上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.19-26.

学生にみる文化的数学観への変容

伊　達　文　治
上 越 教 育 大 学

１．はじめに

《実用上の必要が幾何学やその他の学問の発見される原因になったことは，誠に自然なことであって，それであるからこそ，ここに不完全から完全へという形式の法則が成り立ち，また感覚から合理的判断へ，さらにそれから純粋な知性へという自然な発展が見出されるのである》（中村，1978，p. 57）とは、5世紀に書かれたプロクロスの『原論第１巻の註釈』の一部である。そこには数学ですら実用的な必要性から発生したことが記されているばかりでなく、「感覚から合理的判断へ, さらにそれから純粋な知性へ」という教育的示唆も含まれている。数学は，社会との関係を持ちながらわれわれを取りまく世界を維持・改善するばかりでなく，われわれをも数学という文化的要素の内部において成長・発展させてきた。こうした数学の機能と展開は，程度こそ違え世界の文明や文化の中で指摘できる。すなわち科学は，世界という空間の中，そして時代という時間の中で，時には広域の広がりを示し，時には小さな流れとなり，それらは絡み合いうねりながら, 展開してきた。現在の学校数学は，残念ながらこのダイナミズムを伝えているとは思えない。

数学は，先人達が自分の文化の中で，問題を自分の問題として捉え，試行錯誤を繰り返しつくり上げ，今も，世界各地，社会の中，教室の中，各個人の中で，そして，各文化の中で，つくられ発展しているものである，という「文化的数学観」「文化的数学学習観」への意識変容を図る方策が必要である。文化としての数学を学ぶことのできる教育内容や教材の見直しがなされなければならない。他教科では得られない数学のよさ・面白み・美しさ・楽しさ・有用性という「数学の本質的な価値」を感得できるような，教育内容の創造と教育方法の工夫という取り組みも大切となる。その取り組みによって, 生徒の「数学観」・「数学学習観」が変容し，情意的学力も向上し，学習意欲を育てることができ，生涯数学を学び続ける力にすることができると考える。

本学において, 平成 21 年度後期の主には学部２年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業４コマを担当した。そこで文化的数学観への変容に主眼を置いた実践を試みた。本稿では, その実践の概要を述べ, この授業でみられた学生の数学観の変容について考えていきたい。

２．授業の概要

選択科目「数学的経験と学習過程」の授業の目標は，数学的経験とは何かを演習を通して実感し，数学学習の支援のための素養を高めることである。もう少し具体的に述べれば, 次の２点にまとめられる。

(1)　初等的な数学の知識を自ら構成したり，確かめたり，あるいは数学外の場面へと応用してみるといった経験をすることにより，算数的経験や数学的経験を子どもたちにさせることができるような授業を, 教師として計画・実施するための素地を養う。

(2)　そうした経験の中から,数学と人間との関わりについて考え，自分の数学観を問い直すための契機ともする。

授業は，平成 21 年度後期火曜日３限 13:00〜14:30 に，次の日程と内容を予定し行ったものである。

回	授業日	内　容（予　定）
1	12 月 22 日	記数法・計算法
2	1 月 12 日	平方根・開平法
3	1 月 19 日	求積法（面積・体積）
4	1 月 26 日	日本の数学・西洋の数学

実際には，1 回目の内容の後半が 2 回目にずれ込んだため，次に示すような内容の実施となった。

回	授業日	内　容
1	12 月 22 日	記数法・計算法(1)
2	1 月 12 日	記数法・計算法(2)
3	1 月 19 日	平方根・開平法
4	1 月 26 日	求積法（面積・体積）

4 回目に予定した「日本の数学・西洋の数学」は，各回の内容の中にできるだけ盛り込んだつもりである。

受講者は，学校教育学部 2 年生が 23 名，学部 4 年生や学校教育研究科大学院生が 10 名，計 33 名であった。教員志望の学生・院生が殆どであるとみてよい。また，この科目を選択していることから，受講者の殆どは少なくとも数学という科目が嫌いではなかったとみてよいであろう。

次に，各回に実施した授業の概要を，取り組んだ課題を中心にして述べていきたい。

２－１．１回目「記数法・計算法(1)」

この授業で取り組んだ主な課題は次の２つである。

［課題１］

B.C.17 世紀頃エジプトの僧侶アーメスによってパピルスに書かれた数学の巻物がイギリス大英博物館に保存されている。この本のはじめに２を３から 101 までの奇数で割った次のような分数表がついている。

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\ ,\ \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\ ,\ \frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\ ,$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\ ,\ \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\ ,\ \cdots\cdots$$

こういう分数表は当時何のためにどのように利用されたものかを想像してみよう。

［課題２］

$\frac{2}{15}$，$\frac{2}{17}$，$\frac{2}{19}$ などを単位分数の和に分解してみよう。$\frac{7}{9}$ のような分数も，分数表を利用して，単位分数の和に分解してみよう。

２－２．２回目「記数法・計算法(2)」

この授業で取り組んだ主な課題は次の２つである。

［課題３］

古代エジプト人は全ての計算を２倍と 10 倍の２つの算法で処理したという。例えば，19×6，23×12 は次のように行った。

1	19	1	23
＼2	38	＼10	230
＼4	76	＼ 2	46
和 6	114	和 12	276

また，13 倍を求めるには 13=1+4+8 を用い，25 倍を求めるには 25=1+8+16 を用いた。

ロシアの農民の中には，次の左のような計算をするものがあるという。この計算は書き直してみると次の右のような計算になる。

83	157	＼ 1	157
41	314	＼ 2	314
×20	628	4	628
×10	1256	8	1256
5	2512	＼16	2512
× 2	5024	32	5024
1	10048	＼64	10048
	13031	和 83	13031

これはよく見ると先の古代エジプト人の方法と同じである。

上のロシアの農民のやり方を説明してみよう。また，このやり方は現代で言えばどういう記数法に相等するものと言えるだろうか。

［課題４］

フランスやロシアの農民の間でごく最近まで行われた面白い掛け算がある。まず，左手と右手それぞれの指に，小指から親指に向かって順番に 6, 7, 8, 9, 10 と番号を付けておく。例えば，6×8=48 を計算するのに，左手の 6 の指と右手の 8 の指を合わせる。左手の指を 6－5=1 本小指だけ折り，右手の指を 8－5=3 本中指から小指まで折る。すると折った両手の指の数の和 1+3=4 が答えの 10 の位の数字，折らずに残った指の数の積 4×2=8 が答えの 1 位の数字になる。この方法を使うと，5×5=25 以上の九九を知らなくても九九の計算はできるようである。

この指計算の原理を説明してみよう。

２－３．３回目「平方根・開平法」

この授業で取り組んだ主な課題は次の２つである。

［課題５］

平方根は，古代では東西とも，ピタゴラスの定理に関連して出てくることが多い。直角三角形の二辺から残りの一辺を求める場合に開平が必要になってくるからである。平方に開くという計算はかなり古くから行われていた。西洋ではギリシャ時代に盛んにこれが行われているし，東洋でも中国最古の数学書『九章算術』(紀元 1 世紀頃)に既にその記載がある。それより前の平方に開く計算を知らない時代にも，人々は試行錯誤法によって平方根を求めることができたし，計算を急ぐ必要のない大昔においてはこの方法で十分間に合った。しかし，そのうちに人々は，元の数をその平方根で割ることを考えた。元の数を割った商と平方根の算術的平均を作ることによって近似の精度を高めていくのである。逆数表を盛んに使って割り算を行っていた古代バビロニアの資料にそれをみることができる。（中略）このことを文字式で表すと，

$$\sqrt{a^2+b} \approx \left(a+\frac{a^2+b}{a}\right) \div 2 = a+\frac{b}{2a}$$

（b は a に比してずっと小さい）ということになる。古代バビロニアの数学の記録には（十進法に直すと）$\sqrt{1700}=41.25$ や $\sqrt{2}=1.416\cdots$ のような結果を載せているものがある。この数値は上の近似公式によるものと大体一致する。彼らは平方根を求める場合，上の平均の方法を用いていたのではないかと言われている。

50 の平方根の近似値について，上の古代の近似式を検討してみよう。

［課題６］

「塵劫記」初版本では，第 25 条「開平法」において，開平の記述がある．最初の問題を次に示す。

坪数　一万五千百二十九坪の正方形の一辺を求めよ。　　　　　　答，百二十三　間。

この後，そろばんを４丁縦に並べての計算図と正方形を分割する面積図が順次示され，それとともに「倍商法」による解法が記述されている．この問題に続いて，「352125225 を開平せよ」と「95140516 を開平せよ」の２つが出題されている。次の第 26 条では，「開立法」が述べられている。

15129, 352125225, 95140516 のそれぞれを，筆算によって開平してみよう。

今あなたが行った筆算は，正方形を分割する面積図によってどのように説明されますか。

２－４．４回目「求積法（面積・体積）」

この授業で取り組んだ主な課題については，紙面の都合上，どういう話題を扱ったか簡単な内容紹介に止めることにする。

［課題７］

古代エジプトのリンド数学パピルスに書き残されている，直径９の円形の土地の広さを求める問題とその解き方についての話題

［課題８］

エジプトやバビロニアでは色々な図形の面積体積が近似的に計算されているが，その中の半球の表面積と円周率に関する話題

［課題９］

ヒポクラテスが円積問題の研究中に発見した，２つの月形の面積の和は直角三角形の面積に等しいことを発見した話題

［課題 10］

アルキメデスは円や球の計量について研究したが，その中の球と外接する円筒の体積と表面積が規則正しい比になることを発見した話題，そして円の直径と周の比（円周率）についての話題

［課題 11］

和算家が，球を一万枚の薄い円錐台に切ってその和として体積を計算した話題

３．レポートについて

この授業を全て終えて，受講者に次のようなレポート課題を出した。

ー課題ー　まず，これまでの自分自身の算数観・数学観はどのようなものであり，どのように変遷してきたのか，自分自身を振り返りながら，詳しく記述しよう。そして，この授業を通して，自分自身の算数観・数学観がどのように変容したか，できるだけ具体的に述べてみよう。さらに，これからの自分自身の数学学習に関する抱負を簡潔に表明してみよう。(A4 判 1 枚程度)

受講者全員がレポートを提出した。どれも率直な記述がなされおり全てを載せたい所ではあるが，紙面の都合上，ここでは７名に絞って次に紹介したい。次に載せているのは，レポートの記述をできるだけ生かしながら，①これまで，②この授業を受けて，③これから，の３項目に分けて要約したものである。

［学生Ａのレポート］

①これまで

数学の授業は，教えられた公式を使い，問題を解き答えを出すというもの。答えがはっきりしているという魅力はあるが，受験のための勉強になってしまい，数学を楽しむという余裕はなかった。

②この授業を受けて

数学というものを新たな視点で見ることができた。今まで数学の歴史や，昔の人はどのように計算していたのかなど考えることはなかった。いろいろな面積の近似や平方根の近似など今までなんとなくやっていたものを違ったやり方でやってみて新たな知識が自分の力になってくるのでとても新鮮だった。自分の数学観が広がったような気がした。

③これから

数学嫌いが増えているような状況を打開するためにももっと数学の楽しさや面白さを伝えられるような授業が展開したい。ただ問題を与えて計算させるだけの授業ではなく，数学の始まりや色々な視点からの見方を探る活動を取り入れた授業を展開してみたい。

［学生Ｂのレポート］

①これまで

小学校の頃，算数・数学は答えがはっきり決まっていて，覚えることも少ないので好きであった。中・高と新しい公式も増えていき，新しい公式を習う度にまた覚えるものが増えたと思い，憂鬱に感じたりもした。

②この授業を受けて

現在私たちが公式を使って簡単に答えを求めたり計算できるようになっているのは，先人達の苦労のおかげであると感じた。数学を国際的に見ることもできた。数学は，どの時代においても色々な国の人々によって愛され探求し続けて来られたものだと思った。公式も認められるまでにどのような歴史があったのかが気になるようになった。

③これから

教師になったら，ゲーム形式にして問題を解いてやり方を身につけるようにしたり，新しい公式が出る度にそれにまつわる歴史や裏話を紹介したりして，数学に親しみを持ってもらうような取り組みがしたい。

［学生Ｃのレポート］

①これまで

三角形の証明など証明には興味があり，高校に入った頃なんとなく数学は美しいものだ

と感じるようになった。小学校のときはひたすら計算し，学年を上がるにつれ計算の工夫などをしていくうちに，「素早さ」の追求こそ「美しさ」の追求であると思うようになった。証明にも合理的なやり方を追求するようになった。

②この授業を受けて

自分がまだ捉えていなかった数学の「美しさ」に気付いた。例えば，古代エジプト人の単位分数とピラミッド建設に携わった労働者へのパンの分配の話で，ある数を均等に割って計算するのではなく，不均等であっても結果的には同じになる，という発見などである。今の自分たちは昔の人が必死に計算したものを何気なく使っているが，そこを敢えて見つめ直す。数学はただの計算で終わったのではなく，人の役に立っている。この古代エジプト人の計算は直接的にも人間の役に立っていると思った。

③これから

普通に行われている計算を改めて捉え直し，完成される道のりやそのために人生を献げた偉大な数学者達に敬意を表しながら計算していきたい。

［学生Ｄのレポート］

①これまで

算数との出会いは公文式であった。算数や数学は好きで，多くの問題を解くことに重点を置いていた。中学校では，周りの友達が「なぜこういう答えになるのかわからない」と悩んでいる間に，「こうやって解くもの」と暗記をし多くの問題を解くことによって体に染みこませるという感じであった。高校に入って，数学には解答への糸口を見つけたときの快感があることや答えが必ず決まっているところが好きで理系に進んだものの，３年になって数学Ⅲ・C という壁にぶつかり，数学に対して苦手意識が強くなった。

②この授業を受けて

数学の面白さに気付くことができた。数学の歴史もはじめて学び興味が湧いた。特に興味を持ったことは，ロシアとフランスで行われていた指計算である。５×５以上の掛け算の計算が九九を使わずに指を使ってできることを知ったときには本当に感動した。

③これから

自分が教師になったとき，少しでも子ども達に数学を面白く好きになってもらえるよう，わかりやすく授業をする方法だけではなく，深い知識を身につけていきたいと思った。

［学生Ｅのレポート］

①これまで

算数や数学は難しいものであり何の面白みもなく，テストや成績のために学習していた。算数や数学は学ばなければならないものだと思っていた。問題の解き方や公式は教科書を見れば載っているので何も考えることなく機械的に問題を解いているだけで，自らが新しい発見をしようとはしなかった。私の場合，小学校・中学校では，難問を解いたときに楽しいと感じることができたので，学ばされている算数や数学でもやっていけた。しかし，そう感じられない生徒は算数や数学に取り組むということはなかったのだろうと思う。高校の時，先生の所に質問に行ったことがある。なぜこの解き方になるのか，公式がどのように使われるか，などを教えてもらい，算数や数学に重要なのは機械的に解くことではなく考えることなのだと感じた。

②この授業を受けて

昔，日常での問題を算数や数学で考えている人達の話や考え方を知ることができた。今のようには算数や数学の研究が進んでいないのになぜこのようなことができたのか，不思議に思った。何もない状態で数学的な考えが出てきたのは，日常の問題を解決しようという思いがあったからだと思う。今のようには様々な考えがない中で，様々な考えが生まれたのだと思った。自分の算数観・数学観は大きく変わった。昔の人々のように何もない状

態で考えることはできないが，わからない問題，解き方がわからない問題でも知っている知識を使って様々な方向から考えることが大切であると考えるようになった。そのように考えることができるようになれば，楽しみも生まれてくるだろうと思える。また，日常との関わりの大切さを知った。日常のことを考え，工夫することが算数や数学につながると改めて思った。子ども達にも日常と算数・数学を結び付けてあげれば数学を楽しいものと思えるようになると思う。

③これから

数学の学習において考えることをしっかりやっていきたい。大学の数学は意欲を持つことがなかなか難しいが，数学の基本となることをしっかり学んで身につけていきたい。また，子ども達にどのように算数や数学に面白さや興味をもってもらう授業を行うか，考えていきたい。そのためにも，算数や数学に関して多くの知識や，経験を積んでいきたいと思う。

［学生Ｆのレポート］

①これまで

算数・数学は，国語などとは違い，答えは一つだけで，答えを導き出すためのいくつかの方法にそれぞれの数値を当てはめるだけの単純な行為を繰り返す学習だと思っていた。そして,算数･数学ができるかできないかは,答えを導き出す方法が思い浮かぶか浮かばないかであると思っていた。

②この授業を受けて

今までは答えを導き出す方法だけしか見てこなかったわけだが，その方法をいかにして導き出したのか，ということにとても興味，関心を持つようになった。例えば，古代の円周率や平方根の近似値の追求などである。私は今まで教科書に書かれた問題を教科書に書かれた方法でしか解いてこなかったし，それしかできないと思っていた。この授業で，実際は試行錯誤の繰り返しなど自分が考えもしなかったような方法は沢山あるとわかった。大切なのは，導き出そうといている問題の本質をいかに詳細かつ正確に把握できているかなのだと思う。この授業を契機として，これまで上辺しか見てこなかった算数・数学を，深く考え見てみようと思った。そうすれば数学をもっと好きになれると思うし，教師になったとき子ども達に数学の魅力も伝えることができるような気がする。付言すると，この授業で，数学が実際昔，世界各国で人々の生活と深く結びついていることを感じることができた。各国で計算方法などが異なっていることや数学がそれぞれの国でどのように影響してきたのか，どのように結びついていたのかが垣間見られて，とても興味を引かれた。数学の起源に迫ってみたいと率直に思った。

③これから

この授業を通して得ることができた数学への興味を，将来子ども達に少しでも伝え，自分と同じように興味を持ってもらえるような教師になって，算数嫌い・数学嫌いを少しでも減らし逆に好きになってもらえるよう，そして自分自身ももっと数学が好きになれるよう，残りの大学生活で様々な数学を研究していきたい。

［学生Ｇのレポート］

①これまで

数学は受験やテストに必要であり，ただひたすら勉強していかなければならないものだと思ってきた。小学校の時，図形の問題や規則性の問題が解けたとき，喜びを感じることが多かった。中学校では主要科目として必要だからやっていた。高校の数学では，ただ計算方法を暗記していただけのように思う。公式や定理など，解く手順や答えの書き方に至るまで全てを暗記して覚えていたように思う。

②この授業を受けて

面白い教材を選ぶことの大切さ，教材を生かす方法を考えること，先人が創り上げてきた数学から学ぶ面白さなど，多くのことを学

ぶことができた。教師になったときの，数学教材の面白さやそれが生まれてきた歴史を知ることにより，数学の本当の面白さを伝えることの大切さを感じた。ただ定理や公式，解き方を教えるのではなく，数学の面白さ，数学の必要性など様々な視点から数学を考えさせていく必要があると思った。

③これから

現在の数学教育では何に重点を置いて指導するべきかについてや，学年によって指導すべき内容の配列など，現在の数学教育について学んでいこうと思う。そこから教育実践や数学教材の多くを知り，数学の歴史を学んでいき，数学の面白さ，大切さを教えることができる教師になりたい。余りに大きな目標かもしれないが一つ一つ学習していこうと思う。

４．レポートの記述から読み取れること

ここに取り上げたものは僅か７人のものであり，また，レポートは受講者各々が各自の経験から綴ったものであり表現は様々ではあるが，33 名全員のものから，大方次のことが読み取れた。

受講者のレポート記述の「①これまで」からは，この授業を受けるまでの受講者の数学観は，数学は既に出来上がった不変不動のものであり，それを習得するのが数学の学習であるといった「固定的数学観」，「固定的数学学習観」であったことがわかる。さらに，それが情意的学力の低下にもつながる，そういう悪循環がわが国の学校数学で生じていた，あるいは今も生じていることが読み取れる。

「②この授業を受けて」からは，数学は，先人達が自分の文化の中で，問題を自分の問題として捉え，試行錯誤を繰り返しつくり上げ，今も，各文化の中で，つくられ発展しているものである，という「文化的数学観」「文化的数学学習観」への意識変容がなされていることを読み取ることができる。

「③これから」では，上で述べた文化的数学観への変容を受けて，文化としての数学を学んでいきたいという抱負と教師になったときの情意的学力を向上させようという抱負とが書かれている。このことは，レポート記述の随所に「不思議さ」「楽しさ（面白さ）」「美しさ」という言葉を見ることができることからも裏付けられよう。

５．文化的数学観への変容に関する考察

前節までにみてきたように，受講者には程度の違いこそあれ全員が, この授業を通して,「固定的数学観」，「固定的数学学習観」から「文化的数学観」，「文化的数学学習観」へという意識変容を見事に遂げていた。これ程までの成果は当初予想していなかったことである。というのも，受講者には「固定的数学観」「固定的数学学習観」の時期が十数年はあった，そして，この授業は僅か４コマのものに過ぎなかったからである。このような成果が得られた背景にはどのような要因があったのかについて次に考えていきたい。

まず，受講者についてであるが，殆どが教師を志望している学生・院生である。この受講者の教育に対する意識の基盤があったことは，短期間での意識変容を可能にした一つの要因である。このことは，この実践を学校数学へ適用することを考える場合に念頭に置いておくべきことであろう。

次に,授業について振り返ってみよう。「２．授業の概要」で述べたように，この授業の主な活動は，数学史にあるトピックを取り上げて行う演習であった。数学史のトピックを単発的な教材として扱った学習だけであれば，これまで学校数学の至る所でなされてきたことかもしれない。今回行った授業がそれらと相違するのは，授業者（筆者）に，数学史にあるトピックの選定と配列において，次のような明確な意図があった点である。「１．はじめに」で述べたような，世界の数学発達のダイナミズム，その各断層からのものとしてトピックを選定し，それを，その数学史全体の流れの中で，さらに現在の学校数学との関係

から考えさせようとしたのである。例えば，１回目の授業の初めで，今私達が何気なく使っている10進位取り記数法のよさについて，漢数字やローマ数字による表記や計算と比較しながら，見直させたこともある。また，古代エジプトの単位分数の話題では，分数表があったという事実や単位分数の和に直すことを提示しただけではなく，なぜ単位分数の和に直したのかという文化的背景にまで迫らせた。単位分数の和という考えは，多くの労働者へパンなどの食料を分配する際に非常に効力を発する考えであり，ピラミッド建設等に多くの労働力を必要とした古代エジプトにおいてこそ生まれた考えではないか，という所まで考え及ぶことができた。

さらに，授業者に目を向けよう。これらの活動を促した授業者（筆者）は，次のような数学観を持っている。

(1) 数学は文明を支える集団の「考え方」の結晶作用の結果であって，その「考え方」の基盤に組み込まれ，さらにまた新たな「考え方」が醸成される。この循環が成立するとき，数学は文明の数だけ誕生することになる。

(2) 数学の発達の仕方には複数の系列がある。「考え方」を規定する文脈という特殊と，「考え方」が脱文脈に向かおうとする汎化との相克の下で，数学は分裂し，時に共存し，あるいは混じり合いながら展開してきた。

(3) 現在も各文化の中で，考え方のレベルで数学はつくられ発展している。

アーネスト『数学教育学の哲学』は，教師の数学観の重要性を次のように指摘している。教師の数学観とその指導法との間には一貫性が観察される。だから，数学に対する教師の見方，信念，好みがその教育実践に強く影響するのである。アーネストの言うように，今回の授業実践の成果にも，授業者の数学観が大きく深く関わっていた，とは言えないであろうか。授業者のこの文化的数学観があってこそ，受講者の文化的数学観への意識変容を可能にしたものと考えることができよう。

６．おわりに

今回，教育系大学の授業において，学生に文化的数学観への変容という大きな成果をみることができた。このような実践がわが国の学校数学全体を通して実現できたら，学習者の数学観はどれほど豊かなものになるであろう。大学のこの授業はもちろん，他の授業においても，文化的数学観への変容を図る取り組みを続けていきたい。変容を遂げた学生達が子ども達を教える立場になったとき，子ども達の数学に対する思いや心に描く像はより豊かなものになるに違いない。今後の課題は，今回のような文化的数学観への変容を図る実践を，わが国の学校数学全体にも反映させていくことである。これから，そのための方策を探求し，実践をさらに深めていきたい。

［引用・参考文献］

Ernest,P. (1991), ”The Philosophy of mathematics education”, The Falmer Press.

イ・ヤ・デップマン著，藤川誠訳(1985)，『算数の文化史』，現代工学社.

大矢真一(1964)，『比較数学史（事項別）』，富士短期大学出版部

片野善一郎(1964)，『問題形式による数学史』，富士短期大学出版部.

伊達文治(1993)，『アルキメデスの数学－静力学的な考え方による求積法－』，森北出版.

伊達文治(2008)，「数学教育における文化的価値に関する研究－高校数学の基盤をなす代数表現とその文化性－」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第14巻，pp. 51-58.

中村幸四郎(1978)，『ユークリッド－原論の背景－』，玉川大学出版部.

吉田稔他編(1989)，『話題源数学』，東京法令出版.

吉田光由(1623)著，佐藤健一(2006)訳，『塵劫記』（初版本），研成社.