上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.51-62.

「図形と方程式」領域における生徒の困難性
-記号表現の視点から-

石塚　達也

上越教育大学大学院修士課程１年

1　はじめに
1.1　「図形と方程式」という領域

高等学校の数学Ⅱにおける「図形と方程式」の領域では, これまで数学Aや中学校数学などで幾何学的に考えてきた図形を座標平面上に表す。それにより, 直線図形や曲線図形の性質を代数を用いて扱えるようにするのである。

我が国の数学教育の研究においては, 代数, 関数, 幾何など個々の領域に対する研究は比較的多いが, それらが融合された「図形と方程式」領域に関する先行研究は必ずしも多くない。「図形と方程式」についての研究は, ソフトウェアを用いた授業 (友田, 2005; 山名, 2009) や平面幾何との関連性をより多くもてるようにする授業の提案や実践 (熊倉, 2005) など, 少し見られるが, この領域において生徒がもつ困難性を詳細に分析したものは少ない。

「図形と方程式」領域は複合領域である。学校数学では, 生徒がこの領域に至るまで, 代数学と幾何学はそれぞれ独立した領域であった。そのため, 座標平面上で図形を捉えることは, 生徒にすれば, 幾何学と代数学を同時に考えることになり, ここでは少なくとも2種類の知識が同時に必要になる。そして, 生徒は幾何学と代数学それぞれの既習知識から必要となるものを上手く抽出し, 組み合わせ, 適用しなければならないのである。

こうしたことから, 筆者は複数の領域が融合するからこそ生じる困難性が存在し, 「図形と方程式」領域に特化した研究が必要であると考えた。そこで本稿では, 「図形と方程式」という複合領域において, 生徒が複数の領域を同時に扱う際に生じる認知的な困難性とその根源を探る。

1.2　如何に生徒の認知側面を分析するか

本研究では生徒の認知活動を分析する手段として, 記号表現に注目する。特にDuvalによるレジスターの概念を分析ツールとして採用し, その機能から生徒の困難性を探る。記号表現に焦点を当てた理由は, 我々は記号表現を通してのみ, 数学的対象を扱うことができ, 記号表現が異なる認知活動を導くと考えるからである。例えば, 円というものは, 次のように様々な記号で表現でき, それぞれが可能にする認知活動や, 焦点を当てる数学的性質は非常に異なる。

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=r^2\}$
(b) $|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|=r$
(c) 曲率 $\frac{1}{r}$
(d) 「円」という言葉
(e) コンパス等で紙面上に表現される円 (図1)
(f) 座標平面上での円 (図2)

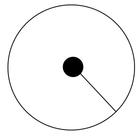
図 1: 作図された円

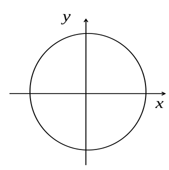

図 2: 座標平面上での円

(e)は, 視覚的に円を捉えることができ, 補助線を加える, 長さを比べるなどの操作を可

能にする。(a) では視覚的に円を捉えることはできないが, 代数計算により, ほかの図形との関係を導きだすことなどができる。さらに, (d) における言語表現による円は, 通貨としての円など様々な円と関連付けたりできるであろう。

このように, 我々の認知活動は, 記号表現に大きく依存している。そのため, 生徒が用いた記号表現とその機能の仕方を分析することにより, 生徒の認知活動と, その困難性を探ることができると考えるのである。

ところで, 記号表現というと, 我が国の数学教育学研究では中原 (1995) に言及されることが多く, その枠組みは, しばしば他の研究にも利用されている (並木, 2009; 廣野, 2009 など)。中原は, ブルーナーやリースの表現体系の研究から数学教育における独自の表現体系を構築しており, その表現体系の中で, 「記号表現」を生徒の最終的な到達地点として位置付けている。本研究の関心も記号表現にあるが, 数学教育における表現に関心のある中原と異なり, 生徒の数学的な思考や認知活動を分析する手段として記号表現に焦点を当てる。そのため, 記号表現そのものの機能の仕方が重要となり, それを十分に考慮した分析枠組みが必要となる。

2　分析枠組み

前節で述べたように本研究では, 生徒の認知活動を分析する枠組みとして, Duval の「記号表現のレジスター (register of semiotic representation)」[1]を採用する。レジスターとは, 数学における異なる記号体系を意味し, 特に次の 3 つの機能をすべて備えているものである。

$R1$ 与えられた記号が何らかの対象を表現し, 同じ体系において別の対象の記号とは区別する。

$R2$ 体系内においてひとつの表現から別の表現に変換する。つまり, 別の表現を作り出す。

$R3$ ある記号体系の記号表現を別の記号体系の記号表現へ 変換する。

小数の記号体系, 分数の記号体系, 代数の記号体系など数学で通常扱われる記号の体系はたいていレジスターとなる。「図形と方程式」領域では, 「代数記号体系」「日本語の記号体系」「図形の記号体系」「座標を用いる記号体系」が主に用いられ, 本稿では, それぞれ「代数レジスター」「日本語レジスター」「図形レジスター」「座標レジスター」と呼ぶ。なお, 本研究では, 初等幾何学 (数学 A) における図と解析幾何学 (数学 II) における図 (グラフ) をそれぞれ区別している。前者は図形レジスターに属する記号とし, 後者は座標レジスターに属する記号とする。

また, 本稿では Duval にならい, $R2$ の機能を「処理 (treatment)」(Duval, 2006, p.111), $R3$ の機能を「転換 (conversion) 」(Duval, 2006, p.112) と呼ぶ。「図形と方程式」領域についての本研究では, それぞれの処理 ($R2$) と転換 ($R3$) の機能が鍵となるため, 例をあげて少し詳しく説明する。

2.1　処理 (Treatment)

「図形と方程式」領域では, 次のような操作がしばしば見られる。

(t_1) 連立方程式 $(y = 2x, y = -x + 1)$ を 1 次方程式 $(2x = -x + 1)$ にする (図 3)

(t_2) 与えられた 2 直線の一方に平行な線を加える (図 4)

これらはそれぞれ, あるレジスターにおいて処理を行なっていると解釈できる。(t_1) の連立方程式 $y = 2x, y = -x + 1$ と一次方程式 $2x = -x + 1$ は, それぞれ, 共通の代数レジスターの中に存在する記号であり, 区別されるものである。(t_1) の操作は, 代数レジスターに固有なある規則により, $y = 2x, y = -x + 1$ という記号から, 新たに $2x = -x + 1$ という記号を生成している操作と考える。そこで用いられたレジスターの規則は等式の推移律など,

[1] これは Duval (1995) で定義されている (宮川, 2009 からの再引用)。本稿では単に「レジスター」と呼ぶ。

通常, 数学における何かしらの規則に対応する。なお, $2x=-x+1$ は, 代数レジスターにおける処理をさらに施すことによって, $x=\frac{1}{3}$ に変換されうる。

(t_2) は, ある交わる 2 直線を表現している記号に対して, 1 本の直線 (平行線) を加えるといった一般的な操作である。ここでは, 図 4 の左側の記号から右側のやや複雑な記号を, あるひとつのレジスター内 (図形レジスター) で生成する処理と解釈できる。こうした処理においても, 通常, 背景には数学的な規則がある。例えば, ユークリッド平面上において, ある直線に対して平行線を引くことである[2]。

これらのように, 同じ記号体系 (レジスター) の中である記号から別のある記号に変換したり, 生成する操作が処理であり, 本研究では生徒のこの処理の操作を通して, 認知活動や困難性を探るのである。

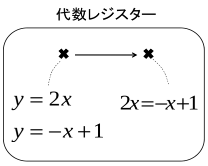

図 3: 代数処理

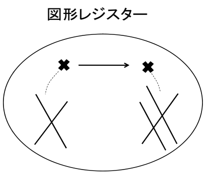

図 4: 図の処理

2.2 Conversion (転換・転換)

一方, 「図形と方程式」領域では転換も頻繁に見られる。例えば, 次のような直線の方程式を座標平面上で表す操作である。

(c_1) 図 5

(c_2) 図 6

(c_1) は, 非常に一般的な操作だが, 代数レジスターの記号 ($y=\frac{1}{3}x-1$) から, 座標レジスターの記号 (xy 平面における直線) が生成されており, 転換と解釈できる。この代数レジスターから座標レジスターへの変換には転換の規則が存在し, それは処理の場合と同様, 数学における規則とも対応している。例えば, 解析幾何学における直線は代数方程式を用いて表現されることである。

[2]『ユークリッド原論』命題 31

一方, 転換においては, レジスターの非常に細かな要素 (記号) によって, その転換の可能性が左右される。例えば (c_2) は, (c_1) と類似しており, 一見同じような変換と考えられる。しかし, 図 6 の座標レジスターでは, x, y 切片を読み取ることができ, 座標レジスターから代数レジスターへの転換も容易である。すなわち, これは相互に転換が可能なものである。ただし, レジスター間の転換は, 常に相互に可能ではなく, 与えられた記号に大きく左右される。

このように, ある記号体系の記号から別の記号体系の記号に変換する操作を転換と呼び, 本稿では, 生徒の認知活動に直結した操作と捉える。

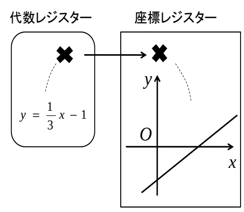

図 5: 代数レジスターから座標的ジスターへの転換

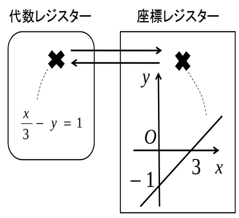

図 6: 相互に転換が可能な場合

3 調査の概要

本研究の目的は, 「図形と方程式」領域における生徒の困難性を明らかにすることである。記号表現というものが, 認知活動に大きく影響を与えていると考え, それを手がかりに困難性を探る。今回は, 困難性の実態を知り, 今後の研究の展望を得るため, 「図形と方程式」領域の既習者に対して調査を実施した。

3.1 調査対象とその方法

調査は, 数学 II が既習の公立高校 3 年生 11 名を被験者として, 平成 21 年 8 月 (夏期補習期間中) に実施した。本研究は個人単位の認知活動に焦点を当てるため, 個人解決による 20 分間の小テストによりデータを収集した。調査では, 2 題を出題し, A4 用紙 1 枚につき 1 題とした。また, 問題に取り組む際には, 2 題のうちいずれの問題から解答してもよいとし

た。ただし, 調査の際は, 解決過程や思考過程を極力表出させるため, 消しゴムの使用を禁止し, 可能な限りボールペンによる解答を依頼した。

3.2　調査問題とその選定

問題の選定については, 調査を依頼した高等学校の数学教諭に相談し, 全ての生徒が容易に解答できる問題や全く手がつけられないといった問題を除き, 生徒の実態にあった以下の 2 題を選択した。

問題 1 3 直線

$$x + 2y = 5 \quad (1)$$

$$x - y = -1 \quad (2)$$

$$ax + y = 0 \quad (3)$$

が三角形を作らないような a の値を求めよ.

問題 2 座標平面上の 3 点 $P(12, 0)$, $Q(15, 9)$, $R(8, 8)$ を通る円を C とする.

(1) 2 点 P, Q を通る直線の方程式を求めよ. また, 線分 PQ の垂直 2 等分線の方程式を求めよ.

(2) 円 C の中心の座標と半径を求めよ.

(3) 直線 $y = ax$ が円 C と 2 点で交わるときの a の値の範囲を求めよ.

問題 1 は, 『大学への数学 II』(研文書院. p.39) から抜粋した。同書は, 問題のレベルを 3 段階に分類しており, 本調査で用いた問題は, その第 2 段階に位置するものである。

問題 2 は, 1998 年のセンター追試験で出題された問題を今回の調査の形式にあわせて変更したものである。具体的には, マークシート形式の問題を記述形式にした。

これらの問題を解決する際に被験者は, この領域における様々な既習知識を必要とする。問題 1 は, 直線の交点を求めることや, 2 直線の平行条件に関するものである。問題 2 では, 直線や円の方程式を求めることや, 2 直線の垂直条件, 円と直線の交点に関するものである。このように様々な数学知識が用いられていることから, これらの調査問題は, 「図形と方程式」領域における認知活動を分析したいという本研究の目的に合致していると考えた。

4　予想される解答の分析

本節では, 調査で用いる問題から予想される解決過程を導き出し, それらを分析枠組み (レジスターの処理と転換) を用いて特徴づけ, その性質や相互関係を明らかにする。さらに本研究では, 解決過程を構造図として整理する。この分析は調査で得られる解答を理論枠組みの観点からより深く理解するための準備である。

以下では, 問題 1 と問題 2 (1) における分析結果を簡単に述べる。ただし, 問題 2 (2) と (3) は, 調査時間の都合で, 解答した生徒が少なかったことから, 本稿では扱わない。特に (3) については, 解答者が 1 名であった。

まず構造図の読み方を述べておく。図 7 と図 8 は, それぞれ問題 1 と問題 2 (1) の解決過程を表した構造図である。解決過程は全て上から下に向かって展開され, 上に位置する記号に処理や転換を施すことにより表出する可能性のある記号をその下に置く。例えば, 方程式 $a + 2 = 0$ に代数処理を行った場合, その下に $a = -2$ が位置する (図 7 における A2 から A3 の過程)。また, 各々の記号が属するレジスターを枠で示した。二重の枠は「日本語レジスター」, 角が丸い四角の枠は「代数レジスター」, 四角の枠は「座標レジスター」, 楕円の枠は「図形レジスター」をそれぞれ表している。そして, 記号をつなぐ線分は記号間の変換を示し, 同じ種類の枠 (同じレジスター) が結ばれている場合は「処理」を意味し, 異なる種類の枠が結ばれている場合は「転換」を意味する。

4.1　問題 1 の構造図

問題 1 に対して数学的に可能な解答と可能なレジスターの処理と転換を考えることにより, 図 7 のような構造図が得られた。構造図は複雑だが, ここでは要点となる代表的な 3 つの解決過程を取り上げ, 簡単に解説する。

(1) 代数処理のみで $a = -2$ を導く過程

(2) 座標レジスターの記号 H2 を使った解決に至る過程

(3) 座標レジスターの記号 F2 を使い, 解決に至らない過程

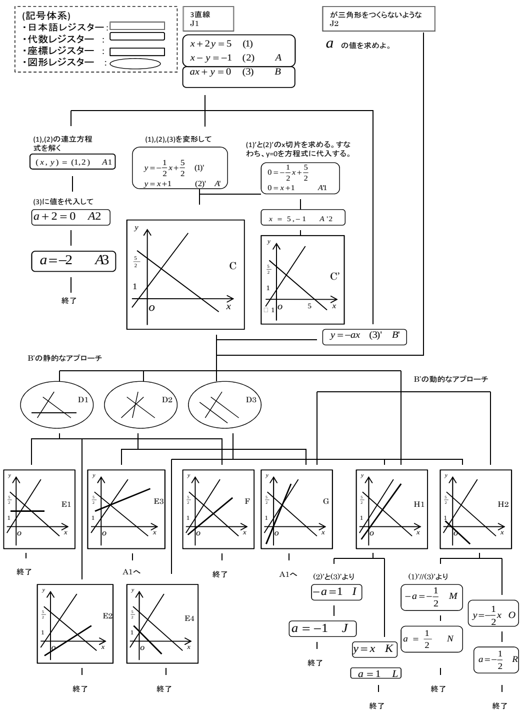

図 7: 問題 1 の分析

(1) は, 連立方程式を解く代数処理により A3 ($a=-2$) を得る過程である[3] 。この過程では, 他のレジスター (座標や図形など) に全く変換されず, 代数レジスター内における記号の変換のみで 3 つある正しい解答のうち, その 1 つを得ている。

(2) は, 片方の直線に $y=-ax$ が, 平行になる場合の座標レジスターの記号 H2 を用いて, 正しい解答の 1 つである代数レジスターの記号 N ($a=\frac{1}{2}$) を得る過程である。H2 に至るには, 通常, A と B にそれぞれ代数処理を施し A′ と B′ を得る必要がある。この A′ は, もとの A に比べ, 傾きと y 切片を一目で認識できるため, 座標レジスターの記号 C に変換されやすい。よって代数レジスターの記号 A′ が座標レジスターの記号 C ($y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ と $y=x-1$ の 2 直線を座標平面上に描いた記号) に転換される。座標レジスターの記号 H2 は座標レジスターの記号 C と代数レジスターの記号 B′, 日本語レジスターの記号 J2, 図形レジスターの記号 D3 から処理と転換が同時に起こることにより得られるものである。この C に新たに直線 B′ ($y=-ax$) を加える操作では, まず直線の位置関係によって D1, D2, D3 の 3 つの可能性がある。そして, 平行になる場合 D3 であれば, もとになる直線や, 新たな直線の性質に応じて, さらに複数の可能性がある。そのうちの一つが H2 (2 直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ と $y=-ax$ が平行になる場合) である。また, H2 の生成には, 4 つのレジスターからの処理と転換が同時に行われており, それゆえ非常に複雑な変換である。4 つのうち, いずれか 1 つからの変換を欠いても H2 は生成されない。例えば, D3 を用いず D2 を用いれば, H2 と異なる記号が生成される。このような複雑な構造は, 認知活動に大きく影響を与えるであろう。さて, H2 を得たのちは, 座標レジスターの記号 H2, 代数レジスターの記号 A′ ($y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$) と B′ ($y=-ax$) から処理と転換を施し, 代数レジスターの記号 M ($-a=-\frac{1}{2}$), そして N ($a=\frac{1}{2}$) に至る。

(3) は, 座標レジスターの記号 F を使って, 解答を得ずに終了する過程である。座標レジスターの記号 C を得るまでの過程は, (2) の過程と同様であるため省略し, 座標レジスターの記号 F を得る変換について述べる。F は, 座標レジスターの記号 C, 代数レジスターの記号 B′, 図形レジスターの記号 D1 に処理と転換を同時に施すことにより得られる。しかしながら, $y=-ax$ が原点を通る直線に変換されるも, 既にある 2 直線と三角形を作ってしまい, 解答を終了するか, もしくは別の解決方法へ移行する。

以上, 問題 1 の構造図を簡単にだが示した。用いるレジスターによってその解決過程が左右されることがわかるであろう。また本稿では, $y=-ax$ を原点に固定し, 直線を回転させる解決過程を動的アプローチとしており, 構

[3] 代数レジスターにおける処理を簡単に「代数処理」と呼ぶ。

造図中に組み込んでいる (図 7 の右下)。しかし, 紙媒体のデータのみでは, 動的アプローチが用いられたかを同定することが困難であるため, 今回の分析では扱わない。

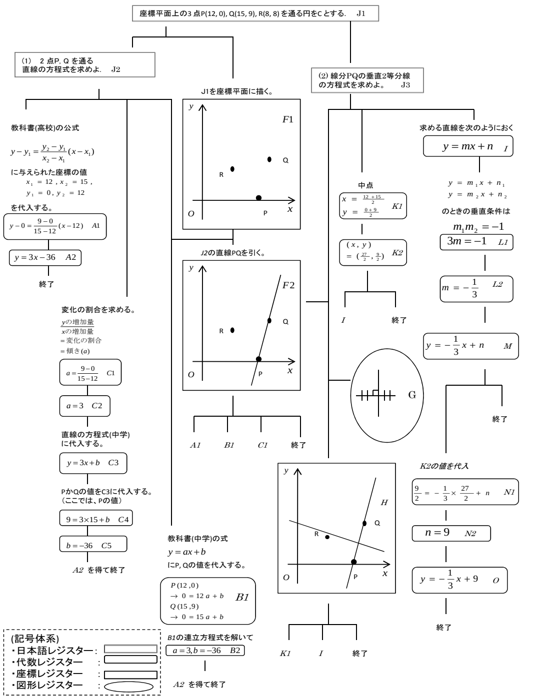

図 8: 問題 2 (1) の分析

4.2 問題 2 (1) の構造図

問題 2 (1) の構造図 (図 8) は問題 1 と比べ, シンプルである。その中でも, やや複雑である問題の後半部分における「代数レジスターの記号 M と K2 を使った解決過程」(中点の座標と直線 PQ の直線の方程式を用いる過程) を解説しよう。ただし, この過程では, 問題の前半 (2 点 P, Q を通る直線の方程式を求める) に解答を得ているものとする。また, 問題の前半は, 図 8 で言えば, 中央の座標レジスターの記号 F1 と F2 を境界にし, 左側に示した。右側は問題の後半 (線分 PQ の垂直 2 等分線の方程式を求める) である。

後半の過程は, 大きく分けて, 1) 座標レジスターの記号 H を生成する過程, 2) PQ の中点を求める過程, 3) 垂直 2 等分線の方程式を求める過程の 3 つからなる。若干, 前後するかもしれないが, 多くの場合, この順序で解決に至るであろう。実際, 垂直 2 等分線のグラフ (H) を描かず, 中点の座標 (K2) を求めずに, 垂直 2 等分線の方程式を求めるとは考えにくい。

第 1 の過程で得られる H は F2 のグラフに垂直 2 等分線を加えたものである。この記号 H を得るには, 日本語レジスターの記号 J3 (線分 PQ の垂直 2 等分線) と F2 からの転換を経る。この過程には, 図形レジスターの記号 G を図 8 のように挿入した。その理由は, 一般に J3 (垂直 2 等分線) から転換され, 得られやすいレジスターが, 図形レジスターの記号であるからである。また, ここで, H は解答に直結しないため, 通常, 第 2 もしくは, 第 3 の過程へ移行することになる。

第 2 の過程は中点の代数レジスターの記号 K2 $(\frac{27}{2}, \frac{9}{2})$ に至るものである。与えられた J1 (P, Q の座標) と J3 を転換して, 代数レジスターの記号 K1 $(\frac{12+15}{2}, \frac{0+9}{2})$ に, さらに代数処理を施すことによって K2 が, 得られる。これは, 比較的単純な過程である。

垂直 2 等分線の方程式を求める第 3 の過程では, まず傾き L2 ($m = -\frac{1}{3}$) を求め, 切片 $n = 9$ を求める。L2 を求めるためには, 代数レジスターにおいて, I ($y = mx + n$) と問題の前半で得られた記号 A2 ($y = 3x - 36$) のそれぞれの傾き (m と 3) を, 2 直線の垂直条件にもとづき, 処理する。得られた L1 ($3m = -1$) は, さらに L2 に変換される。また, 切片 n の値を求めることも, 代数レジスターで処理される。I と L2 から M ($y = -\frac{1}{3}x + n$) が生成され, 第 2 の過程で得られた K2 とあわさることにより, N1 ($\frac{9}{2} = -\frac{1}{3} \times \frac{27}{2} + n$) に変換される。N1 にさらに処理を加えることにより, O ($y = -\frac{1}{3}x + 9$) が得られる。

問題 1 と比較して, 問題 2 (1) の解決過程は代数処理が主で, レジスター間の転換が少ない。そのため, 大きな困難性は, 一見発生しないようにも思える。

5　データ (解答) の分析

本節では, 4 節で示した構造図を用いて, 調査で実際に得られた生徒の解答を分析し, 個々の生徒の困難性を考察する。ただし, 紙面の都合上 3 例のみをとりあげる。分析では, 生徒の解決過程が構造図において, いかなる位置づけになるかを示す。なお, 本稿では, 生徒の解答用紙に書かれた解答をデータとして分析する。

5.1　問題 1 におけるデータの分析

問題 1 における生徒 α と生徒 β の解決過程を分析しよう。

5.1.1　生徒 α の与えた解答

生徒 α は図 9 に示したように 3 つある解答のうち, $a = -2$ のみを与えた。その解決過程は, まず, (1), (2), (3) 式を $y = ax + b$ の形へ変形させ, 2 直線 $(1)'$, $(2)'$ 式のグラフを座標平面上に描く。その後, 与えられたグラフからわかるように, $(3)'$ の式を座標平面上に何本も描き, 三角形にならない場合の直線を探っている。ここでは $y = -ax$ を, 主に原点を通らない直線に変換している。そして, 複数の直線の中で, $(1)'$ と $(2)'$ の交点を通り, 三角形を作らない 1 本の直線が, グラフ上に太く描かれており, その場合の a の値 -2 を, 交点の座標の連立方程式を用いて求めている。

生徒 α の解答を前節の構造図 (図 7) に当てはめると, 図 11 の太線と解釈できる。レジスターの処理と転換の視点からすれば, 生徒 α は, まず A と B にそれぞれ代数処理を施し, A′ と B′ を得る。そして, A′ は, さらに連立方程式を解くという代数処理を施し, A1 に変換される。なお, 交点を求める変換は E3 を得たのちに, 行われたとも考えられる。代数レジスターの記号 A′ は, 座標レジスターの記号 C にも転換される。そして, やや複雑であるが, C と代数レジスターの記号 B′, 図形レジスターの記号 D1 または D2, 日本語レジスターの記号 J2 から処理と転換が同時に起こることにより, 座標レジスターの記号 E1, E2, E3, F がそれぞれ独立に生成される。E1, E2, F は三角形作ってしまうため, その後何にも変換されず, 解決過程が終了する。一方, 三角形を作らない E3 からは, A1 と B もしくは B′ に代数処理を施し, A3 ($a = -2$) を得ている。

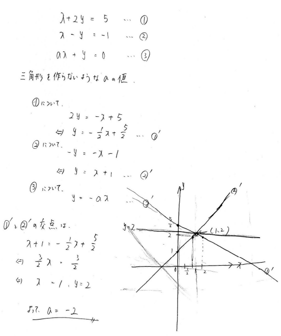

図 9: 生徒 α の解答

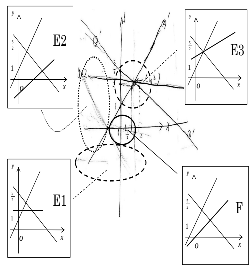

図 10: 生徒 α の E1-3, F の同定について

E1, E2, E3, F を生成した変換を少し詳しく考察しよう。これらの記号は, 生徒 α の与えたグラフを詳しく見ることで同定できる (図 10)。E3 については, 直線 $y = -ax$ (B′) の傾き $-a$ が正と負に変換される違いはあるが, 2 直線の交点を通るように転換されている。図 9・10 では, 見にくいが, F と E2 ついても同様のことが言える。E1 については, 図 9・10 にあるようにグラフの下の部分に x 軸にほぼ水平な直線を確認できる。これらの変換で, 生徒 α は, $y = -ax$ をいくつもの直線に変換できることを認めている。さらに, 主に負の傾きの直線を描いていることから, 代数レジスターの記号 B′ ($y = -ax$) からも変換がなされていると判断できる。しかしながら, $y = -ax$ が $y = x + 1$ と $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ のいずれかと平行になる場合を認めず, $a = -2$ 以外の解答に至る 2 種類の記号 H1, H2 を生成できなかった。その要因の 1 つは, 生徒 α が, $y = -ax$ という代数レジスターの記号よりも, むしろ図形レジスターにおいて, 三角形を作らない直線を探す認知活動を行っていたことにあると考える。なぜならば, 生徒 α は, $y = -ax$ を原点を通る直線に変換していないことから, こ

の $y=-ax$ という代数レジスターの記号の影響が少なかったと判断できるからである。したがって, C, B$'$ などから, 座標レジスターの記号への複合的な変換が困難性を生じさせているのである。

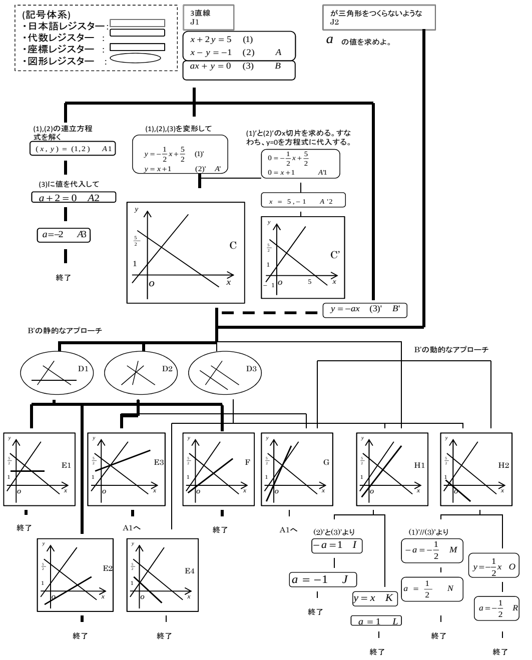

図 11: 生徒 α の解決過程

さらに, 原点を通らなければ, いずれかの 2 直線と平行に直線を引いたとしても, その解が無限に存在し, 不定である。学校数学では問題の答えが殆ど 1 つに定まり, 複数の場合でも答えは高々2, 3 個である。つまり, 三角形を作らず, かつ答えが 1 つに定まるため ($a=-2$) を解答としたとも考えられる。

5.1.2　生徒 β の与えた解答

生徒 β は図 12 に示したように, 3 つある解答のうち, $a=\frac{1}{2}$ のみを与えた。生徒 β は, 生徒 α と同様の過程を経て, (1), (2) のグラフを座標平面上に描いている。そして, 「(1), (2), (3) が三角形を作らないとき」と明記したうえで, (3) の 2 種類の直線を座標平面上に描いている。ここから三角形を作らない場合を探っていることがわかる。さらに, 図 12 からわかるように, 生徒 β は $y=-ax$ を負の傾きを持つ直線にのみ変換している。そして 2 本の直線のうち, (1) と (3) が平行となる場合を採用し, その場合の a の値 $\frac{1}{2}$ を $-a=-\frac{1}{2}$ より求めている。

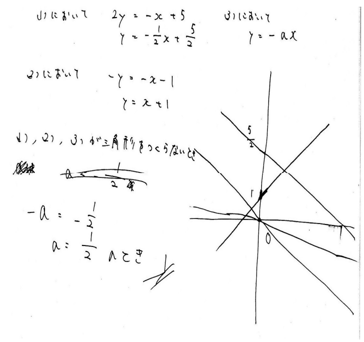
図 12: 生徒 β の解答

生徒 β の解答を, 構造図に当てはめると, 図 13 の太線と解釈できる。生徒 β は生徒 α 同様, A と B に代数処理を施し, A$'$ と B$'$ を得て, 代数レジスターの記号 A$'$ はさらに座標レジスターの記号 C となる。C と, 代数レジスターの記号 B$'$, 図形レジスターの記号 D1 または D3, 日本語レジスターの記号 J2 から処理と転換が同時に起こることにより, 座標レジスターの記号 F と H2 をそれぞれ独立に得ている。H2 が解答 $a=\frac{1}{2}$ に直結することから, おそらく F の後, H2 を生成していると考えられる。F は三角形を作ってしまうため, その後何にも変換されない。一方, 三角形を作らない H2 からは, 座標レジスターの記号 H2 と代数レジスターの記号 A$'$ ($y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$) と B$'$ ($y=-ax$) から処理と転換が同時に起こり, 代数レジスターの記号 M ($-a=-\frac{1}{2}$) が生成されていると解釈できる。M には, さらに代数処理を施し, N ($a=\frac{1}{2}$) を得る。

構造図の視点から解決過程を見ると, 生徒 β の抱える困難性が見えてくる。生徒 β は, この問題に対して, 2 種類の解決過程を与えた。座標レジスターの記号 F と H2 を得る際に用いられる $y=-ax$ の転換に注目すると, いずれの直線も「傾きが負の直線」に変換されている。この変換において, 生徒 β は, 代数レジスターの影響を強く受けている。実際, 傾きが負の直線を与えていることから, $y=-ax$ の傾

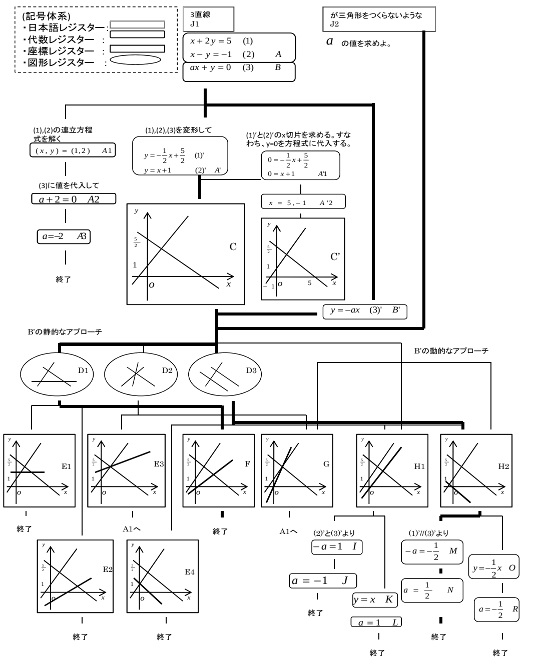

図 13: 生徒 β の解決過程

き $-a$ より,「この直線は常に傾きが負になる」と認識し, さらに, 生徒 α と異なり, 全て原点を通る直線を与えていることから, $y=-ax$ の記号をより忠実に反映している。つまり, 代数レジスターの記号からの影響を強く受けている。なお, 座標レジスターの記号 G と H1 を用いて解決する場合, $y=-ax$ は傾きが正の直線に転換することが求められる。しかし, 代数レジスターのマイナスの記号に強く影響を受けた生徒 β が生成しうる座標レジスターの記号の中に G と H1 は存在せず, $a=-2$ と $a=-1$ を解答として与えるに至らなかったと考えられる。

5.2 問題 2(1) におけるデータの分析

次に, 問題 2(1) における生徒 γ の解決過程を分析しよう。

5.2.1 生徒 γ の与えた解答

生徒 γ は図 14 にある解答を与えた。問題の前半 (直線の方程式) に対しては解答 $y=3x-36$ を与え, 後半 (垂直 2 等分線の方程式) に対しては解答 $y=-\frac{1}{3}x+9$ を与えずに終了している。生徒 γ は 3 点 P(12, 0), Q(15, 9), R(8, 8) を座標平面上に描き, それら 3 点を通る円と直線 PQ を描いている。そして, $y=ax+b$ に P と Q の値を代入し, 連立方程式 $0=12a+b, 9=15a+b$ を解くことにより直線 PQ の方程式を求めている。

問題の後半に対しては, 問題の前半に描いたグラフの $x=12, 15$ の間に $\frac{3}{2}$ を書き入れ, 点 Q から y 軸に平行と見られる直線を引き, その長さ 9 を与えている。さらに,「2 直線の垂直条件」[4]を用いて, 求める直線をまず $y=-\frac{1}{3}x+b$ とおく。そして, PQ の中点の座標を求める過程では, 線分 PQ の長さ $(3\sqrt{10})$ を求め, その半分の長さ $(\frac{3\sqrt{10}}{2})$ により中点を与えようとした。

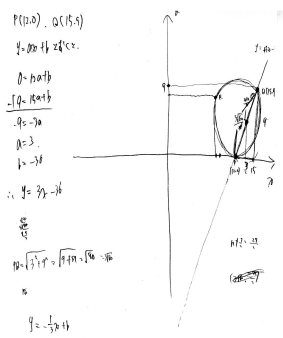

図 14: 生徒 γ の解答

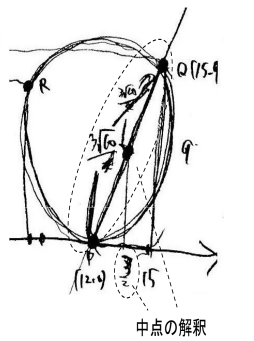

図 15: 生徒 γ の K1 の同定について

生徒 γ の解答を, 構造図に当てはめると, 図 16 の太線になると解釈できる。生徒 γ は, 日本語レジスターの記号 J1 (座標平面上の 3 点 $P(12,0), Q(15,9), R(8,8)$) に転換を行い, 座標レジスターの記号 F1 を得ている。さらに F1 と, 日本語レジスターの記号 J2 (直線) から処理と転換を同時に行い, 座標レジスターの記号 F2 を得ている。一方, 日本語レジスターの記号 J1 $(P(12,0), Q(15,9))$ と J2 (直線の方程式) は, 代数レジスターの記号 B1 (連立方程式 $0=12a+b$, $9=15a+b$) に転換され, B1 はさらに代数処理によって B2 ($a=-3$, $b=-36$) となる。そして,

[4] 2 直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ が垂直になる条件は $m_1m_2=-1$ である。

$y = ax + b$ と B2 から同時に代数処理をすることによって A3 ($y = 3x - 36$) を得ているのである。

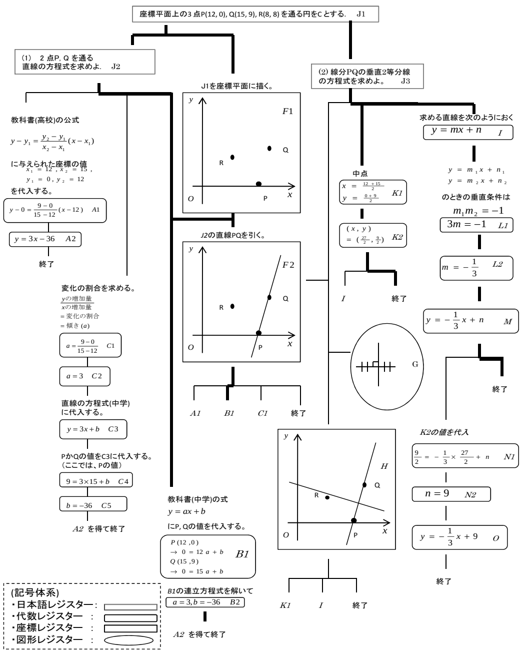

図 16: 生徒 γ の解決過程

問題の後半は, 日本語レジスターの記号 J3 (垂直 2 等分線の方程式) に転換を行い, 代数レジスターの記号 I ($y = mx + n$) を得ている。それから, 2 直線の垂直条件を用いて, 問題の前半で得た代数レジスターの記号 A2 ($y = 3x-36$) と I に代数処理を施し, L1 ($3m = -1$) を生成する。L1 はさらに代数処理により, L2 ($m = -\frac{1}{3}$) に変換されている。そして, I と L2 に代数処理によって M ($y = -\frac{1}{3}x+n$) に至る。一方, 日本語レジスターの記号 J1 (P(12, 0), Q(15, 9)) と J3 (2 等分) に処理と転換が同時になされることにより, 代数レジスターの記号 K1′ ($PQ = 3\sqrt{10}$) が生成されている。K1′ はさらに代数処理によって K2′ ($\frac{PQ}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$) に至る。しかし, M ($y = -\frac{1}{3}x + n$) と K2′ からは, $y = -\frac{1}{3}x + 9$ を与えることはできず, 解決過程を終了した。なお, ここで, K1′, K2′ は構造図 (図 8) のどこにも位置づけられないが, K1, K2 の中点に相当するものとして, K1′, K2′ とした。

ここで興味深いことは, 生徒 γ は, 中点を座標ではなく, 線分の長さを用いて求めようとしている点である。実際, 図 15 では, PQ を斜辺とする直角三角形において, 底辺の長さ $\frac{3}{2}$ を与え, 斜辺 $3\sqrt{10}$ と線分 PQ の中点までの長さ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ を中点に相当する記号として与えている。分析枠組みの言葉で換言すれば, 生徒 γ は座標レジスターから導かれる規則を用いて中点を求めているのではなく, 図形レジスターから導かれる規則を用いて中点を求めているのである。したがって, 生徒 γ は, 座標レジスターから転換される代数レジスターの処理規則により解答を与えなければならかったにもかかわらず, 図形レジスターに大きく依存して, 解答を与えようとしたのである。

6 考察:「図形と方程式」領域における困難性

本稿では, 記号表現のレジスターの視点から, 図形と方程式領域における生徒の解決過程を分析した。レジスターを分析することは, 生徒の数学的な活動や思考を認知的な側面から分析することであり, 本研究では, 図形と方程式領域における学習の困難性を示す手がかりとした。また, 紙面の都合上, 3 人の生徒 α, β, γ の解答のみを分析した。分析結果からわかるように, 3 人の生徒の思考過程は大きく異なり, それぞれが抱える困難性も異なるようである。そして, 調査対象であった生徒 11 人の解答では, それぞれ様々な処理や転換に困難性が生じていた。つまり, 解答が重複することはあっても, それぞれの解決過程における困難性が生じる所は, 非常に多岐に及ぶ。そうしたなかで, 前節で分析した結果から注目すべき困難性についてその根源を論じてみたい。

6.1 複合的な転換による困難性

代数レジスターが,「図形と方程式」領域において, 図形の性質を扱うなどの操作的な役割を果たしていることは言うまでもない。そして, この領域では代数と座標の相互の変換

が中心的である。しかし, 分析で見たように, 転換は, 単一的ではなく, 複合的である。複数のレジスターからある一つのレジスターへの転換は, 適切な要素をそれぞれ抜き出さなければならないため, 単一的な転換に比べ, 複雑になる。

問題 1 において, 座標レジスターの記号 E1, E2, E3, E4, F, G, H1, H2 は, 複数のレジスターから処理と転換が同時に起こり表出した記号であった。問題 1 を解決に導くためには図形レジスターからアイデアを得ずに, 代数レジスターのみからアイデアを得ることはできない。そして, その際, それぞれのレジスターをどの程度利用すべきかは, 容易でなく, 適切なバランスが必要となる。実際, 生徒 α と生徒 β の解決過程は異なり, 特に記号 G, H1, H2 を表出に至る過程において, 2 人の生徒は各々に異なるバランスで, 異なるレジスターに影響をうけ, 認知活動を行ったと考えられる。5.1.1 節に示したように生徒 α は, $y = -ax$ を原点を通らない直線に変換する過程において, 図形レジスターに大きく影響をうけていた。一方で, 生徒 β は $y = -ax$ の代数レジスターの記号に大きく影響をうけていた。問題 1 を解決に導くためには, 図と代数のそれぞれのレジスターから状況に応じて, 適切に変換が行われなければならない。2 人の生徒は, そのバランスを欠いたため問題 1 の解決に至らなかったと。これは「図形と方程式」領域特有の難しさであろう。

6.2　異なるレジスターが導く処理

5.2.1 節の問題 2 における生徒 γ の解答では,「中点」に関する認識が解決過程に影響を与えていたと考えた。「中点」を表現する記号は, 図形レジスターと座標レジスターにそれぞれ存在し, レジスター間に対応関係が存在する。しかし, 図形レジスターと座標レジスターから導かれる処理は, 大きく異なるのである。図形レジスターでの中点は, 長さを測って半分にすることや, コンパス等で垂直二等分線を作図することなどの処理に導く。そして, そこで鍵となる数学的対象は線分の「長さ」である。一方, 座標レジスターの中点は,「長さ」は潜んではいるが, 点の値を代数レジスターの記号で捉えなおし, 「長さ」を考えず, 全て代数レジスターで処理を行うことに導く。したがって, 重視される数学的対象, そして導かれる処理が異なるため, 中点の座標を得るに至っていない。生徒 γ は, 図形レジスターで重視される線分の「長さ」を座標レジスターから導かれる $\left(\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}\right)$ により解答を与えるしかなかったのである。

このように「図形と方程式」領域では, 図形レジスターと座標レジスターそれぞれにおいて, 数学的対象のレベルで (例えば, 中点) 対応関係があったとしても, それぞれの記号から導かれる処理が大きく異なる。そのため, 常に適切なレジスターにおいて, 数学的対象を捉える必要がある。これも「図形と方程式」領域に固有な性質であり, 生徒の認知活動にしばしばネガティブな影響を与えるものと考えられる。

しかしながら, 「図形と方程式」の領域では, 必ずしも常に座標レジスターが優先されるわけではない。問題 1 における座標レジスターにおいて, 解答に直結する記号 G, H1, H2 を表出させるためには, 図形レジスターで考えることも必要であった。したがって, 6.1 節で述べたことに通じるが, ここでも適切なバランスで, 状況に応じてレジスターを使い分けなければならないのである。

7　おわりに

本稿の目的は, レジスター分析により, 「図形と方程式」領域における, 生徒の困難性の根源を探ることであった。その結果, 第 6 節では,「図形と方程式」領域において, 生徒が, 図形レジスター, 代数レジスター, 座標レジスターなど異なるレジスターを使い分けなけれ

ばならないこと, そしてそこに困難性が潜んでいることを示した。

今回, 実施した調査は被験者が紙と鉛筆を用いて解答する形式であり, 図形レジスターと座標レジスターには静的なものであった。一方,「図形と方程式」領域では, ソフトウェアを用いた実践がしばしば提案されている (GRAPES, GeoGebra など)。その多くが動的なものであり, この場合は, また別のレジスターが存在するように思える。さらに, それらを用いた授業実践は本稿で見てきた困難性を回避, もしくは克服してくれるようにも思える。今後はそうした環境における学習者の認知活動をも分析対象とする必要があるであろう。

謝辞

本稿を作成するにあたり, 新潟県立直江津高等学校数学科教諭の奥田優先生をはじめとする同校の先生方には, 大変貴重な時間を提供していただきました。ここに謝意を表します。

引用・参考文献

[1] Duval R. (1995). *Semiosis et pensee humaine*. Bern: Peter Lang.

[2] Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

[3] 熊倉啓之 (2005).『学ぶ意義を実感させる図形と方程式の指導に関する研究ー中学と高校の接続を重視してー』第 38 回数学教育論文発表会論文集. pp. 361-366.

[4] 篠原宗弘 (2008).「高等学校における構成的アプローチに基づく授業実践とその考察 - 表現様式の相互関連に着目させて - 」第 41 回数学教育論文発表会論文集. pp. 69-74.

[5] 友田勝久, 堀部和経 (2005).『パソコンらくらく図形と方程式-関数グラフソフト「GRAPES」で図形の性質を簡単マスター-』. 講談社.

[6] 中原忠男 (1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社.

[7] 中村幸四郎他訳・解説 (1971/1996)『ユークリッド原論』共立出版.

[8] 並木大典 (2009).「学校数学における数学的モデリングの導入に関する一考察」第 42 回数学教育論文発表会論文集. pp. 151-156.

[9] 廣野尚敏 (2009).「高校数学におけるテクノロジーの利用-数式処理機能と動的幾何機能を融合させた指導の可能性-」第 42 回数学教育論文発表会論文集. pp. 637-642.

[10] 藤田宏他 (2004).『大学への数学 II』研文書院.

[11] 宮川健 (2009).「なぜ三角比は暗記中心になるのか〜教科書における記号表現の視点からの回答〜」. 未刊行論文.

[12] 山名一就 (2008)「高校数学における数式処理システムの効果的な利用について」第 41 回数学教育論文発表会論文集. pp.625-630.

[13] 大学入試センター試験 (1998), 大学入試センター.

[14] GRAPES http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/ tomodak/grapes/

[15] GeoGebra http://www.geogebra.org/cms/