上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.141-154.

手続き的知識と概念的知識とから見た 高校生の数学的知識の形成過程について

渡辺　由仁
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者の二年間の高等学校における講師経験において，高等学校の数学授業では，計算技能や問題の解法の獲得を生徒に求めている場合が多いと感じていた。高校生は自らの力で数学的知識を形成することが可能である。そこで，まずもって，生徒がどのようにして数学的知識を形成するのかを知ることで，今後の高等学校における授業改善の示唆を得られると考えた。

生徒の数学的知識の形成を捉えるにあたり，手続き的知識と概念的知識との形成について視点を設けることとした。数学教育学研究において，手続き的知識と概念的知識は知られている視点である。知識のタイプにあたる手続き的知識と概念的知識との形成過程という点から生徒の数学学習を改めて見直すことができるのではないか。

本稿で教材として用いた図形数は，数列などは別にして，既習事項にはそれ程大きくは左右されずに解決し得る内容であり，数学的発展性に富んだ教材である。また，教科書で扱うことのない図形数を教材として扱うことで，過去に経験のない問題に対して，生徒がどのように数学的知識を結び付け，用いているのかを見ることができると考えた。

本稿の目的は，特に図形数を教材とし，手続き的知識と概念的知識とを視点として，高校生の数学学習における問題解決過程を解釈，考察することで，高校生の数学的知識の形成過程を明らかにすることである。

２．理解と知識の形成についての先行研究

2.1. スケンプによる理解と知識の形成

スケンプ(1973)は，心的構造であるシェマについて，以下のように述べている。

> シェマは，2 つの主要な機能をもつ。1 つは，既存の知識を統合することであり，もう 1 つは，新しい知識を獲得するうえでの心的な用具となることである。　　　　（スケンプ, 1973, p. 29)

スケンプ(1973)は，機械的な学習と比べシェマによる学習が優位な点として，はるかに効率よく学習し得ること，以前同じ分野を学習した際に形成したシェマがその後の学習に役立つこと，シェマに含まれた内容を整理することの三つを挙げ，長期的な数学学習においてシェマによる学習が有効であることを示すとともに，適切なシェマを形成することの重要性を示している。

スケンプ(1973)は，理解について以下のように述べている。

> 何かを理解するとは，それを適切なシェマのなかに同化することである。(スケンプ, 1973, p. 35)

スケンプ(1973)は，この記述に対し「このことは，理解のもつ主観的な性質を明らかにするし，また，理解はふつう，全か無か的な

ものではないことをもはっきりさせてくれる。」(p.35)と述べている。これは，各人の所有するシェマに同一のものはないことと，シェマは完成することも無くなりもしないことを表している。

また，現在持っているシェマが知識の獲得にとって有効であることを以下のように述べている。

> 活用できるシェマが多ければ多いほど，予期せぬ状況に対処できる能力も大きくなる。
> （スケンプ，1973，p.29）

これは，シェマによる学習が数学学習にとって有効であることを述べている。また，スケンプ(1973)は，数学学習において，生徒の中でシェマによる学習が起こっているかを確認するということが，数学学習の初期段階における教師の責任であるとしている。

スケンプ(1992)は，理解を関係的理解と道具的理解という言葉を用いて説明している。スケンプ(1992)は，関係的理解を「やっていることも，その理由も，どちらもわかっているということ」(pp.3-4)，道具的理解を「「理由なき規則」と呼んだもの」(p.4)としている。また，スケンプ(1992)は，道具的理解よりも関係的理解の方が優れていると述べている。

2.2. 手続き的知識と概念的知識に関する先行研究

Hiebert＆Lefevre(1986)は，概念的知識を以下のように述べている。

> 知識の結び付けられた蜘蛛の巣状のもの，即ち，結び付けている関係がその知識情報の断片と同じくらい重要であるネットワークとして考えることができる。　(Hiebert＆Lefevre，1986，pp.3-4)

この定義に現れるネットワークという語はシェマと同じようなものとして考えることができる。Hiebert＆Lefevre(1986)は，シェマと同様のものとして知識情報のネットワークという語を用いることで，概念的知識を定義している。

Hiebert＆Lefevre(1986)は，概念的知識について，小数の学習を例にあげて説明している。子どもが小数の加減について学ぶとき，子どもは,小数点の右の位は,10 分の 1 の位，100 分の 1 の位であること，また，小数を加えるか引くときに小数点を揃える，という二つの事実について学ぶことになる。この二つの事実から，子どもが小数点を揃えて各位を加減することが予想され，その点で，加法の理解を整数の範囲から小数の範囲に拡張しており，理解を深めると言えると Hiebert＆Lefevre(1986)は考えている。

Hiebert＆Lefevre(1986)は，手続き的知識を以下のように述べている。

> 手続き的知識は二つの異なる部分によって構成されている。一つの部分は，数学における記号表現システム，または，形式的な言語から成り立っている。もう一つの部分は，数学的な作業を遂行するための規則やアルゴリズムから成る。
> (Hiebert＆Lefevre，1986，p.6)

Hiebert＆Lefevre(1986)は，手続き的知識について，二つの小数の掛け算を学習する場面(例えば，3.82×0.43)を例にあげて説明している。この計算をする際に三つの手続きを用いることになる。一つ目は計算する二数を縦に並べ,右端を揃えて筆算の形で書くこと，二つ目は数の部分の掛け算をすること，三つ目は計算結果に小数点を置くことである。この小数の掛け算の例も小数の加減の例と同様に整数から小数への拡張場面であるが，小数の加減の例と違い，小数点を基準として位を揃えていない。二つ目では小数点を揃えずに整数のときと同様に計算しており，三つ目では計算結果に小数点を書き加えている。

我が国においても，礒田(1999)が概念的知識を意味，手続き的知識を手続きと呼び，次のように述べている。

> 意味とは「～は･･･である」と表せる内容であり，定義や性質，そして根拠を基にした推論などが該当する。 (礒田，1999，p.9)

> 手続きとは何かと言えば「～ならば･･･しなさい」と表せる内容であり，やり方や書き方，形式，そして無意識に進む計算，暗算などが該当する。
> (礒田，1999，p.10)

また，高橋(2008)は，表層的，深層的という語を用いて手続き的知識，概念的知識を捉えている。

Star(2005)は，手続き的知識と概念的知識に浅い，深いという視点を加え，捉え直した(表 1)。

表 1. Star(2005)による手続き的知識と概念的知識のタイプと質

		知識の質	
		浅い	深い
知識のタイプ	手続き的知識	手続き的知識の共通の用法	？
	概念的知識	？	概念的知識の共通の用法

> その表は，両方の知識のタイプ(概念の知識と手続きの知識)には，浅いものか，深いものか，のどちらか一方の知識を持つことができることを示している。*概念的知識*と*手続き的知識*の専門用語の現在での用法は，深い手続き的知識のセルに属している知識を考えることを(あるいは名前さえも)難しくしている。 (Star，2005，p.408)

Star(2005)は，これまで多くの研究者によって使われている手続き的知識や概念的知識と呼んでいたものは，それぞれ浅い手続き的知識と深い概念的知識とにあたり，深い手続き的知識と浅い概念的知識とが考えられるのではないかと述べている。

Star(2005)による手続き的知識の再概念化に対して Baroody et al.(2007)は同意と批判を行った。Baroody et al.(2007)は Star(2005)による浅い，深いという視点を加えた点を認めた上で,「深い手続き的知識と深い概念的知識は切り離すことができない」(p.119)と述べ，手続き的知識と概念的知識の結び付きの程度に注目している。Baroody et al.(2007)は，Hiebert＆Lefevre(1986)による二分化した見方や Star(2005)による浅い，深いを加えた四分割した表ではなく，手続き的知識と概念的知識の結び付きの程度と，構造や抽象度や正確な知識の程度，日常的な状況や知識のタイプの豊かな関係の程度によって深い手続き的知識や浅い概念的知識を捉えている(図 1)。

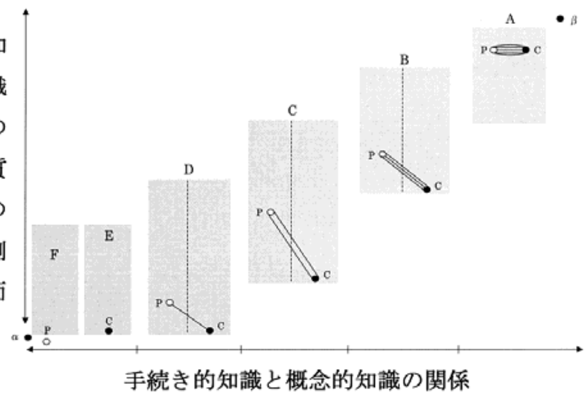


図 1. Baroody et al.(2007)による手続き的知識と概念的知識の視点

図 1 では，横軸で手続き的知識と概念的知識の結び付きの程度，縦軸で構造，抽象度，正確な知識の程度や，日常的な状況や知識のタイプの豊かな関係を表している。白丸(p)を手続き的知識，黒丸(c)を概念的知識で表し，

それぞれの知識の結び付きの強さを線の数で表している。また，αからβへの方向に理解の深さを示し，F が概念的知識と孤立した浅い手続き的知識，E が手続き的知識と孤立した浅い概念的知識，A が深い手続き的知識と深い概念的知識であり，D，C，B は手続き的知識と概念的知識が浅い段階から次第に深い段階へとなっている状態である。

３．図形数についての先行研究

図形数を扱った先行研究に沼野(2004)がある。沼野(2004)は，中学三年生二名から五名を調査参加者として，五角数の一般化を課題とした研究を行った。沼野(2004)は，図形数には数列的な見方や単位図形に着目した見方が求められるとしている。

沼野(2004)は，数列的な見方として，碁石の増加数に着目して数列の和として解決する方法を挙げている。なお，以下の図 2，図 3 において，考え方の図は四番目の五角形で示し，式は第n項の式を表すことにする。

$$1+4+7+\cdots+(3n-5)+(3n-2)$$
$$=(1+3n-2)\times\frac{n}{2}$$

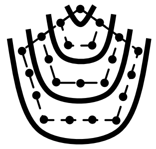


図 2. 沼野(2004)による数列的な見方

また,沼野(2004)は,図形的な見方として,五角数を三角数や四角数へ分割し解決する方法を挙げている。図 3 は，沼野(2004)による一例である。

$$n+\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\times 3$$

図 3. 沼野(2004)による三角数への分割例

上の二つの考え方には，三角数に関わる知識が必要になるため，沼野(2004)は，三角数や四角数の課題を先に扱っている。

４．生徒の知識の形成過程を捉えるための視点

本稿では，手続き的知識と概念的知識の定義を Hiebert＆Lefevre(1986)に依拠する。手続き的知識を「一つの部分は，数学における記号表現システム，または，形式的な言語から成り立っている。もう一つの部分は，数学的な作業を遂行するための規則やアルゴリズムから成る。」とし，概念的知識を「知識の結び付けられた蜘蛛の巣状のもの，即ち，結び付けている関係がその知識情報の断片と同じくらい重要であるネットワーク」とする。

Star(2005)が浅い，深いという視点を加えた点は，知識の形成過程を見る視点を拡張したという点で有効であると考える。しかし，本稿においては，四分割という形式的な枠組みで捉えた Star(2005)の視点よりも，結び付きの程度と構造や抽象度や正確な知識の程度,日常的な状況や知識のタイプの豊かな関係の程度から見る視点を加えている Baroody et al.(2007)による視点がより広く生徒の知識の形成過程を捉えるのに有効であると考え，Baroody et al.(2007)による枠組みで生徒の知識の形成過程を捉えていくことにする。

５．調査の概要と解釈，考察

5.1. 実施方法

調査は，生徒二人を一組とし，筆者が授業者となり，新潟県内の県立高校一年生二組，二年生三組を対象に平成 20 年 7 月 28 日から 8 月 1 日にかけて各組三時間ずつ，計 15 時間実施した。調査は各組一日で行い，50 分間問題に取り組ませ，10 分間休憩を挟む形で三時間続けて行った。毎時間の調査の様子はビデオカメラ三台とボイスレコーダー一台によって記録した。

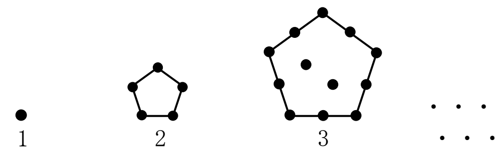
調査では，沼野(2004)と異なり，高校一，二年生を対象としているため，調査冒頭から五角数の問題を扱った。想定した調査展開は,五角数の問題に始まり，五角数の問題の解決

が長く停滞する場合を想定して，六番目の五角数まで描いたプリント，三角数，四角数の図を描いたプリントを準備し，五角数の問題が解決できない生徒に提示することにした。また，生徒が五角数を一般化できた場合を想定して，m 角数の一般化の問題プリントを準備した。生徒が m 角数の一般化の問題が解決できない場合を想定して，六角数，七角数，八角数の図を描いたプリントを準備した。また，生徒が m 角数を一般化できた場合を想定して，ピラミッド型の立体の一般化の問題を準備した。生徒がピラミッド型の立体の一般化の問題を解決できない場合を想定して，四番目のピラミッド型の立体まで描いたプリント，底面が三角数で高さが三までの立体の図を描いたプリントを準備した。さらに，底面が m 角数で高さが n である立体の一般化の問題を準備した。生徒が底面が m 角数で高さが n である立体の一般化の問題を解決できない場合を想定して，底面が五角数で高さが三までの図を描いたプリントを準備した。

五角数の調査問題として，以下のような問題を提示した。

調査問題 1

下の図のようにどんどん大きな五角形を作っていこうと思います。



図のように番号を付けていくと，1 番目の図形には 1 個，2 番目の図形には 5 個，3 番目の図形には 12 個の点が使われています。では，n 番目の図形に使う点の数はいくつになるでしょうか？

図 4. 五角数の問題

本稿においては，調査した五組の中から二年生一組(Fuku，Ishi と呼ぶことにする)について解釈，考察を行っていく。なお，次節以降のプロトコルにおいて，授業者である筆者の発言は T と表記する。

5.2. Fuku/Ishi 組の概要と解釈

5.2.1. 一時間目の概要と解釈

一時間目は五角数の問題から始めた。次の場面は，Fuku が五角数の問題から図 5 を書いている場面である。

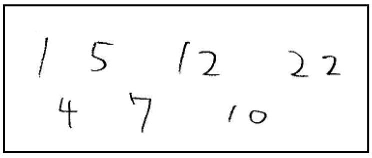


図 5. Fuku による図

	・・・	Fuku 図 5
Fuku	Ishi，もう気づいた？	
Ishi	はい？	
Fuku	いや，だからさ，階差・・・階差だっけ？階差でいいんだっけ？これって。	

Fuku は，五角数である 1，5，12，22 をまず上段に書き，その後，五角数の図形からではなく，上段の数の差である 4，7，10 を下段に書くことで階差数列に気が付いている。これは，五角数から階差を求めるという授業で習った手続き的知識を用いているだけである。ここでは，Fuku は F 状態の浅い手続き的知識を形成している。

Ishi もまた，五角数の問題の図の規則性から次のように考えている。

T	これはどうやってやったの？	
Ishi	これはですね，	
T	うん。	
Ishi	ここを，こう作ったんで，	図の説明
T	おー。	
Ishi	そうなると，ここをこうグルグルグルッとするんで，また次こうすると，グルグルグルグルってみたんですけど，	図の説明
T	あー。	
Ishi	そうすると，1，5，12，22 ってなって，次 4，7，10 の階差数列になるんで，	

Ishi は五角数の図形の規則性について述べているが，下段の 4，7，10 を書く際に五角数の増加の規則性からではなく上段の 1，5，12，22 の値から差を計算して求めている。Ishi もまた,Fuku と同様に五角数から階差を

求める手続き的知識を用いている。ここでは，Ishi はＦ状態の浅い手続き的知識を形成している。

その後，Ishi が階差数列の公式を用いて計算をする中，Fuku は階差数列の公式を忘れたために計算できずに行き詰る。そこで，Ishi が公式による計算を終えたところで，筆者は階差数列の公式以外で求める方法がないかを二人に促す。二人はしばらく階差数列の公式から離れられずにいたが，Fuku は図形と図形の増加数の関係から，Ishi はグラフや五角形の角度，図形と図形の増加数の関係などから考えるようになった。次の場面は，Ishi が，階差数列の公式以外で五角数の一般項を求めようとしている場面である。

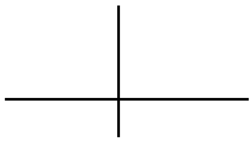


図 6. Ishi の考え方

Fuku	これ，グラフを作ろうとしたの？	Ishi 図 6
Ishi	そうそう。グラフを書いてみようと思ったけど無理だった。	

この場面で Ishi は，グラフを用いて五角数の一般項を考えようとしている。突然，図 6 を書いたことから，試みとしてグラフの縦軸と横軸を用いることを考えたものと思われる。ここでは，階差数列の公式のみで求めてきた五角数の問題に対して，それまでとは異なる手続き的知識を用いて何らかの解決を行おうとしたのであろう。ここでは，Ishi はＤ状態の浅い概念的知識を形成している。また，点の増加数の概念が五角形の概念と結び付いたことで，先の Ishi の持つＦ状態の浅い手続き的知識はＤ状態の浅い手続き的知識に変容している。

次の場面は，Ishi が五角数と点の増加数を結び付けようとする場面である。

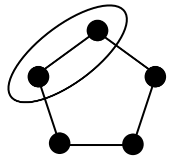


図 7. Ishi による図

	・・・	Ishi:1 番目の図形の下に $n-1$ と記入
T	いま，$n-1$ってのはどうやったの？	
Ishi	えーっとですね，あのですね，あのここの，ここの辺（図 7），こう一辺を作る，あの，どう言えばいいですかね。	図 7
T	うん。	
Ishi	ここの場合は 2 個じゃないですか。	
T	うんうん。	
Ishi	で，4 個になるとこれが，4 個のごちゃごちゃのやつが書いてある，3 個になるんで，辺の長さが。なんか関係あるのかなと思ったんですけど。ま，多分関係あるとは思うんですけど。	

Ishi は，点の増加部分を図 7 のように一辺としてみることで五角数の一般項を立式できないかを考えている。これは，先の場面において Ishi が形成したＤ状態の浅い概念的知識に五角形の辺の概念を結び付けることで，概念的知識が深まってきている状態である。

先の場面で表れた Ishi による五角数と点の増加数とを結び付けようとする試みは，次の場面からも見て取れる。

Ishi	五角形って 540 度だっけ？
Fuku	ん？なにが？
Ishi	540 度だよね，内角って。
Fuku	内角・・・540 度・・・だったっけ？
Ishi	だったっけ？いいんだよね，多分。
Fuku	いいんじゃなかったっけ？ん？
Ishi	あ，いいんだいいんだ。大丈夫。合ってるわ。ちょっと気になることがあった。

Ishi は，五角数を点の数のみでなく，五角形という図形として見ることで，五角形の内角の和を用いて五角数の一般項を解こうとしている。これは，Ishi が知識を結び付けていくことで深い概念的知識を形成しようとして

いる状態であると考えられる。しかし，ここでは，五角形を三角形の集まりとして捉え得ておらず，Ishi はＤ状態の浅い概念的知識までしか形成し得ていない。

Ishi の後に Fuku も図形と点の増加数を結び付けている。

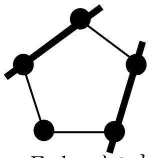


図 8．Fuku による図

T	式を作ろうとしてるの？これ，何の式？	
Fuku	えっと，これは・・・えーと，これは，えーと，こんな感じですかね。a_1，a_2，a_3 って考えて，で，1 個使う点は 1 個で，	Fuku：1，2，3 番目の図形数を a_1，a_2，a_3 として考える
T	うん。	
Fuku	a_2 は，この・・・これとこれ(図 8)です。あの，一つはこれ(右側の線)，	図 8

Fuku は，図 8 のように点の増加部分を 2 つの直線として捉えている。ここでは，Fuku は図 5 から点の増加数を考える F 状態の浅い手続き的知識に，点の増加部分，五角形，辺の概念を結び付けて考えており，D 状態の浅い概念的知識を形成している。

次の場面は，Fuku が点の増加部分を直線として見る考え方をした直後の場面である。

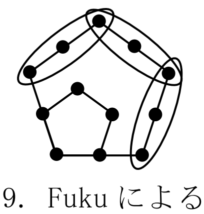


図 9．Fuku による図

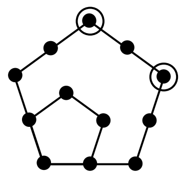


図 10．Fuku による図

Fuku	出すの，この三辺(図 9)にして，これ。
T	うん。
Fuku	で，間に入ってくるのは，ん？間じゃなくて，えーっと，違う。いや，要は，この，三つ重なった，ここ(図 10)が不要に，なってくるから，

この場面では Fuku は，点の増加部分を先の二直線としての捉えを，三直線と三直線の交点という捉えに変化させている。Fuku は，先の二直線を用いる考え方については二番目の五角数までにしか適応し得なかったが，この考え方を三番目の五角数以降にも適応できるように，図形の捉えを正確に変化させた。ここでは，Fuku はＤ状態の浅い概念的知識から深い概念的知識へと移行している状態であり，C 状態の深い概念的知識を形成している。

一方，Fuku の知識同士の結び付きが見られない場面もあった。

Fuku	待ってこれ，漸化式にできるんじゃねーかな？漸化式ならまだ覚えてるかも。

この場面は，階差数列の公式がわからずに諦めていた Fuku が，漸化式なら解決できるのではないかと考えている場面である。階差数列(b_n)と元の数列(a_n)は，漸化式でも表すことができる。Fuku は，それぞれ既有の知識である階差数列と漸化式の知識を，別々のものであるとして考えており，階差数列が漸化式の一部であるという捉えがなされていない。つまり，ここでは，Fuku は，階差数列の知識と漸化式の知識が結び付いていない。

Fuku が五角数における点の増加数を三直線と三直線の交点で考えているのに対し，Ishi は次のように考えている。

T	Ishi 君のその，$3n-2$ はどうやって出てきたの？
Ishi	これは，増えてる数ですかね。
T	増えてる数が？
Fuku	ん？あー。
Ishi	4 個増えてて，次これ(三番目の図形)やると 7 個増えてるんですよ，1，2，3，4，5，6，7 で。
T	うん。うん。
Ishi	で，次これ(四番目の図形)出すと 10 個増えてるんで，

Ishi は，五角数の点の増加数の値である 4，7，10 から，$3n-2$ を求めている。しかし，五角数の点の増加数と他の知識とのつながりは見られず，ここでは，Ishi はＤ状態の浅い概念的知識に留まっている。

次の場面は，Fuku が漸化式の立式で試行錯誤する場面である。

$a_{n+1} = a_n + 3n - 2$　　　$a_{n+1} = a_n + 3(n+1) - 2$

図 11．Fuku による式　図 12．Fuku による式

$$a_2 = a_1 + 3n - 2$$

図 13．Fuku による式

Fuku	いや，なんか，さっきもやってたのが，根本から覆されそうな発見が・・・	
	（中略）	
Fuku	これ（$a_4 = a_3 + 3n - 2$ を指差す)をこのまま漸化式に入れようとしたらさ，失敗したんだよね。でさ，それを，この，この階差数列（$b_n = 1 + 3n$）の一般項を入れたらさ，こっち(図 11)成功しちゃったんだよね。	
	（中略）	
Fuku	わかったわかったわかった。$3n+1$ がいきなり出てくるわけではなく，これ，こうなるんだ。$n+1-2$。この式は，	Fuku：図 11 を図 12 に修正
T	うん。	
Fuku	この式は，えーっと，この，2 を，えーっと，これ(図 13)はすでに第 2 項であっ，ん？いや，$n=2$ で，	
T	うん。	
Fuku	こっち(図 12)で 2 を出すときには，$n=1$ を入れて出すわけだから，	
T	うん。	
Fuku	で，こっち(図 13)，この 2(図 13 の a_2 の 2)は n で，n を $n+1$ にしたんだから，	
T	うん。	
Fuku	こっちの n（図 13 の n）も $n+1$ にしなきゃいけなかったんだ。	
T	んー。	
Fuku	こうすると，こうすると $3n+3$ の -2 になって，$3n+1$。	

Fuku は，五角数の点の増加数 $3n-2$ と，図 5 の階差数列から求めた $3n+1$ が結び付かずに一度行き詰るが，直後に式の関係で説明している。Fuku は，図 5 との比較から整合性を見ているようであり，また，n を $n+1$ としてよい根拠に n 番目，$n+1$ 番目の五角形が結び付いていない。ここでは，Fuku は，D 状態の浅い手続き的知識を用いて解決している。

その後，Ishi は五角形を台形に変形して考え，台形の面積から五角数の一般化を考える方法を思いつく。

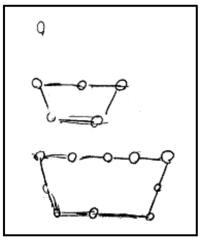


図 14．Ishi による図

T	これはいまどうやってやったの？
Ishi	これは台形の面積で出せるかなと思ったんです。
T	台形？
Fuku	ええっ！？
Ishi	台形の公式で。
T	どこに台形があるの？
Ishi	えっとですね，ここ(五角形の上部)をこう，ぐにゃっとつぶしちゃうんです。
T	んー。
Ishi	わかりますか？この上の部分を。
T	ぐにゃっとつぶしたの？
Ishi	そうすると，これ(2 番目の図形)がこういう台形(図 14)になるじゃないですか。この形，この場合は。

Ishi は，五角数の問題を数列以外の方法で考えるために，五角数の図形を変形して考えている。Ishi は，五角形の一つの角を減らし台形として捉えることで，五角形，台形，頂点，辺の知識を結び付けている。ここでは，Ishi は既有の知識をうまく利用して問題を解決しようとしていることから，C 状態の浅い概念的知識を形成している。しかし，その後，Ishi は，台形の面積を計算したが，先に公式で求めた答えと違うことから，台形の面積で求める方法をあきらめる。ちなみに，台形の面積で求める方法は，例えば，三つの点がある場合，点間の長さである 2 を用いずに点の数である 3 を用いることで解を求めることが可能である。

次の場面は，Fuku が漸化式を解こうとしている場面である。

Fuku	あれ？ねぇ，Ishi。あれ？ちょっと待って。これ(図 12)なんかさぁ，難しいなんか公式の中に入ってなかったってことはすげぇ単純なのか？これって。
Ishi	そのタイプってあんまり出てこなかったよね。

二人は，立式した漸化式を解こうとするが，既習の漸化式の解法にない問題であることから，なかなか計算できない。これは，階差数列と漸化式の知識が結び付いていないために計算ができず，ここでは，二人とも D 状態の浅い概念的知識までしか形成し得ていない。

5.2.2. 二時間目の概要と解釈

二時間目では，一時間目で五角数の問題解決に至らなかったことから，三角数の問題から始めた。二人は五角数と同様にまず階差数列の公式を用いた計算を始めた。Ishi が階差数列の公式による計算を終えた後，二人は公式以外による解法を考える。Fuku は三角形の各点から線を入れ，小さな三角形を使って考えるようになる。次の場面は，Ishi が Fuku の考えた三角形の分割の方法から三角数を考える場面である。

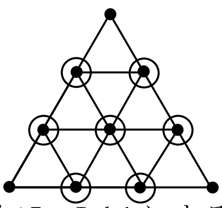


図 15. Ishi による図

T	これ，いまこの(三角形の脇に書いた)，1 とか 4 とか 9 とか 16 ってのは何？
Ishi	三角形をこう，こうつないで三角形になる数ですね。こう，このなんか・・・
T	あ，三角形の数だ。
Ishi	中で。あとは，重なる点をどうやって引くかっていうのを考えようと思ったんです。
T	おー。
Ishi	要は，この，求めたいのはこの(点の)数なんで，
T	うん。
Ishi	要は，こう重なっちゃうところ(図 15)もあるんで，
T	うんうん。
Ishi	この場合は，こう(図 15)，なっちゃって，
T	うん。
Ishi	あとはその，重なった点をどう引こうかを考えようと思ったんです。

Ishi は三角数の問題では，三角数の図形を小さな三角形に分けて考えることで問題を解こうとしている。これは，三角形の図形において，等分，交点，合同，相似の知識を用いて，小さな三角形に分割し，共有点を引くという方法で三角数を求めようとしている。ここでは，Ishi は，C 状態の浅い概念的知識を形成している。

Ishi は，再び面積を用いる方法で三角数の問題の解決を図るが諦め，Fuku と同様に三角形で考える方法に切り替える。しかし，二人が行き詰ったことから，筆者が図形と増加数の関係について考えるように促す。次の場面は，Ishi が，三角数の図形から何かを思い出そうとする場面である。

Ishi	あ！なんか 1 年生のときそんなんやんなかったっけ！？
Fuku	1 年のとき，あったか？
Ishi	なんか，なんか，なんだったっけな？なんかあったじゃん，ほら！
Fuku	点字？じゃねぇ。
Ishi	なんだっけなー。えー，なんとかこんとかのやつ。階段みたいなやつ。
Fuku	階段？
Ishi	階段見たいなやつ。なんだったかなー。

Ishi は三角形の図形からパスカルの三角形を思い出そうとしている。Ishi は，三角形と既有の手続き的知識であるパスカルの三角形を結び付けて考えているが，あくまで表面的な形の類似性に着目しているのであり，ここでは，Ishi は，D 状態の浅い概念的知識を形成している。

次の場面は，二人が三角数の点の増加数から立式を試みている場面である。

Fuku	Ishi，ちなみに階差数列でも答えは出たんでしょ？
Ishi	うんうん，もう出てんの。$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ なった。うん，代入しても合ってるから

Fuku　合ってるんだなーと思うんだけど，ぜーーったいこれにはならないんだなーとも・・・絶対ならないと言うか，どっかでnとnを掛けるような事をしないとさ。そういう操作をしないと。
Ishi　そうそうそうそう。n^2にならないからね。
Fuku　・・・どこでそんな操作が出るんだろうか？

二人は，三角数の点の増加数を用いた式は足し算の形になり，n^2が表れないことに着目している。二人は，ここでは，既有の手続き的知識から問題解決を図っており，C 状態の浅い手続き的知識を形成している。

その後，Ishi は，外周と内部に分けて考える方法や，増加数を式にする方法(図 16)を考え，図 16 から初項と末項を足す方法を発見する。次の場面は，Ishi が，図 16 から自然数列和を計算しようとしている場面である。

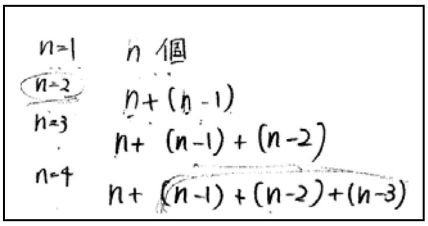


図 16. Ishi による図

Ishi　おー！もしかしたら！もしかしたらもしかすると。・・・初項がnで，公比が-1の，・・・でいいのかな？-1で$n-1$番目はいいかな，あ，ちがっ，ん？ちょっと待った。ここでこいつ($\sum$)の登場だ。

Ishi は，自然数列和を等差数列の和の公式を用いて計算しようとしている。Ishi は既有の手続き的知識を適用しようとしているが，他の知識とのつながりが見て取れず，ここでは，Ishi は，D 状態の浅い手続き的知識を用いて問題を解こうとしている。

次の場面は，Ishi が図 16 から計算した$\dfrac{n(n+1)}{2}$について説明している場面である。

Ishi　これは，なんだっけ，ガウス君でしたっけ？
T　ガウス君？ん？
Ishi　の，あれでやってみると，
T　うん。
Ishi　ただの？
T　それ($\dfrac{n(n+1)}{2}$)が出てくるの？
Ishi　ただのこいつ($\dfrac{n(n+1)}{2}$)になっちゃうっていう・・・
T　んー・・・
Ishi　あー，でも，それ何でかって言えないなー。

Ishi は，自然数列和を計算できたが，計算方法についてはガウスが幼少の頃に行ったとされる計算方法を記憶しているだけである。用いている計算の中に概念的知識は含まれておらず，ここでは，Ishi は，自然数列和については F 状態の浅い手続き的知識の形成に留まっている。結局，Ishi は，図 16 から初項と末項を足す方法を見つけるが，理由がわからずに二時間目を終える。

5.2.3. 三時間目の概要と解釈

三時間目では，二時間目での三角数の問題の解決から五角数の問題の解決に至るかを見るために，再度五角数の問題を提示した。Fuku はまもなく，五角数の図に線を入れて三角数を作り(図 17)，残った部分を直線として考えた(図 18)。次の場面は，Fuku が，図 17，図 18 のように五角数を三角数と直線部分に分ける方法を説明している場面である。

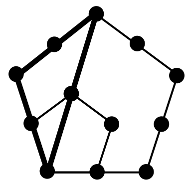


図 17. Fuku による図

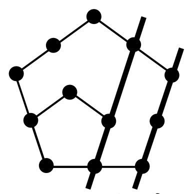


図 18. Fuku による図

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n(n-1)$$

図 19. Fuku による式

・・・　（Fuku 図 19）
T　三角形 1 個取ると，できた形は何だろうねー。
Ishi　台形，かな？
Fuku　式は台形だけど・・・

（中略）

Fuku	んー，台形っぽく見えるけど全部さ，4 つずつなんだよね。
Ishi	あ，ホントだ。そうだね。
Fuku	ってなわけで，
Ishi	あ，それで出るんだね。
Fuku	$n \times (n-1)$。
Ishi	ホントだ。まったく気づかなかったけど，そうだ。数が同じなんだ。

二人は，表面的に見える台形の形を二つの直線の形としてうまく捉え直しているが，図形数の構造として見ると長方形になっていることに気が付いていない。これは，概念的知識の発展としては見て取れるが，構造について知識を形成しているとは言えない。ここでは，二人は，C 状態の深い概念的知識から B 状態の深い概念的知識へ至る過程にあった。

五角数を解決できたことから，m 角数の問題に取り組ませた。六角数のプリントを渡し，

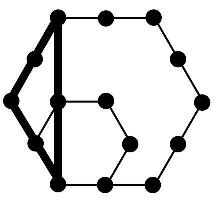


図 20．Fuku による図

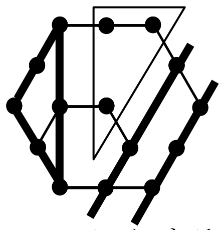


図 21．Fuku による図

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$$

図 22．Fuku による式

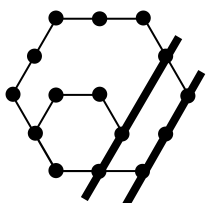


図 23．Fuku による図

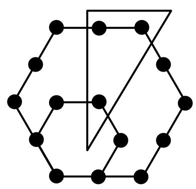


図 24．Fuku による図

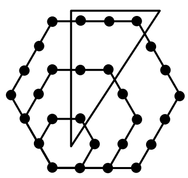


図 25．Fuku による図

しばらくした後，Fuku は，先の五角数の問題と同様に三角形を作り考え始めた(図 20)。直線部も先と同様に考えることにより，残った部分を三角形と考えている(図 21)。次の場面は，Fuku が六角数において一般項を求める場面である。

	・・・	Fuku 図 22
T	この式(図 22)は何？	
Fuku	あ，この式はですね，	
T	うん。	
Fuku	えーっと，先ほどのこの三角形を求める式($\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$)，あ，三角形を求める式で，で，次これ($n(n-1)$)は，先ほどと同様に，これ 3 の，これ 2 つで(図 23)，	
T	うん。	
Fuku	この部分(図 24)が何かなーと思って，もう 1 個もかいてみたんですけど，	
T	うん。	
Fuku	1，2，3 ってあって，これは確か，なんだっけな，えーっと，さっきのこれ(図 25)，4 つ目ですから，	
T	うん。	
Fuku	3 つ目の，えー，三角形のやつと，同じ数だなーということで，	
T	ほー。	
Fuku	で，さっきのこっちの出す式($\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$)に，$n-1$ で，	
T	はいはいはい。	
Fuku	代入。入れて。あー，計算がめんどくさい。	

Fuku は，六角数の図形を三角数，直線部分，小さな三角形の三種類に分割し，六角数の一般項を求めている。Fuku は，六角数の構造について知識形成し，図 22 を立式していることから，ここでは，Fuku は，六角数について B 状態の深い概念的知識を形成している。

次の場面は，Fuku が六角数を三角数，直線部分，小さな三角数に分ける方法を発見した後の場面である。

Ishi	これ，三角形じゃないとできないわけですかね？
T	んー。でも，計算でやってもできるし・・・

Ishi	いや，そうじゃなくて，これが，図形の方法でやるとなると，できるのは三角形だけですよね？あれ？でも・・・
T	三角形・・・しか，できない・・・
Ishi	かなー・・・
T	かなー。どうだろう。
Ishi	五角形の形ってどうなってるんだろう。
Fuku	でもあれかな，やっぱ。図形ができるのは三角形からだから。三角形が，一番根本に。
Ishi	かなー。
T	三角形・・・
Ishi	これ，四角形でやったらダメなんですかね？

Ishi は，三角数を用いた解決方法だけでなく，四角数を用いた解決方法でも求められないかを考えている。Fuku は，平面を構成する最小の点の数が三点であることについて知識形成しているが，Ishi は知識形成しておらず，ここでは，Ishi は，多角形について D 状態の浅い概念的知識までしか形成し得ていない。

六角数と同様に七角形(図 26)，八角形(図 27)を考えると三角形の数が増えていくことから，Fuku は下の図 28 を立式し，一般項を求められた。次の場面は，Fuku が七角数，八角数を六角数と同様に分割して考えている場面である。

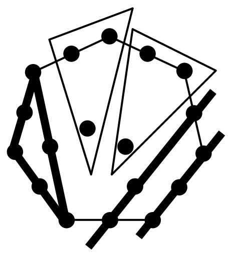


図 26. Fuku による図

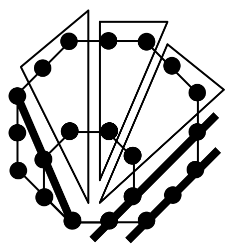


図 27. Fuku による図

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n(n-1)+(m-5)\{\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\}$$

図 28. m 角数の一般項の式

Fuku	作って・・・作って・・・あ，なんかわかった気がする。	図 27
T	ふふふ。	
Fuku	今度 3 つだ。これはあれ，じゃ，五角形のときはどうやったんだっけな？	

(中略)

Fuku	まずこれ($\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$)は三角形で，でこれ，七角形，八角形やってみてわかったんだけど，七角形は，この六角形がはじめて出てきたこの式($\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$)，ってか四角形で始めて出てくるはずなんだけど，この式が 2 つあったんだよね。2 つあって，試しにこっち(八角数)のプリントを見てみたら，

(中略)

Fuku	八角形の場合は・・・お！いいんか，Ishi の言うとおりか。-5か。

Fuku は，六角数で用いた方法を七角数，八角数で用いることで規則性を見つけている。計算をする際も，三角数で求めた$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$を小さな三角数に$\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$としてうまく適応している。しかし，小さな三角形の個数については，六角数で一個，七角数で二個のように，図形数と，それに対応する三角形の個数との関係から求めている。Fuku は図形数の構造の知識形成には至っておらず，ここでは，Fuku は，A 状態の深い概念的知識に至る途中である。

次の場面は，Ishi が多角形と三角形とを結び付けていないことが見て取れる場面がある。

Ishi	制限って言うか，そういう意味じゃなくてですねー。これ 3 つじゃないですか。
T	うん。
Ishi	で，七角形が 2 つじゃないですか。
T	うん。
Ishi	で，六角形だと 1 個ですよね。
T	うん。
Ishi	で，五角形だと出てこない。あー，でも，結局代入して・・・ん？

(中略)

Ishi	そうそう，ちっちゃい三角形が出てこないときはどうすればいいのかなーっていう。
T	もしかしたら，こういう数字入れて試してみたら？三角形のときと，
Ishi	合うんだったら，合う・・・4 のときそれで成り立つかなーっていう話なんだけど。成り立ったら別にいいんだけど・・・
Fuku	ははは。
Ishi	でも，何で成り立つかって話になるんだよね，それが。

(中略)

Ishi	逆に言うと，何でこれが六角形から出てくるかって話になるんですよねー。

T　ふふふ。
Ishi　ふふふ。何でだろなーってさっきから考えてるんですけど・・・なんで六角形からこいつが登場するのかなーっていう。

Ishi は,Fuku の考えた図形の分割方法に対して，五角数以下ではなぜ求められないかを考えている。Ishi は，やはり多角形が三角形によって構成されているという知識を形成していない。ここでは，Ishi は，多角形について，D 状態の浅い概念的知識までしか形成し得ていない。

5.3. 考察

本稿では，特に図形数を教材とし，手続き的知識と概念的知識とを視点として，高校生の数学学習における問題解決過程を解釈，考察を行った。結果として，以下の三点が明らかになった。

一つ目は，手続き的知識と概念的知識との結び付きに対して，知識情報のネットワークの広がりという見方をすることができ，その広がる程度でもって手続き的知識と概念的知識とを捉えることができたことである。例えば,Fuku が図 5 を書いた場面では,Fuku は「階差でいいんだっけ？」と発言しており，点の増加の規則性を考察する手続き的知識と五角数の図形を照らし合わせて考えることができていない。これは，Fuku が，単純な知識情報のネットワークであるアルゴリズムから知識情報のネットワークにまで結び付きを発展させていなかったからである。その後に Fuku が点の増加数を二直線として捉えている場面では，Fuku は「a_2は，この…これとこれ(図 8)です。」と述べ，点の増加の規則性を考察する手続き的知識と五角数の図形に関わる知識が結び付き，単純な知識情報のネットワークであるアルゴリズムに，点の増加部分，五角形，辺の知識が結び付けることで概念的知識を形成していたと捉えられる。

二つ目は，Baroody et al.(2007)による枠組みにおいて，D 状態，C 状態を何度も行き来する生徒は，既存の知識を再構成することによって，B 状態以上の深い知識形成に至っていることである。調査における三時間の Fuku と Ishi の知識の形成過程を，一つ一つ Baroody et al.(2007)に当てはめると，それぞれ図 29，図 30 のようになる。

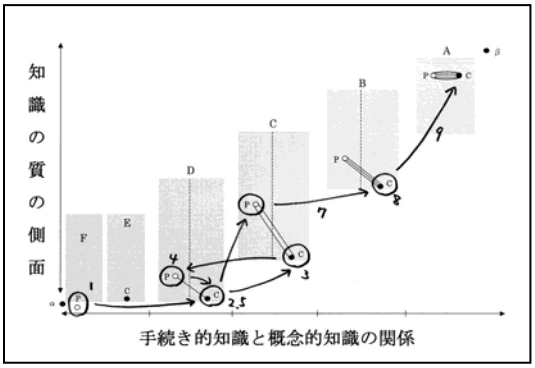


図 29. Fuku の知識の形成過程の推移

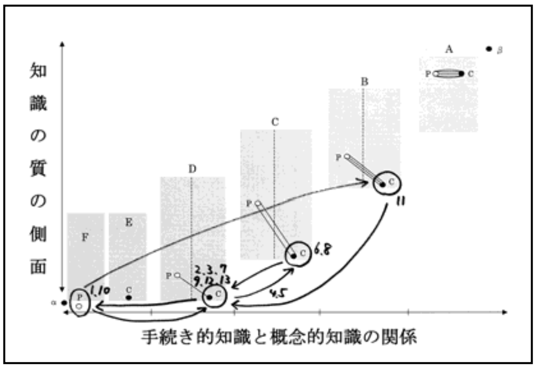


図 30. Ishi の知識の形成過程の推移

Fuku は，図 29 のように，本調査において，F 状態の浅い手続き的知識から D 状態,C 状態を行き来する中で，B 状態，A 状態の深い概念的知識に至っている。Fuku が本調査において，A 状態の深い概念的知識に至った要因として，Fuku は，図 8 から図 9，図 10 へ，点の増加数の捉えをうまく変化させ，また，点の増加数の捉えを図 11 から図 13 までの式との関係として常に維持していたことが考えられる。それらの結び付きを強めようとすることで，その後の六角数，七角数，八角数の問題に対してうまく図形の捉えを変化することで適応しており，Fuku にとって，式と図形との結び付

きが図形数の構造という概念的知識の形成を助けていたと考えられる。

Ishi は，図 30 のように，本調査において，D 状態，C 状態を何度も行き来し，結果的に B 状態の深い概念的知識に至っている。Ishi が B 状態の深い概念的知識に至った要因としては，Fuku による影響が考えられる。Ishi は，五角数の点の増加数について，点の増加数である 4, 7, 10 から $3n-2$ を求めていたように，計算で問題を捉える傾向が強かった。しかし，Fuku が，図 8 から図 13 のように，積極的に式と図形との結び付きを見ていることから，Ishi も図形数と式との関係に注目し，図形数という概念的知識の形成が深まったと考えられる。

三つ目は，この研究でインタビュアーとなった教師や生徒同士による影響は大きく，教師による発言や板書，他の生徒の発言が生徒の知識形成に大きな影響を与えており，教師や生徒同士の相互作用をうまく利用することで深い知識形成に至るという知見が得られたことである。例えば，Ishi がパスカルの三角形を用いた方法で問題解決を試みる場面では，Ishi が筆者に公式以外の解法を求められ，また，Fuku が図形と式との関係から問題解決を試みていることに影響を受け，Ishi も図形数と既有の手続き的知識を積極的に結び付けようとするようになったと考えられる。

６．まとめ

本稿における考察から得られた示唆としては，高等学校の数学授業にも，時には時間をかけて概念的知識を豊かにするような余裕のある授業が必要であるということがある。

本稿は，修士論文の一部をまとめたものである。本稿においては Fuku/Ishi 組を取り上げたが，他の組においては，等差数列の和を求めることを，台形の面積を求めるという手続きに変えている生徒も見られた。

今後の課題は，本稿に取り上げなかった他の組についても再考察し，高校生の数学的知識の形成過程を明らかにすることである。

引用，参考文献

Baroody, A. J., Feil, Y., ＆Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115-131.

Hiebert, J. ＆Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics：An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge：The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum.

Star, J. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Resea-rch in Mathematics Education*, *36*, 404-411.

R. R. スケンプ. (1973). 数学学習の心理学. (藤永保/銀林浩訳). 新曜社.

R. R. スケンプ. (1992). 新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－. (平林一榮監訳). 新曜社.

礒田正美，原田耕平. (1999). 生徒の考えを生かす問題解決授業の創造：意味と手続きによる問いの発生と納得への解明. 明治図書.

家内慧. (2008). 概念的知識と手続き的知識とから見た比例学習における子どもの知識の形成過程について. 上越教育大学大学院修士論文，未公刊.

高橋等. (2008). 数学的活動を捉える手続き的知識と概念的知識という視点の有効性への議論. 東北数学教育学会発表資料.

沼野友宏. (2004). 数学学習における相互作用過程に関する研究―Sfard の焦点分析を柱として―. 上越教育大学修士論文.