上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.63-76.

中学生の証明の学習過程としての argumentation を分析するための基礎的研究

岩坂　美鈴
上越教育大学大学院修士課程１年

1. はじめに

証明の学習において生徒がつまずく箇所や要因はさまざまである。「証明の手順が分かっていない」，「証明の根拠となることがらを忘れてしまった」，「証明することが日常生活と結びつきにくいことから，証明の必要性を感じることができない」など多くの要因があると考えられる。

筆者は，中学校２年時で初めて演繹的な証明に出会ったとき，それまで感じることがなかった違和感を抱いた。証明は，文章を書くことで問題を解決することができるので，これは本当に数学なのだろうかと不思議に思った記憶が強く残っている。

証明の学習では，小学校で既に確認済みのことや自分が明らかだろうと思っていることを，数学的言語・記号を用いて証明しなければならない。この作業に対して，筆者と同様に疑問や違和感を持つ生徒もいるであろう。目標となる証明すべきことがらにむかって，仮定や条件を順序立てて記述していかなければならないことには，生徒にとって意欲や根気が必要であり，証明に取り掛かる際に面倒だと感じることもあるだろう。生徒がもつ証明学習に対する印象は，理数離れや数学に対する苦手意識にも大きく影響しているのではないか。

証明の学習に対する生徒の意識を変えるためには，証明をするということはどのようなことなのかという根本的な問題点に立ち返り研究を行い，知見を得ることが必要である。まずは授業などの小集団での活動を通して証明をする中学生を対象とした研究に取り掛かることとした。

本稿の目的は，小集団における中学生による証明の構成がどのように行われているかを調べるための理論的枠組みを得ることである。

本稿では，第一に，証明学習に関する調査や先行研究を概観する。第二に，証明の学習における相互作用に関する先行研究を考察する。第三に，argumentation に関わる先行研究から，証明と argumentation との関係について考察する。最後に，Pedemonte(2007)の理論的視点から中学生の証明学習を想定する。

2. 我が国の証明学習に関する実態

文部科学省は平成 19 年度から全国学力・学習状況調査を実施している。過去３回の証明に関する調査結果概要(国立教育政策研究所, 2007,2008,2009)を見てみると，証明を記述する問題の正答率が低く，無回答率が高いということ，さらに証明の意義を理解しているかどうかをみる問題の正答率が低く，実測や操作など帰納的な方法に

よる説明で証明したことになるととらえている生徒や，証明を正しく書くことはできても，証明の意義を理解していない生徒がいるということがわかっている。

3. 我が国の証明学習に関する先行研究

証明の学習指導や証明の意義に関する研究は，今までに数多くなされてきている。国宗(1987)は，図形の論証についての指導内容が生徒に理解されにくい原因として，図形概念と論証の意義に対しての発達が遅滞し，その後の授業の要求についていけないという理由を挙げている。意義理解に注目すると，論証の意義理解についての発達段階を促進させるためには，三角形の内角の和についての指導を通して，実験・実測による方法の特徴を理解させ，平行線の性質などをもとに演繹的に証明することの意味を理解させることが，有効な方法の一つであると述べている。

宮崎(1997)は，中学校第２学年用の教科書に準じる証明指導によって，ことがらに関して，どのような真理観が育成され得るかという課題を解決するにあたり，ことがらの真理観を，正しさの意味に関する考え方と規準に関する考え方と定めている。正しさの意味とは，子どもの知り得る場合に対することがらの適用可能性（ことがらそれ自体に関するもの），既に学んだことがらの正しさに依るものであり，これから学ぶことがらの前提として利用され得ること（既に学んだことがらやこれから学ぶことがらとの関係に関するもの）の二つであり，正しさの規準とは，ことがらが，子どもの知り得る事実と対応する，予め定められた区別にしたがって前提が用いられて，ことがらが演繹されているという二つを挙げ，教科書に準じる証明指導によってこれらの真理観が育成されると述べている。

金山(1997)は，証明の定式化を図ることが証明であるというよりもむしろ，学級の合意を作り上げる過程こそが証明であるということを強調することによって，生徒の証明のとらえ方を広げることをめざした。金山(1997)は，状況設定と教師の介入の二つを考慮して，中学校３年生の円周角の定理の証明指導において教授実験を行っている。教授実験の分析から，学級の合意作りを実現するためには，教材の指導者としての立場が学級の合意作りを阻害する可能性があるということ，そして教師は一切の妥当性の判断を与えない姿勢に徹する必要があることを知っておかなければならないことを知見として得ている。学級の合意作りを実現するための手だてとして，班ごとに主張をまとめ，学級に提案する状況設定を行い，学級に出された主張を他の生徒に自分の言葉で説明し直すことを求める教師の介入を行うという二点を挙げている。

灰野(2006)は，帰納的な説明の段階にある生徒を対象に教授実験を行い，生徒が何を根拠に理由づけを行っているかを考察，分析している。実験の当初，生徒は帰納的な正当化により命題の正しさを主張していている。しかし，実測に誤差が生じたことから，帰納的な正当化では正確な主張をすることができないとわかり，直近の学習内容と関連づけて説明する演繹的な正当化を認めるようになった。このことは，証明の基礎的な意味に，他者へ説明するという社会的な位置づけをすることが可能であることを示している(灰野，2006)。

4. 証明学習における相互作用に関する先行研究

証明の学習では，議論や討論などの活動を授業に取り入れることが望まれている。これは，相互作用が生徒の証明の学習に大きな効果をもたらすからであると多くの指摘から分かっている。国宗(1987)は，さま

ざまな個性と能力を持った生徒たちが集団の中でともに発達しあう，集団の教育力を重視し，授業研究に討論を取り入れて授業を行っている。討論の活動は，子どもの立場に立った発達観での学習指導を目指すこと，そして，このような指導を行うことにより，生徒の思考過程を明確にしたり，他の人々の考え方と自分の考え方とを関連づけたり，学習意欲を高めたりするという効果があることを期待し，演繹的に証明することの意味を理解させる際に討論を取り入れた指導を行うことの有用性について述べている(国宗，1987)。

関口(1994)は，集団における人々の間の相互作用や，その置かれている状況などを研究するのに適している民族誌的方法を用いて，論証指導において分析の対象とされてこなかった授業における社会的過程に焦点を当てている。関口(1994)は，研究に参加した数学教師の授業データを質的に分析している。その結果，論証指導が生徒たちを数学の新しいタイプのディスコースの世界に適応させていく過程となっていることを指摘している。

灰野(2006)は，教授実験において，討論という他者との意見交換の場を設定している。授業に討論を位置づけた理由を，討論することで生徒たちは主張の妥当性を判断するようになり，主体的に説明を構成することが期待できるからであると述べている。

松井(2009)は，議論のある活動は教科書にも記述された演繹的な証明には至らないかもしれないとしても必要になると述べて，証明活動を生徒どうしの活動と捉え，授業を構成している。理論枠組みとして，帰納的に説明するという価値を伴った対象を経験的な対象，演繹的に説明するという価値を伴った対象を構造的な対象，そして，その二つの対象の間に，関係的な対象を設定している。生徒どうしの積極的な議論により正当化していく形式で教授実験を行った結果，次の三つの知見を得ている。一つ目は，生徒は最初，経験的な対象に支えられて証明を行っているということ。二つ目は，生徒は，一般性を示さなければいけないという価値によって，関係的な対象を生じさせているということ。三つ目は，関係的な対象は経験的な対象と構造的な対象とを繋ぐ役割を果たすという点で重要であるということ。松井(2009)は，相互パターンを次の図１のように表している。

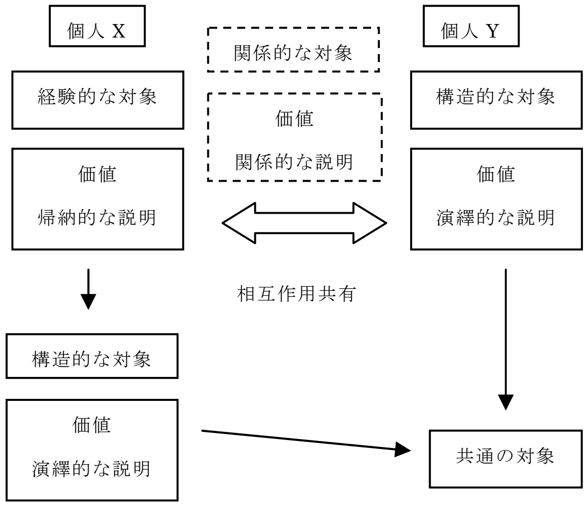


図１ 相互作用パターン

これらの知見から，関係的な対象が一般性を示し経験的な対象と構造的な対象とを繋ぐことで，生徒の間で議論のある証明活動が成されると示唆している(松井，2009)。

生徒どうしが証明を口頭で説明することで，記述には表れない生徒の考えが表出する(松井，2009)。このことは，生徒に証明の必要性を感じさせるために有効であると筆者は考えている。それは，証明の記述ができなくとも，生徒の間での相互作用において相手に説明したり，納得させたりすることを通して，完全な証明に近づくことができれば，証明学習に対する我々のねらいはおよそ達成できると考えるからである。

次節からは，松井(2009)による，議論を

しながら証明する活動を発展させて，近年注目されているargumentationと証明の関連について考察していく。なお，argumentation を訳すには適切な日本語が見つからないため，argumentation という表記のまま論を進めていくことにする。

5．argumentation に関する先行研究

Pedemonte(2007)は， Toulmin(1993)のモデルを参考に，argumentation と証明との間の構造上の連続性や構造上の相違を分析している。

Pedemonte(2007)は，数学教育において，argumentation が授業で最もよく行われる活動の一つであるとしても、共有した定義が存在しないことから，argumentation と証明を比較する前に，まず argumentation の際に何が得られるのかを知ることが重要であるとし，二つの問題点を考えている。

1．数学での argumentation とは何か？
2．数学的証明とその関係は何か？

この問題点を解決するにあたり，argumentation の二つの特性に注目している。それは機能上の特性と構造上の特性である。

機能上の特性は，数学における argumentation と証明との間の共通の側面を説明することができるという，この機能上の特性について，以下の四つの特徴を挙げている(Pedemonte，2007)。

1．数学における argumentation と証明は，合理的な正当化としてよく考えられることができる。
2．数学における argumentation と証明は，ここで確信させることである。
3．数学における argumentation と証明は，大衆に対して提示されている。
4．数学における argumentation と証明は‘場’に属する。

構造上の特性は，証明が数学において特有の argumentation としてよく考えることができるということから，それらを比較することができるというものである。

Pedemonte(2007)は，argumentation と証明の構造を比較，分析するために，Toulmin(1993)のモデルを使用している。argument を構成する Toulmin(1993)の基礎的なモデルは，次の三つの要素から成る。その三つとは，C(主張)：話す人の陳述，D(データ)：主張 C を正しいとしているデータ，W(根拠)：データを主張と結びつける推測のルールである。原則やルールによって表されることができる根拠は，データと主張との間をつなぐ役目をする(図２)。

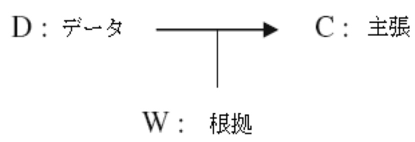


図２　Toulmin(1993)の基礎的なモデル

このモデルによると，証明としての argumentation は三つの要素からなる構造であり，それぞれの argument を証明段階と比較することで実用的な価値をもつようになる(Pedemonte，2007)。

推測には，演繹，仮設的推論，帰納がある。仮設的推論の段階は Toulmin(1993)のモデルでは図３のように表すことができる。

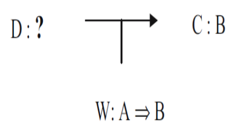


図３　仮設的推論の段階

Pedemonte(2007)は，三角形の面積を比較させる問題を生徒に提示し，仮設的推論の例を挙げている。

帰納について見ると，一般化は帰納的な argumentation において重要な役割を果たす。Harel(2001)は帰納を異なる二つの一般化で区別している。それは結果のパターン一般化と過程のパターン一般化である。その二つを Toulmin(1993)のモデルで表すと図４のようになる(Pedemonte，2007)。

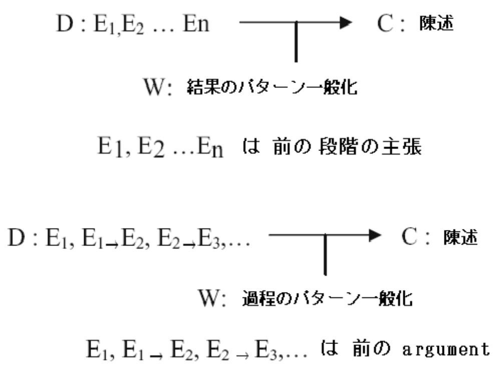


図４　帰納における二つの一般化

結果のパターン一般化は，前に得られた主張を基に，それらから規則を見つけて，きっとそうなるであろうと一般性のある場合の予想を立てながら一般化することである。このとき，得られた結果である主張のみを基にして一般化していく。それに対して，過程のパターン一般化は，データと根拠が主張を正当化し，その主張が次の場合のデータとなり，根拠と共に主張を正当化していく。このように，ある場合と次の場合を結びつけて一般化していくことを言う。このとき，結果のパターン一般化のように主張だけを基にするのではなく，全ての過程を基にして一般化していく。Pedemonte(2007)は，教授実験において，n 角形の内角の和を求める問題を提示し，一般化の例を挙げている。これは数学的帰納法に相当する問題である。

Pedemonte(2007)が行った教授実験の分析の視点は，仮設的推論の argumentation について二つと，帰納的な argumentation について関係している二つの計四つである。仮設的推論の argumentation では，(1)argumentation と証明との間の構造上の相違と，(2)argumentation と証明との間の構造上の連続性についてであり，帰納的な argumentation では，(3)結果のパターン一般化を基礎とした帰納と数学的帰納法との間の構造上の相違と，(4)過程のパターン一般化を基礎とした帰納と数学的帰納法との間の構造上の連続性についてである。

Pedemonte(2007)は分析の結果から，以下の知見を得ている。(1)では，argumentation の仮設的推論の構造は，証明において演繹的な構造へと変換される。このとき，生徒は仮設的推論の argumentation から演繹的証明への論争に困ることがないようだということ。(2)では，argumentation と証明との間の構造上の変化は見られない。このとき，argumentation と証明との間の構造上の連続性を観察することができるということ。(3)では，argumentation の間，生徒は過程のパターン一般化よりむしろ結果のパターン一般化により問題を解決しようとする。しかしこの方法では，数学上の帰納的証明を構成することはできない。よって，argumentation と生徒が覆うことができない証明との間の構造上の相違があるということ。(4)では，生徒は数学的帰納法を構成するための要素を全て持っているので，過程のパターン一般化は，生徒が推測を正当化するのに役立つので，特に重要であるということ。

Pedemonte(2007)は，Toulmin(1993)のモデルは生徒の argumentation と証明を分析するのに重要な手段であり，それぞれの argument の構造と証明における同じ段階の構造との間の比較を行っている。この比較は，構造上の連続性と，推測を支えている argumentation と推測の証明との間の構造上の相違を分析する事を可能にさせていると結論づけている。

辻山(2008)は，argumentation とは，主張の真偽を確立するために行われる，非形式的な判断や表現を含む活動であるとし，argumentation の特徴の一つである，変更を伴う説明と正当化，に焦点を当て，証明の構想において argumentation が持ちうる機能について想定上の例とともに考察して

いる。その機能とは，命題の意味についての把握と命題の真を確立する計画についての把握の両者を動的に深める機能である。片方だけではなく，この両者が動的に深まることが，証明の構想において重要であると述べている。

これらの先行研究から，argumentation は，ある主張に合意したり，論駁が起こったり，生徒の間での相互作用による効果が期待できる場であることが分かった。以下，argumentation とは，主張の妥当性を判断し，確信にせまるために行われる言語による活動であると捉える。

6. 分析の視点

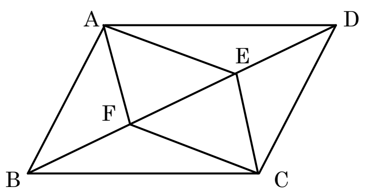
Toulmin(1993)の基礎的モデルを使用した Pedemonte(2007)による枠組みをもとに，生徒による argumentation と生徒が書いた記述との間の構造を比較することで，中学生による証明の特徴を分析していく。Pedemonte(2007)は第 12，13 学年を対象に調査を行い，argumentation と証明の構造を比較していたが，今回中学３年生を対象としてプロトコルを作成していく。

6.1.仮設的推論の argumentation について

問題は，東京書籍の教科書(杉山吉茂ら編，2002)の問題を発展させたものを扱った。ここでは，argumentation の構造と生徒が書いた証明の構造を比較していく。

問題

下の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線 BD 上に∠BAE=∠DCF となるように点 E，F をとる。このとき，四角形 AFCE はどのような図形になるか考えなさい。



6.1.1.仮設的推論の argumentation と証明との構造上の相違の例

（想定プロトコル）

生徒 A：三角形がたくさんあるね。

生徒 B：うん。（図を見て）とりあえず，分かっていることを書き込んでいこう。

生徒 A：そうだね。問題文に書いてあるから，角 BAE と角 DCF は等しい。あとは…。

生徒 B：平行四辺形 ABCD だから，AD と BC，AB と DC は等しい。

生徒 A：対角は等しいから，角 ABC と角 CDA，角 BAD と角 DCB も言えるね。

生徒 A：これ，何か三角形 ABE と三角形 CDF は合同になりそう。

生徒 B：うん。AB と DC は等しいことが分かっているし，角 BAE と角 DCF も等しい。合同を示すには，あともう一つ何か分かればいいからね。

生徒 A：あっ，AD と BC は平行だから，角 ABE と角 CDF も等しくなる！

生徒 B：本当だ。錯角になっている。

生徒 A：合同条件の１辺とその両端の角がそれぞれ等しいを使って，三角形 ABE と三角形 CDF が合同だと言えるね。たしか，合同だったら･･･対応する辺は等しいから，AE と CF が等しいことが分かる。あとは･･･。

生徒 B：角 AEF と角 CFE が錯角で等しいよ。

生徒 A：錯角だったら，AE と CF が平行だと言える！

生徒 B：四角形 AFCE は平行四辺形だ。

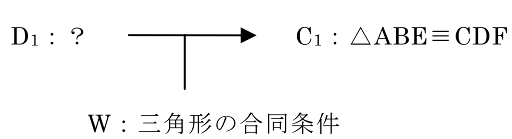


図５ 生徒 A と B による argumentation の構造

（生徒が書いた証明）

△ABE と△CDF を考える。

仮定から，∠BAE=∠DCF

平行四辺形なので，AB=DC

ADとBCは平行だから，錯角より，
∠ABE=∠CDF
よって，△ABEと△CDFは合同
対応する辺，角は等しいので，AE=CF
また，∠AEB=∠CFDなのでAEとCFは平行
よって，１組の対辺が平行でその長さが等しいので，四角形AFCEは平行四辺形になる。

D_1：∠BAE=∠DCF　AB=DC　∠ABE=∠CDF → C_1：△ABE≡△CDF
W：三角形の合同条件

D_2：C_1 → C_{21}：AE=CF　C_{22}：∠AEB=∠CFD
W：合同な図形の性質

D_3：C_{22} → C_3：AE∥CF
W：平行線と角の関係

D_4：C_{21}とC_3 → C_4：四角形AFCEは平行四辺形
W：平行四辺形になるための条件

図６　生徒AとBによる証明の構造

生徒は図５の？を求めるために新たに推測をし，それを正当化するためのデータを探している。ここでは，argumentationの仮設的推論の構造は，証明において演繹的な構造へと変換されている(図５,６参照)。この場合，argumentationと証明との間には構造上の相違があると言うことができる。

6.1.2.仮設的推論のargumentationと証明との間の構造上の連続性の例

（想定プロトコル）
生徒C：四角形AFCEは平行四辺形だ。
生徒D：そうに違いないよ。調べてみよう。
生徒C：うん。平行四辺形なるための条件は何個かあったよね？
生徒D：あったね。んー，辺に注目すると…。もし，AEとFCが等しくてAFとECも等しいならば，平行四辺形だということができる。
生徒C：そうだった。じゃあ，まずはAEとFCについて調べていこう。AEとFCが等しいことを言うためには，三角形AEDと三角形CFBが合同だということを示せばいい。
生徒D：そうだね。今分かっていることは，ADとCBが等しい。あとは･･･。
生徒C:角ADEと角CBFは錯角で等しくなるよ。
生徒D：本当だ。でも合同を言うためには，これだけでは足りないね。
生徒C：あ，角DAEと角BCFは等しいかもしれない。角BADと角DCBは対角で等しい。それに，仮定から，角BAEと角DCFが等しいことが分かっている。
生徒D：それなら，角DAEと角BCFは等しいと言える。
生徒C：うん。これで三角形AEDと三角形CFBが合同だということができる。
（省略）

D_5:？ → C_5:四角形AFCEは平行四辺形
W：平行四辺形になるための条件

？D_6:△AED≡△CFB → C_6:D_5:AE=FC
W：合同な図形の性質

D_7：AD=CB　∠ADE=∠CBF　？ → C_7：D_6：
W：三角形の合同条件

D_8:∠BAE=∠DCF → C_8:∠DAE=∠BCF
W：∠BAD=∠DCB

図７　生徒CとDによるargumentationの構造

（生徒が書いた証明）

四角形AFCEが平行四辺形であることを言うために，AE=FCとAF=ECを示す。

AE＝FCについて見てみる。

△AED≡△CFB

なぜなら，

平行四辺形の対辺より，AD=CB

錯角なので，∠ADE=∠CBF

∠DAE＝∠BAD－∠BAE,

∠BCF＝∠DCB―∠DCF

ここで∠BAD=∠DCB，∠BAE＝∠DCFなので，

∠DAE=∠BCF

（省略）

？D_5：AE=FC AF=EC → C_5：四角形AFCEは平行四辺形

W：平行四辺形になるための条件

D_6：△AED≡△CFB → C_6：D_5：AE=FC

W：合同な図形の性質

D_7：AD=CB ∠ADE=∠CBF ∠DAE=∠BCF → C_7：D_6：

W：三角形の合同条件

図８　生徒CとDによる証明の構造

argumentationと証明との間には構造上の変化はほとんど見られない(図７,８参照)。この例の場合，連続性はあるが，仮設的推論のargumentationは演繹的な証明に向かうことはなく，仮設的推論と同じ構造をもつ証明へ向かったと言うことができる。

6.1.3.仮設的推論による二つの例の違い

視覚的に得られた情報や既習知識により，こうなるであろうと推測を立てて考えていくことは多くの学習において行われている。中でも，証明の学習では，この仮設的推論により問題解決をしていくことが多い。それは，証明をするに当たって，最初の時点では証明をするためのデータや根拠が十分でないため，ある推測を立て，それを正当化するためにデータや根拠を探すことが多いという理由からである。

ここで作成したプロトコルでは，仮設的推論によるargumentationと証明との間の構造上の相違は,仮設的推論のargumentationが演繹的証明へ向かうことを意味している。しかし，構造上に相違がなく，連続性がある場合，証明においても仮設的推論の構造になってしまい，演繹的証明へと変換されることはない。

6.2.帰納的なargumentationについて

問題は，啓林館の教科書(清水静海ら編，2004)の問題を発展させたものを扱った。ここでは，argumentationの構造と生徒が書いた記述による推論の構造を比較していく。

> 問題
> 紙テープがある。この紙テープの両端が重なるように折り合わせていく。これを紙テープを使って観察し，n 回繰り返したときの折り目の数はどのようになるか説明しなさい。

6.2.1.結果のパターン一般化を基礎とした帰納と数学的帰納法との間の構造上の相違の例

（想定プロトコル）

生徒E：１回折ったときの折り目の数は１だ。

生徒F：うん。２回のときは１，２，３。３だね。

生徒E：１，３ってきたから次は５かな？

生徒F：どうだろう。折ってみるね。３回折ると，１，２，…７。

生徒E：あ，違った。７か。んー，どんな規則があるんだ？

生徒F：もう１回折ってみよう。次は…１５だ。

生徒E：折り目の数を見てみると，２，４，８って増えていってるよ。

生徒 F：２掛ける２で４。４掛ける２で８だね。
生徒 E：うん。２倍になってる。
生徒 F：本当だ。そうすると，４は２の２乗。８は･･･２の３乗。あっ，折り目の数は（折ったときに増える数）引く１になっている。
生徒 E：気付かなかった。１回折ったときは２の１乗引く１，２回折ったときは２の２乗引く１，３回折ったときは２の３乗引く１。ということは，n 回折ったときの折り目の数は２の n 乗引く１になるよ！

D_5：C_1，C_2，C_3，C_4 → C_5：n 回折ったときの折り目の数は 2^n-1

W：結果のパターン一般化

C_1：１回折ったときの折り目の数は 2^1-1
C_2：２回折ったときの折り目の数は 2^2-1
C_3：３回折ったときの折り目の数は 2^3-1
C_4：４回折ったときの折り目の数は 2^4-1

図９　生徒 E と F による argumentation の構造

（生徒が書いた記述）

１回折ると折り目の数は	$1=2^1-1$
２回折ると	$3=2^2-1$
３回	$7=2^3-1$
４回	$15=2^4-1$
・・・	
n 回	2^n-1

D_5：C_1，C_2，C_3, C_4 → C_5：n 回折ったときの折り目の数は 2^n-1

W：結果のパターン一般化

C_1：１回折ったときの折り目の数は $1=2^1-1$
C_2：２回折ったときの折り目の数は $3=2^2-1$
C_3：３回折ったときの折り目の数は $7=2^3-1$
C_4：４回折ったときの折り目の数は $15=2^4-1$

図 10　生徒 E と F による記述の推論の構造

argumentation と生徒が書いた記述はほぼ同じ構造であるが，生徒の記述は，数学的帰納法にほど遠いものであり，証明と呼ぶことはできない(図９,10 参照)。よって，argumentation と数学的帰納法との間には構造上の相違があると言うことができる。

6.2.2.素朴な過程のパターン一般化を基礎とした帰納と数学的帰納法との間の構造上の素朴な連続性の例

（想定プロトコル）
生徒 G：じゃあ私が折っていくね。
生徒 H：うん。
生徒 G：（折った回数が）１のときは，折り目の数は１。これは折らなくてもすぐ分かるね。
生徒 H：そうだね。２回折ると･･･３？
生徒 G：１，２，３。３になる。
生徒 H：これも頭の中で考えることができる。次はどうなる？
生徒 G：ちょっと待って。１，２，･･･７だ。
生徒 H：７か。ここらへんから難しくなるね。想像しにくい。
生徒 G：うん。紙がないと無理だね。もう１回折ってみるね。
生徒 H：うん。4 回折ったとき，どうなるだろう？
生徒 G：１，２，３，･･･１５だ。
生徒 H：１５か。
生徒 G：１から３で２増えて，３から７で４増えて，７から１５で８増えてってなってる。これ２の１乗で，２の２乗，２の３乗じゃない？
生徒 H：うん。ってことは，１に２の２乗を足すと３になって，３に２の２乗足すと７。７に２の３乗足すと１５だ。
生徒 G：その方法だとできそうじゃない？
生徒 H：うん！なんかできそう。
生徒 G：n 回折ったときはどうなるかな？
生徒 H：１つ前の折った回数乗を足すと折り目の数になっているから，n 回のときは，n－１回折ったときの折り目の数に２の n－1 乗を足したら出る気がする。
生徒 G：本当だ。そうかも。
生徒 H：あ，でも駄目だ。n－1 回折ったときの折

り目の数が分からない。

生徒 G：あー駄目か。ねえねえ，これさ，２回折ったときの折り目の数は１回折ったときの折り目の数足す２の１乗で，３回折ったときは２回折ったときの数の１足す２の１乗に２の２乗足した数になるよね？

生徒 H：うん，なると思う。

生徒 G：そうしたら，４回のときはそれに２の３乗を足して，１足す２の１乗足す２の２乗足す２の３乗になるんじゃない？

生徒 H：本当だ。そうしたら n－1 回のときも分かるね。

生徒 G：うん。n－1 回のときの折り目の数は１足す２の１乗足す２の２乗ってずっと足してきて･･･何まで足すんだっけ？

生徒 H： ２の n－2 乗だ。じゃあ n 回のときは１から２の n－1 乗まで足してきた数になるね。

D_9：C_6，C_7，C_8 → C_9：n－1 回折ったときの折り目の数と n 回折ったときの折り目の数の差は 2^{n-1}

W：結果のパターン一般化

C_6：１回折ったときの折り目の数と２回折ったときの折り目の数の差は 2^1

C_7：２回折ったときの折り目の数と３回折ったときの折り目の数の差は 2^2

C_8：３回折ったときの折り目の数と４回折ったときの折り目の数の差は 2^3

D_{10}：１回折ったときの折り目の数は１ → C_{10}：２回折ったときの折り目の数は $1+2^1$

W：１回折ったときと２回折ったときの折り目の数の差が 2^1

D_{11}：C_{10}： → C_{11}：３回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2$

W：２回折ったときと３回折ったときの折り目の数の差が 2^2

D_{12}：C_{11}： → C_{12}：４回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3$

W：３回折ったときと４回折ったときの折り目の数の差が 2^3

一般化すると

D_{13}：D_{10}→$C_{10}$$D_{11}$→$C_{11}$ D_{12}→C_{12} → C_{13}：n 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

W：素朴な過程のパターン一般化

図 11　生徒 G と H による argumentation の構造

（生徒が書いた記述）

1　　2　　3　　4　　　n－1　　n

1　　3　　7　　15

$\underbrace{1 \quad 3}_{2}$　$\underbrace{3 \quad 7}_{2^2}$　$\underbrace{7 \quad 15}_{2^3}$　$\underbrace{\quad\quad}_{2^{n-1}}$

１回折ったとき　1

２回折ったとき　$1+2^1$

３回折ったとき　$1+2^1+2^2$

４回折ったとき　$1+2^1+2^2+2^3$

・・・

n－1 回折ったとき　$1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}$

n 回折ったとき　$1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

D_9：C_6，C_7，C_8 → C_9：n－1 回折ったときの折り目の数と n 回折ったときの折り目の数の差は 2^{n-1}

W：結果のパターン一般化

C_6：１回折ったときの折り目の数と２回折ったときの折り目の数の差は 2^1

C_7：２回折ったときの折り目の数と３回折ったときの折り目の数の差は 2^2

C_8：３回折ったときの折り目の数と４回折ったときの折り目の数の差は 2^3

D_{10}：１回折ったときの折り目の数は１ → C_{10}：２回折ったときの折り目の数は $1+2^1$

W：１回折ったときと２回折ったときの折り目の数の差が 2^1

D_{11} : C_{10} : → C_{11} : ３回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2$

W : ２回折ったときと３回折ったときの折り目の数の差が 2^2

D_{12} : C_{11} : → C_{12} : ４回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3$

W : ３回折ったときと４回折ったときの折り目の数の差が 2^3

一般化すると

D_{13} : $D_{10}\rightarrow C_{10}$ $D_{11}\rightarrow C_{11}$ $D_{12}\rightarrow C_{12}$ → C_{13} : n 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

W : 素朴な過程のパターン一般化

図 12　生徒 G と H による記述の推論の構造

過程のパターン一般化には至らないが，ある場合と次の場合が結びついている。この過程のパターン一般化の前段階を，素朴な過程のパターン一般化と呼ぶこととする。このとき，argumentation と記述による推論の構造は,同じ構造になる(図 11,12 参照)。また，生徒が書いた記述は証明になっていないが,n－1 と n を結びつけていることから，数学的帰納法の手がかりが得られている状態と見ることができる。よって，argumentation の構造と数学的帰納法の構造を比較すると，その間には素朴な連続性があると言うことができる。

6.2.3.過程のパターン一般化を基礎とした帰納と数学的帰納法との間の構造上の連続性の例

（想定プロトコル）

生徒 I : １回折ると，折り目は１。２回折ると折り目は３。３回折ると，７か。

生徒 J : ４回折ると…１５だね。

生徒 I : １から３では２，３から７では４，７から１５では８増えてる。

生徒 J : 本当だ。これ２倍になってるね。

生徒 I : うん。そうしたら，２は２の１乗，４は２の２乗，８は２の３乗って表せる。

生徒 J : こうやって表すと分かりやすい。

生徒 I : ってことは，１に２の１乗を足すと２回のときの折り目の数になって，それに２の２乗を足すと３回折ったときの折り目の数になって･･･。

生徒 J : うんうん。

生徒 I : またそれに２の３乗を足すと３回折ったときの折り目の数１５になる。

生徒 J : そうなるかも。

生徒 I : これで n 回のときまで考えていくと･･･。

生徒 J : ２の n 乗まで足していくってことか。

生徒 I : ん？違うと思うよ。２の n－1 乗までになるんじゃない？

生徒 J : ああ，そうか。１つ前になるのか。

生徒 I : うん。１から２の１乗，２の２乗ってきて，２の n－1 乗まで足すと，n 回折ったときの折り目の数がでることになると思う。

生徒 J : なるほど。さっき気づいたんだけど，ここ，１だけ少なくなってる。

生徒 I : えっ，どこのこと？

生徒 J : ２引く１は１で，４引く１は３，８引く１は７って。

生徒 I : 本当だ。気づかなかった。そっちの方が簡単だね。

生徒 J : かもしれない。n 回折ったときは･･･。

生徒 I : 次の n+1 回までに増える数引く１だから，２の n 乗から１引いた数になる？

生徒 J : 多分そうなる。n から n+1 回までに増える折り目の数が２の n 乗だから，これをさっきの２の n 乗引く１って式に足しても n+1 回の場合が出るってことだ。

生徒 I : そうなるかも。計算してみる？

生徒 J : やってみよう。２の n 乗足す１，足す２の n 乗か。

生徒 I : ２の n 乗って２を n 個かけあわすってことだから･･･どうやって計算するんだ？

生徒 J : 式に２の n 乗が２つあるから，２掛ける

２の n 乗ってならないかな？

生徒 I：なる気がする。そしたら，２が１個増えて n+1 個になるから，２の n+1 乗だ。

生徒 J：２の n+1 乗引く１になるね。

D14：1 回折ったときの折り目の数は 1 → C14：2 回折ったときの折り目の数は $1+2^1$

W：1 回折ったときの折り目の数と 2 回折ったときの折り目の差が 2^1

D15：C14： → C15：3 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2$

W：2 回折ったときの折り目の数と 3 回折ったときの折り目の差が 2^2

D16：C15： → C16：4 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3$

W：3 回折ったときの折り目の数と 4 回折ったときの折り目の差が 2^3

一般化すると

D17：D14→C14D15→C15 D16→C16 → C17：n 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3\cdots+2^{n-1}$

W：素朴な過程のパターン一般化

D22：C18，C19，C20，C21 → C22：n 回折ったときの折り目の数は 2^n-1

W：結果のパターン一般化

C18：１回折ったときの折り目の数は 2^1-1

C19：２回折ったときの折り目の数は 2^2-1

C20：３回折ったときの折り目の数は 2^3-1

C21：４回折ったときの折り目の数は 2^4-1

D23：C17 と C22 → C23：n+1 回折ったときの折り目の数は $2^{n+1}-1$

W：素朴な過程のパターン一般化
結果のパターン一般化
‖
過程のパターン一般化

図 13　生徒 I と J による argumentation の構造

（生徒が書いた記述）

折った回数	1	2	3	4	n−1	n	n+1
折り目の数	1	3	7	15		?	
		2^1	2^2	2^3		2^{n-1}	2^n

1 回折ったとき	1	2^1-1
２回折ったとき	$1+2^1$	2^2-1
３回折ったとき	$1+2^1+2^2$	2^3-1
４回折ったとき	$1+2^1+2^2+2^3$	2^4-1
・・・		
n−1 回折ったとき	$1+2^1+2^2+2^3\cdots+2^{n-2}$	
n 回折ったとき	$1+2^1+2^2+2^3\cdots+2^{n-1}$	2^n-1

n+1 回　$2^n-1+2^n=2\times2^n-1=2^{n+1}-1$

D14：1 回折ったときの折り目の数は 1 → C14：2 回折ったときの折り目の数は $1+2^1$

W：1 回折ったときの折り目の数と 2 回折ったときの折り目の差が 2^1

D15：C14： → C15：3 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2$

W：2 回折ったときの折り目の数と 3 回折ったときの折り目の差が 2^2

D16：C15： → C16：4 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3$

W：3 回折ったときの折り目の数と 4 回折ったときの折り目の差が 2^3

一般化すると

D17：D14→C14D15→C15 D16→C16 → C17：n 回折ったときの折り目の数は $1+2^1+2^2+2^3\cdots+2^{n-1}$

W：素朴な過程のパターン一般化

D22：C18，C19，C20，C21 → C22：n 回折ったときの折り目の数は 2^n-1

W：結果のパターン一般化

C18：１回折ったときの折り目の数は 2^1-1

C19：２回折ったときの折り目の数は 2^2-1

C20：３回折ったときの折り目の数は 2^3-1

C21：４回折ったときの折り目の数は 2^4-1

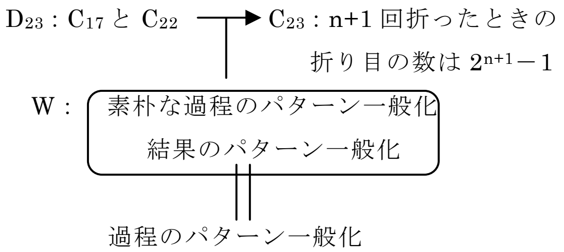


図 14　生徒 I と J による記述の推論の構造

argumentation と生徒が書いた記述は，素朴な過程のパターン一般化によって得られた C_{17} と結果のパターン一般化によって得られた C_{22} から，n と n+1 のときが結びついている。よって，素朴な過程のパターン一般化と結果のパターン一般化は過程のパターン一般化と考えることができる。このとき，argumentation と記述による推論の構造は, 同じ構造になる(図 13,14 参照)。また，生徒が書いた記述は数学的帰納法に近いものとして考えることができるので，argumentation と数学的帰納法との間には構造上の連続性があると言うことができる。

6.2.4.帰納による三つの例の違い

帰納と数学的帰納法との構造上の比較において，結果のパターン一般化と過程のパターン一般化の間に素朴な過程のパターン一般化を設定した。このとき，素朴な過程のパターン一般化，過程のパターン一般化の順に，より数学的帰納法に近いものとなっている。これは，数学的帰納法が未習である中学生でも, 小集団における argumentation を通して，実験や観察から得られたつながりのある一連の過程により，数学的帰納法の完成へと近づくことができることを示唆する。記述に表れなくとも，argumentation により n と n+1 の場合を結びつけることができた発言があった場合，ある意味，数学的帰納法に近いものであると捉えることができる。

7. おわりに

argumentation と証明の構造は，今回挙げた例以外にも多くの場合が考えられる。argumentation において，相手を納得させることや相手の意見を取り入れたり批判したりすることで，生徒が記述する証明に変化が現れるであろう。今後、教授実験により argumentation と証明の構造を比較，分析することで，小集団における子どもの証明の構成がどのように行われているか，そして証明学習における argumentation とは何であるか，証明学習にどのような効果をもたらすのかを調べていきたい。

引用・参考文献

金山光宏．(1997)．生徒の証明のとらえ方の変容を促す証明指導の研究　―学級の合意作りとしての証明をめざして―．上越数学教育研究，12.

国宗進．(1987)．「論証の意義」の理解に関する発達の研究．数学教育学論究，47.

国立教育政策研究所．(2007)．平成 19 年度全国学力･学習状況調査:調査結果概要．文部科学省.

国立教育政策研究所．(2008)．平成 20 年度全国学力･学習状況調査:調査結果概要．文部科学省.

国立教育政策研究所．(2009)．平成 21 年度全国学力･学習状況調査:調査結果概要．文部科学省.

小関熙純ら．(1987)．図形の論証指導．明治図書.

島田茂．(1995)．算数・数学科のオープンエンドアプローチ　―授業改善への新しい提案―．東洋館.

清水静海ら．(1995)．CRECER 中学校数学科教育実践講座 第 6 巻 図形と論証．ニチブン.

清水静海ら．(2004)．わくわく算数 5 上．啓林館.

杉山吉茂ら．(2002)．新しい数学２．東京書籍．

関口靖広．(1994)．論証指導で何が起こっているか：ある授業実践の民族誌的研究．筑波数学教育研究，13．

竹内芳男ら．(1984)．問題から問題へ　―問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善―．東洋館．

辻山洋介．(2008)．学校数学における証明の構想における argumentation の機能に関する一考察　―変更を伴う説明と正当化に焦点を当てて―．筑波数学教育研究，27．

辻山洋介．(2009)．学校数学における証明活動の振り返りの要件―argumentation を視点として―．数学教育論文発表会論文集，42．

Toulmin, S. E. (1993). The use of arguments. *Cambridge University Press.*

灰野仁．(2005)．中学校数学における討論を取り入れた証明指導についての考察．上越数学教育研究，20．

灰野仁．(2006)．中学校数学における証明の正当化に関する研究．上越数学教育研究，21．

Harel，G．(2001)．The development of mathematical induction as a proof scheme : A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zazkis(Eds.), *Learning and teaching Number Theory.Journal of Mathematical Behavior.* New Jersey, Ablex Publishing Corporation.

Pedemonte，B．(2007)．How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*，66(1).

松井守．(2009)．議論のある活動における中学生の証明する過程について．上越数学教育研究，24．

宮崎樹夫．(1997)．学校数学の証明指導における，ことがらの真理観に関する研究―我が国の中学校数学の証明指導によって育成され得るものに焦点をあてて―．筑波数学教育研究，16．

文部科学省．(2008)．中学校学習指導要領．東山書房．

文部科学省．(2008)．中学校学習指導要領解説 数学編．教育出版．