラフを動的に見て、レースを再現している姿と見ることができる。青がゴールしたグラフ上の (8, 20) の点から時間の差や距離の差を見つけるのではなく、時間の流れに沿って魚達の様子をコマ送りのように追っていき、青がゴールしてから「9, 10」と 2 秒後に遅れて紫がゴールしていることを確認しているのだと考えられる。初学者の発想として動的にグラフを見る見方は、着眼しやすい方法であると考えられる。

また、単元の後半の学習では気温の経年変化の様子を扱う場面があった (図 6)。この気温の経年変化の様子を関数として捉えることには是非があることと思うが、変化の傾向を読み取ろうとする姿は大切にしたい見方であると考えられる。シローはデータの散布図から、「続き、続き」と発話しながら未来の気温を表す点を予測して記入している。このように容易に式で表すことができないときに、過去の変化の様子から「続き」として未来を予測していくようなとき

も、動的な見方の発想が有効に働くと考えられる。

このように、グラフを動的に見る見方は、初学者にとって自然に発想しやすい見方であるとともに、グラフを考察する際には大切にしていきたい見方であると考えられる。

5.3 式での解決に対する抵抗感の軽減

次にグラフを利用したアプローチが、式による解決にも影響を及ぼしたことを示す。

4 時間目では一次関数となる事象について、いくつかの課題を解決していく授業内容であり、ここでシローは、今までと違い式による解決を志向し始めた。一次関数の式については、ここまでの 3 時間では明示的には学習しておらず、シローがなぜ式を使い始めたのかはデータからはわからない。ただ、当初のシローの式での解決は混乱している様相を見せた。式による解決を志向しているとはいえ、シロー自身は手探りの状態で解決を試みていると考えられる。計算して求めた結果にも自信が持てていない様子であり、他生徒の解答と比べることで自分の答が間違っていると判断していた。その後シローは、この手探り状態での式による解決をやめている。式による解決を修

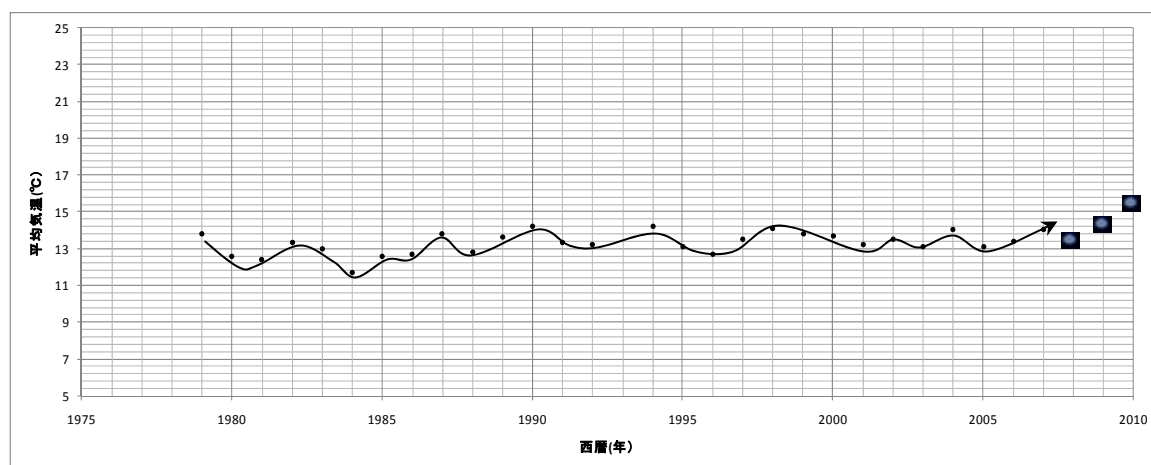


図 6： 点の並びを動的に見ているイメージ図 (■がシローの取った点)

正していく見通しが立たなかったからである。シローが混乱していた原因は2つあり、切片を間違えていることと代入する変数を取り違えている事である。特にこの時点でシロー自身がもっていた問題意識は、どちらの文字に数値を代入したらいいのかというものであった。式による解決の良さの一つに代入など形式的に処理できる良さがあるが、意味が伴わないとシローのように修正はできなくなる。シローは x , y の変数が表している意味についてこの段階では考える事ができていない。故にどう修正していいのかわからなくなっていると考えられる。式を使って解決したいができない状態であり、式への抵抗感が強い状態であると考えられる。

その後シローは、4.3 で示した通り前時までの学習内容を利用してこれらの問題を解決したが、シローはその後手探り状態であった式での解決方法をもう一度検証し始めた。シローは問題の答えを導いた後に「一つことは」と発話して $y = 2x - 3$ という式を書いた。しかし最初は、今回も y に 8 を代入する取り違えをしてしまい、計算してもうまくいかなかった。答が出ているのに計算してもうまくいかないことで、シローはもう一度 y の意味や 8 という数字の意味を考え始めた。「ん。・・ x が進んだ距離・・ 8 秒後。じゃあ進んだ距離。13 の時」と発話して、 y に 13 を代入して計算し直した。計算途中の $2x = 16$ まで計算したときに「ん？」と発話しているので、この段階でのシローは何を計算しているのははっきりしていない状態であったと推測される。それから $x = 8$ と記入して、「あ、いいんか」「おお、すげ」と発話したときに、距離が 13m の時の時間が 8 秒後であることを納得し、自分がやっていた計算が 13m の時の時間を求める確かめ算をしていることに気がついたのだと考えられる。そして、この式

における x が時間を表し、 y が進んだ距離を表していることに確信をもてたのである。

このように、当初のシローの解決は式を志向したとはいえ、意味の伴っていないものであった。意味が伴わない手順としてのみの式の解決方法であれば、混乱しやすく、式に対する抵抗感も強いままであろう。しかし、解答が得られた後の式による解決はその式の意味を考える活動であった。これにより、式に表されている変数の意味を確認することで式への抵抗感が軽減したと言えよう。式での解決する方法をシローが身近にすることができた場面と言える。

シローが式における変数の意味を考える根拠となっていたことは、前時までの学習内容を利用して解答を得ていたことであった。そして今回のグラフを利用したアプローチにより、シローは一定の変化であることを認識しており、今回の解答を見いだす際も一定の変化であることを利用していた。多くの教科書の配列では表を利用して式の解決方法を探っていく、その後グラフに表す活動となっている配列が多い。そのような配列でも一定の変化であることを認識して解決することは可能であろう。ただ、グラフから導入してもこの解決方法が可能であることはここまでで示してきたシローの様相からわかることである。実はこれ以降のシローは、式での解決方法を間違えることが少なくなっており、また、友人へ解決のアドバイスするときにはグラフを利用した解決方法に戻ったアドバイスを行っている姿が見せている。つまり、グラフを利用したアプローチでも式での解決を身近にでき、式表現への抵抗感が軽減できる可能性が示された。そして、本稿のはじめに示した通り、通常の配列で満足のいく成果が出ていない現状を考えると、グラフを利用したアプローチを試みる価値もあるのではないかと考えられる。

6 おわりに

本稿では、関数の学習において初学者が確かな考察の根拠をもちながら学習を進めていく姿を示し、シローの学習過程からグラフを利用したアプローチがその一つの手段として働く可能性があることを示した。

本稿で述べたことは、1つ目がグラフを利用したアプローチでは直感的で視覚的に変化の様子を理解できるために、考察の際の強い根拠となり得ることであった。これは特に一次関数では曲線と対比できることで顕著に表れると考えられる。この強い根拠となり得ることで、学習者は手応えを感じながら関数の学習を進めることが可能になっていくと考えられる。また2つ目には、グラフを利用したアプローチでは学習していく過程において、グラフの見方の大切な見方の一つである動的な見方を初学者に獲得させる機会を与えやすいことがわかった。グラフを通じて背後の事象を意識することで動的な見方が自然に身につけやすいアプローチであり、初学者の段階で動的な見方を獲得しておくことが、その後のグラフを通じた関数の分析を深まりやすくすると考えられる。最後に3つ目は、式への抵抗感の軽減を図る意味で、従来の指導方法と比べて劣るものではないということである。従来は式や表などの数値により変化の特徴を理解してから、グラフをかいてグラフに表れる特徴を分析するという配列が多かったが、最初からグラフによって変化の特徴を考え、その関数の特徴を構成しておくことを学習の中心として重要視していくことは関数の学習におけるもう一つのアプローチになると考えられる。

しかし、ここで得られた知見は一人の抽出児の学習過程から得られたものであり、どの生徒もこのような学習過程が可能であるとは限らない。本研究で得られた知見を基にして複数のケースを分析し、単元の構

成を一層精査していくことが今後の課題である。また、本研究の事例は一次関数の単元におけるものである。他の関数単元でもグラフを利用したアプローチを検証することがもう一つの課題である。

引用・参考文献

- 磯田正美, 志木廣, 山中和人. (1990). 関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究: 小中高にわたる発達と変容. 日本数学教育学会誌, 72(1), 48-63.
- Kaput, J. J. (2008, September). SimCalc MathWorlds® (Version 2.1) [Computer software]. Retrieved February, 2009, from <http://www.kaputcenter.umassd.edu/products/software/smwcomp/>
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター. (2008). 平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学. 同センター.
- 久保良宏. (2000). 現実的な事象と関数のグラフにおける理解の発達に関する調査研究. 日本数学教育学会第33回数学教育論文発表会論文集, 313-318. 鳴門教育大学
- 文部科学省, 国立教育政策研究所. (2008). 平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要.
- 文部科学省. (2008). 中学校学習指導要領解説: 数学編. 教育出版.
- 小倉金之助. (1973). 小倉金之助著作集第4巻: 数学教育の根本問題. 勁草書房.
- 大谷実, 中村雅恵, 漢野有美子. (2001). 比例の指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能: 小学校と中学校の関数指導の接続性に向けて. 日本数学教育学会第34回数学教育論文発表会論文集, 151-156. 東京学芸大学