

関数学習において子どもが心的に形成するモデルの発達の様相

金川 純

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

子どもの「関数は嫌い。」，「関数は分からない。」という声を多く聞く。その声に対し，筆者は様々な取り組みをしてきたが，明確に効果があったとは言い難い。

中学校の教科書では，関数の導入である比例と反比例において，浴槽に水を入れる事象や線香を燃やす事象，プールに水を入れる事象を取り上げ，表やグラフによって変化を考えさせている。その後の展開は，表での考察や比例の式の求め方，グラフを描くことが中心となり，事象から離れた学習が続く。

平成21年度に実施された全国学力・学習状況調査結果（国立教育政策研究所，2009）において，領域間正答率を比較すると，数と式の知識を問う問題Aが68.8%，数と式の活用を問うB問題が55.1%，図形の知識を問う問題Aが63.3%，図形の活用を問う問題Bが58.4%，数量関係の知識を問う問題Aが59.5%，数量関係の活用を問う問題Bが45.5%となっており，問題A，問題Bともに数量関係領域における正答率が例年通り他領域と比べて低い。数量関係の問題を設問ごとに分析すると，反比例のグラフから式を求める問題，1次関数の表から式を求める問題の正答率がそれぞれ37.0%，37.8%と低い。特に，事象を数学的に解釈し，問題解決の方法を数学的に説明する問題については正答率が19.9%，無解答率48.5%で低い。表や式，グラフの指導を徹底させているにもかかわらず，結局，関数を考察する技能や表現する能力すら高いものとは言えない。事象を数学的に考察できない子どもが約8割，そして解答用紙に手をつけられない子どもが約半数とい

う結果となっている。

関数に対する学校での取り組みとしては，問題を理解できない子どもたちのために現実事象を意識させるような実験を取り入れたり，子どもたちが理解しやすいようにことばの式などを用いた段階をふまえながら指導したりと様々な工夫がある。しかし，子どもたちの中には単元終了とともに学習内容を忘れてしまったり，新たな問題には取りかかれなかったりするものも多かった。

本研究の目的は，子どもが現実事象を意識し，自らの知識を用いて取り組めるような問題を解決していく中で，子どもの知識の形成過程を明らかにし，関数指導改善の示唆を得ることである。

そこで本研究では，最初，関数の定義と指導の意義を述べ，関数に対する指導観を明確にする。そして，関数を扱った先行研究を考察し，次いで，子どもの知識の形成過程を考察するための理論である，現実的数学教育（Realistic Mathematics Education 略称 RME）理論を視座に置き，Mathematics in Context（略称 MiC）を概観する。最後に，中学校第2学年における関数の授業について，その構想と概要を示すとともに，抽出した2人の子どもたちがどのように関数の知識を形成していったのかについて分析し，考察する。

2. 関数における先行研究

2.1. 関数の定義

関数の定義は考え方や時期により様々で，NCTMの関数の定義を日本数学教育会（1966）では以下のように記述している。

定義域の各要素にそれぞれただ一つの対だけが対応するような関係である。(P.45)

A, B を集合とし, A の各元に B のただ一つの元を対応させる規則が与えられているとする。このときその規則と集合 A とをあわせて関数という。(P.158)

高橋(2003)は現在の関数指導に多大な影響を与えたとして、数学教育改良運動期の数学的な特徴を次のように述べている。

数学改良運動の背景となる数学的な特徴の一つは、微分積分などの解析的な領域が飛躍的に発達していたことである。解析的な領域は工学や他科学へ応用することが可能で、解析的な考えを通して日常場面を数学的に見ることができる。教材化された解析的な考えは当時は函数と呼ばれた関数である。関数教材における表やグラフの使用は数学改良運動期に確立されたものである。

(p.46)

数学教育改良運動よりさらに大きい動きとなった数学教育現代化では、上記日本数学教育会(1966)による定義のように、対応関係に焦点を当てたものとなっている。高橋(2003)は、数学教育現代化における関数の定義と現在の中学校教科書における定義とを比較し、次のように述べている。

数学教育改良期に特徴のあった関数教材も、数学教育現代化においては構造中心の教材となった。(中略)この関数の定義は、

集合 X の要素 x と集合 Y の要素 y とでつくられる順序対 (x, y) を要素とする集合があって x の値を決めると y の値がただ 1 通りに決まる

とき、この順序対の集合を関数という。

である。今日の伴って変わる二変量に力点をおいた定義は教科書では、

ともなうて変わる 2 つの変数 x, y があって、 x の値を決めると、それに対応して y の値がただ

1 つ決まるとき、 y は x の関数である。

である。この定義のもとでは、教材として時間を取り上げた水槽の問題などが目立つ。数学教育現代化で用いられた順序対による定義に基づく関数教材は、対応の規則に力点を置いており、変量には特には着目していない。むしろ数学的構造そのものを取り上げている。(P.52)

関数の定義は、高橋(2003)が述べるように、数学教育改良期に確立された 2 変量に力点を置くものと、数学教育現代化に確立された順序対に力点を置くものの 2 つに大きくは分類される。現在の関数指導は表やグラフの使用により事象を数学的に捉えることを考えれば 2 変量に力点を置いたものと考えることができる。しかし、現代社会においてはより幅広い関数についての知識が必要とされ、どちらの定義も重要と考えることができる。そこで本論では、現在の教科書に一応の立場をおきつつ、現在、ことさらに力点がおかれている連続性から一端離脱し、対応関係にも着目することにより離散量に係る関数教材のよさを取り上げる。これにより、現在の学習指導要領においては数と式の内容とされる場合のある数列や統計学における問題も関数問題として含める。

2.2. 関数指導の意義

様々な形で変容を遂げる現代社会において、我々は受け身ではなく、先を見通して対応する能力が求められる。地球温暖化や人口問題等の身近な事象の変化を分析できるのが関数の考えである。中学校学習指導要領解説(文部科学省, 2008)には、関数指導の意義として次の 2 点が挙げられている。

- ・身の回りの具体的な事象を考察したり理解するためには関数的な見方や考え方を必要とする場面が多いこと。
- ・いろいろな関数についての理解及びそれらの学習を通して養われる関数的な見方や考

え方は、数学のいろいろな分野のこれまでの学習のとらえ直しやこれからの学習において重要な役割を果たすこと。(p.45)

現代社会で必要とされる関数的な見方や考え方を身に付け、それまで学んだ数学の知識を再構成し、今後の学習に生かせるよう関数を指導していく必要がある。

2.3. 関数学習に関する先行研究

国宗(1987)は、子どもが立式に至るまでの理解について、関数関係を式に表現するまでには三段階の手だてがあるということ、子どもが表に限らず、式やグラフを作らざるを得ないような教材や問題を開発、選択し、有効であることを実感できるよう指導していくべきであるとの知見を得た。

磯田ら(1991)は、小学生から高校生まで調査したデータをもとに、小学生は事象の数量の変化・対応、さらには関係の考察を、事象を意識しながら考察できるのに対して、中学生は表式・グラフの三角関係の処理に意識が奪われ事象を意識しなくなることで、中1から対応による関数指導をしているにも関わらず、表の見方では中3から縦の見方が強くなることで、表やグラフの見方、描き方などの変容にはその関数が既習か否かが深く関わっているとの知見を得た。

桐山(1999)は、中学校における関数指導について、表・式・グラフの表現形式中心の指導よりも具体的な事象と関連しての指導を重視すべきである、子どもが事象の中から関数関係をどのように見いだしていくかの過程を考察し、生徒が自ら関数関係を見つけられるような教材の開発・適用が重要であるとの知見を得た。また、現実場面と関わりをもつこと、事象を考察するために、事象から変数を取り出し、それを関係付けていく活動を豊かにすること、の2つが必要であるとの知見を得た。そしてモデルについて、一般的に考えられる子どもがつくり出したもの、表現したもののみならず子ども自身が持っている活動の基盤となる考えもモデル

の1つであるとの知見を得た。

林(2001)は、モデルについて、一般的に考えられる子どもが作り出したもの、表現したもののみならず子ども自身が持っている活動の基盤となる考えもモデルの1つであるとの知見を得た。

高橋(2002)は、関数の式を求めることや表・式・グラフの書き換え中心の指導が関数に抵抗を感じさせる原因とし、表・式・グラフの形式的な表現に至る過程で子どもが用いる絵や図のような表現が重要な意味をもつ、子どもが自ら事象をとらえられる教材の有用性と、答えを求めるだけでなく解決過程で表現した絵や図、教材を使つての説明を重視した指導が大切であるとの知見を得た。

横関(2005)は、関数の学習過程の分析を通して、実験を原動力として数学的モデリング過程を何度も踏む過程において、逆行や往復、飛躍が数多く含まれていることを明らかにした。そして、その過程で数学的結論が積み重ねられていき、関数的な見方や考え方の形成につながっているとの知見を得た。すなわち、子どもの活動では、実験を起点として具体的な事象に基づいた数学的モデリング過程を繰り返すことが非常に効果的であるとの知見を得た。

上田(2009)は、グラフを利用したアプローチでは直感的で視覚的に変化の様子を理解するために、考察の際の強い根拠となり得ること、グラフを利用したアプローチでは学習していく過程において、グラフの見方の大切な見方の一つである動的な見方を初学者に獲得させる機会を与えやすいこと、式への抵抗感の軽減を図る意味で、従来の指導方法と比べて劣るものではないとの知見を得た。

3. RMEとモデルの形成及びMiCについて

3.1. RMEにおける数学観

モデルの発達を考察するにあたり、オランダの Freudenthal, H が開発、創始した現実的数学教育 Realistic Mathematics Education (略称 RME) の理論に立場を置く。RME では、人

間の活動としての数学という思想を根底に置いており、子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し、算数・数学を経験し、知識を構成することを目指している。

RME の数学観について、Gravemeijer,K., Cobb,P.,Bowers,J.&Whitenack,J(2000) は次のように述べている。

経験的に現実的な問題には、毎日の生活環境や架空のシナリオが含まれることが多いが、必ずしもそれが必要だというわけではない。より進んだ子どもたちにとっては、数学自体が発展していく部分が、現実的になりうるのである。
(p.237)

Van den Heuvel-Panhuizen (2003)も同様に述べ、現実世界について次のように述べている。

問題の現実性は実生活とのつながりが重要でないことを意味している。それは、文脈が必ずしも現実の状況に制限されるというわけではないことを意味するだけである。子どもの精神の中で現実的である限り、おとぎ話の想像世界や数学の形式的な世界でさえも、問題のための非常に適当な文脈であり得る。(pp.1-2)

両者ともに、RME では、子どもは自分にとって意味のある日常の問題場面で、数学的な概念と道具を発達させ、応用によって数学を学ぶべきであると論じている。RME は子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し、算数・数学を経験し、知識を構成することを目指しているため、多くの示唆を与えるものである。

3.2. モデルの形成について

Freudenthal(1991)は、数学的思考を特徴付けるものとして Common sense といわれる心的構成物に着目した。この Common sense が自らの経験を通して組織化、有機化され、さらに高次元の Common sense となる。この Common sense が

従来シエマといわれたものであり、後にモデルと呼ばれるのである。

Treffers(1991)は、モデルをインフォーマルで算術に関連した文脈とフォーマルな算術との間を橋渡しするものと考えた。

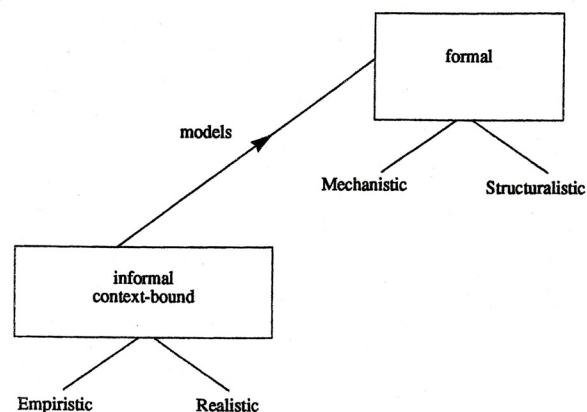


図1 Treffers(1991)による方向性

図1で示したようにモデルは、図1左下のインフォーマルで算術に関連した文脈に近い最初の様相（model-of）から、図1右上のフォーマルで標準化された操作に近い最終的な様相（model-for）、更にその間にある広い領域でも発展し、多面的であると Treffers(1991)は結論づけた。

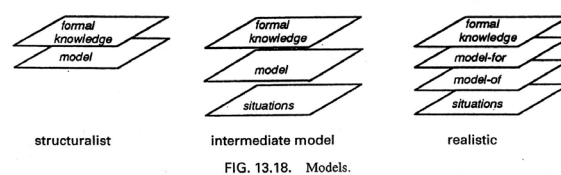


図2 Gravemeijer(2000)の考えるモデルの自己発達

Gravemeijer(2000)は、図2で示したようにこれまで考えられていた心的構成物であるモデルとフォーマルな水準の2つに、子どもたちのインフォーマルな知識など場面に依存した知識を考慮した状況的水準を加えた3つを設けた。さらにモデルには状況的水準に依存した心的構成物 model-of とフォーマルな数学に向かう心的構成物 model-for があり、問題解決の過程

には4つがあることを示した。これにより子どもたちのインフォーマルな知識が考慮され、モデルの自己発達によりフォーマルな水準に至る、数学的な知識と関連が示された。水準は絶対的ではなく、時にはさらに低い水準に戻り得、モデルの自己発達における双方向性がある。

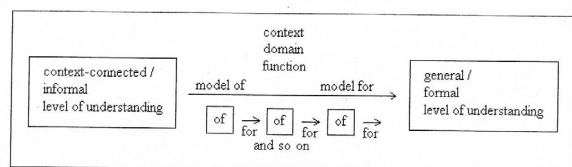


図3 Van den Heuvel-Panhuizen(2003)のモデルの転換

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は、図3で示したように Gravemeijer(2000)のモデルの自己発達をさらに追究し、インフォーマルな解釈に近いモデルの様相である model-of からフォーマルな解釈に近いモデルの様相である model-for への移行の過程途中で、さらに小さな model-of から model-for への局所的な転換が連続的にあることを示した。

図3では、文脈に結びつく水準でインフォーマルな解釈を記号化したあるモデルが、最後にはより一般的なレベルでのフォーマルな解釈のモデルになることを示している。この転換は系列的なものではなく、学習過程において異なる局所的な変更が緊密に連結され、理解の水準が達成される上での連築材を形成している。

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は、MiC の百分率の教授において、子どもの思考過程を分析し、model-of から model-for への移行を示した。

model-of から model-for への移行を一連の連続的かつ局所的なモデルの転換であると示した Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の解釈は、モデルの自己発達と捉える Gravemeijer(2000)とは異なる。しかし、両者とも心的形成物であるモデルに着目して子どもの思考過程を分析する点については共通である。

本研究では、モデルの考察には、Van den

Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みを用い、子どもの問題解決に至る数学の知識の形成過程を分析する。Gravemeijer(2000)の枠組みはモデルの自己発達を分析するのには適しているが、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みは子どものモデルの変容を一部または局所的に分析できるため、子どもの知識の形成過程を分析しやすいと考えたからである。

RME についての先行研究には、三木(2001)、高橋(2003)、橋本(2007)などがある。三木(2001)は、中学校第2学年の連立方程式、高橋(2003)は、小学校第5学年の除法と比の三用法の実験授業において、ともに Gravemeijer(2000)のモデルの自己発達の理論を手がかりとして子どもの思考過程を分析し、子どもにとって model-of から model-for への移行は跳躍があると考えた。橋本(2007)は、中学校第2学年の確率の実験授業において、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の model-of から model-for への移行をモデル自体の機能の変化及び子どもたちによるモデルの見方の変容であるという理論を手がかりとして子どもの思考過程を分析し、複数の状況において形成された model-of が一般化されて新たな状況で活用される model-for に発達していく様相を示した。

3.3. MiC について

MiC は5-8学年のための包括的なミドルスクール数学カリキュラムである。重要な特徴として、MiC を構成する4つの内容である数、代数学、幾何学及び統計学を網の目のように結びつけていること、他の教科の内容と結びつけていること、そして RME に基づいた数学と現実世界での有意味な問題同士を結びつけていることがあげられる。

MiC カリキュラムの目標は道具としての数学を得ることである。MiC では、数学はサインやシンボル、または人々が発展するために使ってきた規則から成り立っており、実生活での問題を解決している我々の経験から生ずると考えている。MiC では、数学は現実から

創られたものであり、現実的かつ有意味な文脈を提供することで、子どもに数学を学習させる。MiC では、数学はアルゴリズムと規則を記憶するものではなく、自らの知識と経験することで数学を創るものであるという考えをもっているため、より子どもの事象の意識と、知識の構成を促すのである。

関数の知識形成に大きく影響する事象に関して、MiC の提供する、現実的かつ有意味な文脈は、その条件を十分にみたすものと期待できる。初めは手操作できる事象から取り扱うこと、答えを求めるだけでなく、どのように答えを出したかについて話し合う機会を設けるなどの MiC カリキュラムの方針は、本研究の目的に合う。

4. 教授実験の分析と考察

4.1. 教授実験の構想

教授実験を、福島県公立中学校 2 年生 11 名を対象に、平成 21 年 3 月 24 日～3 月 31 日にかけて、筆者が授業者となり、1 日 2 時間程度、計 10 時間実施した。毎時間の授業を、授業全体の流れを記録するためのビデオカメラ 2 台、個々の生徒の活動を記録するためのビデオカメラ 3 台によって記録した。また、ビデオカメラとは別に IC レコーダー（1 台）で音声を記録した。

本稿では、発話は少ないが表記が多いという特徴をもつ Sa と Sio の活動を考察する。また、問題解決時に Sa と話し合った級友 Sio, Ma, Mi との発話も取り上げる。なお、Sa, Sio, Ma, Mi はニックネームである。

教材の内容は、第 1～4 時では比例から 1 次関数へ発展する問題、第 5～8 時では 1 次関数の問題、そして第 9～10 時では 2 次関数の問題である。教授実験で扱う教材については、MiC の問題を参考にした。

4.2. 教授実験の概要とその分析

ここでは第 5 時、第 8 時、第 9 時を取り上げる。

4.2.1. 第 5 時の概要とその分析

第 5 時では、梁数と梁を作るのに必要な棒の本数の変化を考察する問いを出題した。

問題Ⅱ 下図(図 4)のような梁がある。この梁に上から 1, 2, 3……というように長さが分かるよう、数を付けた。

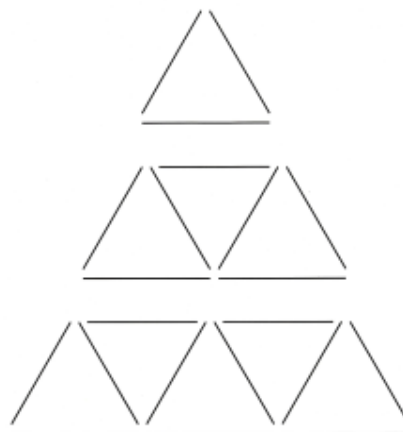


図 4 調査問題Ⅱの図

問題提示に際しては、子どもがより現実場面を意識しやすいよう、建物の構造の写真を用い、実際の校舎に用いられている梁の様子を説明したりした。

問題Ⅱの最初の小問 1 は、「梁の数は、図の何を示しているか、書きなさい」である。

子どもたちは、問題文の読解はできたものの、小問 1 にどのように答えたらよいか分からず、以下の発話に見られるように戸惑っていた。

5020Sa : これ、どういう…って言ってたけどいいのかなあ？

5021Mi : 字で表せねえ…

5136Yoshi : うちさあ、分かったんだけど言葉にどうやってたよっていいか分かんないんだよねえ。

しかし、徐々に文脈から、「△になっている三角形の数」や「台形になっている部分の底辺の数」などの文章表現や、絵図(図 5)

を用いて様々なモデルを形成した。

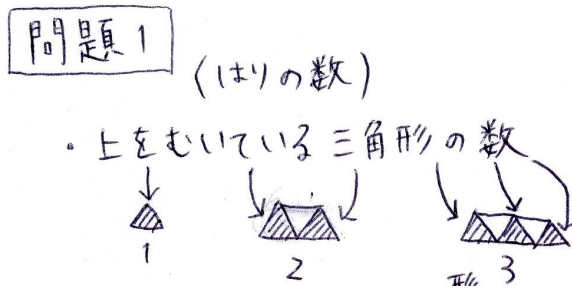


図5 絵図によるモデル

次に、梁の数と棒の本数の2変数の関係を考察する小問2を提示した。黒板上で模型を用い、詳しく説明するとともに、子ども一人ひとりに小さな模型を配り、手操作ができるよう配慮した。

小問2は「梁の数から必要な棒の本数を求めるには、どうしたらよいか」である。多くの子どもたちがどのように表現しようと悩んでいたが、級友や全体での話し合いを通して、式に着目し、文脈から、様々なことばの式によるモデルを形成した(図6, 図7)。

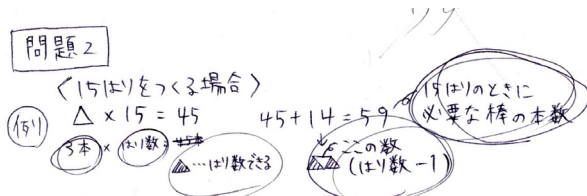


図6 ことばの式によるモデル

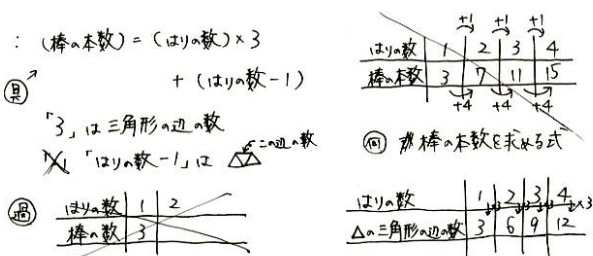


図7 ことばの式によるモデル

問題Ⅱの小問1においては、文章表現が子どもにとって親しみやすく、特に学習の遅い子どもほど模型の手操作がモデル形成に有効である様相が見られた。

問題Ⅱの小問2においては、ほとんどの子

どもたちが「棒の本数＝梁数×3＋(梁数－1)」ということばの式によるモデルを形成した。式という相対的に形式化されたモデルへの発達過程において、多くの特徴が見られた。特徴の第一はモデルの翻りである。これは全ての子どもたちに見られ、Saについては文脈から「 $\Delta \times 15 = 45$, $45 + 14 = 59$ 」という具体的な数式による model-for を形成し、その具体的な数式が model-of に翻ることにより、「棒の本数＝梁数×3＋(梁数－1)」ということばの式による model-for へと発達した。同様に Sio については文脈から梁数と三角形の辺の数を示した表による model-for を形成し、その表が model-of に翻ることにより、「棒の本数＝梁数×3＋(梁数－1)」ということばの式による model-for へと発達した。Kazu は文脈から「1 梁増えると棒は4本ずつ増えるから $4x$ 、最初は3本なので1を引く」という文章表現による model-for を形成し、文章表現による model-of に翻ることにより、「 $y = 4x - 1$ 」という文字式による model-for へと発達した。

特徴の第二は、モデルの局所的な発達である。Sio は発達段階において「梁数と棒の本数」や「梁数と△の辺の数」のような二量の関係を対象とする表によるモデルを形成している。それぞれの表の間で発達と逆行を繰り返し、梁の数と△の三角形の辺の数の表から、「棒の本数＝梁数×3＋(梁数－1)」ということばの式による model-for を形成した。

特徴の第三は、モデルの飛躍である。Kazu の場合は「1 梁増えると棒は4本ずつ増えるから $4x$ 、最初は3本なので1を引く」という文章表現より、「 $y = 4x - 1$ 」という文字式による model-for へと発達した。文章表現によるモデルと文字式によるモデルの間には表によるモデルを介在させるのが一般的な指導であり、Kazu のモデルの形成ではこの種の一般的な指導によらない、表を飛び越えた様相が見られた。

4.2.2. 第8時の概要とその分析

第8時での小問4で「7本の同じ長さの梁が必要で、必要な棒の本数が525本なのか、532本なのか、分からなかった。必要な棒の本数はどちらか？」という問題を提示した。

第8時より新たに参加した子どものために、前時までの復習を行った。問題に現実性を加えるために、工場にFAXで注文が入ったが、印字が不鮮明であったことなどを付け加えて問題を提示した。

解答のパターンは2つあり、一つはSaやSioのように2数を7で割って1梁当たりの棒の本数を求め、これを $y = 3x + (x - 1)$ という式に代入し、適した方を解答にするものであった(図8)。もう一つは、HiroやShoのように具体的な数で考えた結果、必要な棒の本数は必ず奇数であり、それに7を掛けたものも奇数になるはずなので、奇数が解答になるというものであった。

問題 【525本】 【532本】

○ $525 \div 7 = 75$ ✕ $532 \div 7 = 76$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 7 \overline{) 525} \\ \underline{49} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 4 \overline{) 76} \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 75 &= 3x + (x - 1) \\ 75 &= 4x - 1 \\ 4x - 1 &= 75 \\ 4x &= 76 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76 &= 3x + (x - 1) \\ 76 &= 4x - 1 \\ 4x - 1 &= 76 \\ 4x &= 77 \\ x &= 19.25 \end{aligned}$$

525本必要

図8 小問4におけるSaのモデル

Saのように方程式に代入して解を求めると考えた子どもは、式に価値を見いだしているものと解釈できる。しかし、 $y = 4x - 1$ というモデルに数を代入したのはKazuのみで、ほとんどの子どもは自らの形成したモデルである $y = 3x + (x - 1)$ に数を代入し

ていることから、文脈から脱し切れていない状況が見られる。

HiroやShoのように数の関係で解決した子どもは、文脈に大きく依存しているものと解釈できる。

4.2.3. 第9時の概要とその分析

第9時は、床数とタイルの数の変化を考察する次の問題を出題した。

問題Ⅲ 下の図(図9)のように、真ん中を青いタイル、周りを白いタイルを用いて床をデザインし、大きさによって左から1, 2, 3というナンバーをつけた。

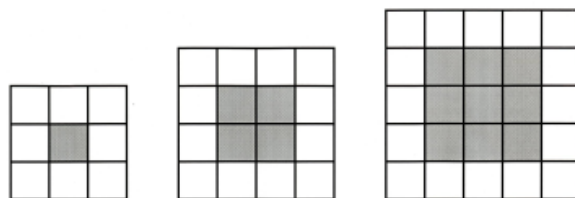


図9 調査問題Ⅲの図

問題提示に際しては、それまでの問題と同様に子どもがより現実場面を意識しやすいよう、外国の大邸宅の床のデザインを示したり、黒板に絵をかきながら様子を事細かく説明したり、子どもたちの知人の名を多く用いたりした。

初めの問題では、変数の捉え方を問う小問1「床数は何を表しているか」を提示した。子どもたちは、それまでの問題の流れから小問を予想している様子で、Kiに質問すると「床数は何を表しているのか?」と発話した。

それまでの問題よりは書きやすい様子で、Kiはすぐに「中心にあるブルータイルの縦、横、斜めの数」と解答した。他の子どもたちもほとんど同様の解答であった。

次に、具体的にタイルの枚数を問う次の小問を提示した。

小問2 床数を用いて青いタイルの数を表しなさい。

小問3 床数を用いて白いタイルの数を表しなさい。

小問4 床数を用いてタイルの総数を表しなさい。

小問2に関しては、ほとんどの子どもたちが絵図を用いず、いきなり「(床数) × (床数)」, または「(床数)²」ということばの式によるモデルを形成できた。小問3に関しては、Sioのように式の変形から「白いタイル数 = (床数 + 2)² - (床数)²」ということばの式によるモデルを形成する子どもが多かった(図10)。

$$\begin{aligned} (\text{白のタイル数}) &= (\text{床数} + 2) \times (\text{床数} + 2) - (\text{ブルーのタイル数}) \\ &= (\text{床数} + 2)^2 - (\text{床数})^2 \end{aligned}$$

図10 Sioのモデル

しかし、YouとKiは形成したモデルに価値を見いだせなかったり、うまくいかなかったりして、結局、文脈に戻って絵図を用いることで「床数 × 2 + (床数 + 2) × 2」ということばの式によるモデルを形成した(図11)。

$$\begin{aligned} f &= (x+2) \times 2 + x \times 2 \\ f &= 2x + 4 + 2x \\ f &= 4x + 4 \end{aligned}$$

図11 Sioの絵図を用いたモデル

また、Saはすすんで文字式によるモデルを形成したものの、級友に自分の考えを説明する際には、絵図を用いていた。

前問の梁の問題の場合には、どうしても三角形を構成する棒を意識することができず、図形に着目することが多かったが、本問はすぐに問題を視覚化して絵図を描き、問題の内容を適切に捉えることができた様子が見られ

た。このことから、子どもたちにとっては平面図形の方が線分で表したものより扱いやすい教材であるかもしれない。勿論、問題の型が同様の問題を解くことによる馴染みやすさが影響していることも考え得る。

3問目ということもあり、問題にも慣れ、自ら文字式によるモデルを形成しようとする姿が見られた。ここでの知識の形成過程を見ると、文脈からいきなり「青いタイル数 = (床数)²」というようなことばの式 model-for へと発達し、飛躍している状況が見られた。理由としては、子どもが容易に関数関係に気付きやすい問題を取り上げたこともあるが、子どもがそれまでの学習経験から式のモデルを形成することに価値を見いだし、積極的に取り組んでいたことがあげられる。

また、Saのように級友に説明する場合には、みんなに受け入れやすい模型操作や絵図などの具体物を用いる様子も見られた。

4.3. 教授実験の考察

4.3.1. Van den Heuvel-Panhuizen (2003)が論じた知識の発達過程について

教授実験における子どもたちの知識の形成過程を見ると、その多くが下図のSaやSioと同じく、文脈から表やことばの式のモデルを形成し、より formal な知識である文字式へと発達している。

その発達過程においては、Van den Heuvel-Panhuizen (2003)が論じたようにモデルの翻りや局所的な発達がおこっていた。図12はSaのモデルが翻る様子である。文脈から「△ × 15 = 45, 45 + 14 = 59」という具体的な数式 model-for が形成され、その具体的な数式が model-of に翻り「3 (本) × 梁数 + (梁数 - 1) = 必要な棒の本数」ということばの式 model-for を形成し、さらにことばの式が model-of に翻ることにより「y = 3x + (x - 1)」という文字式 model-for が形成された。

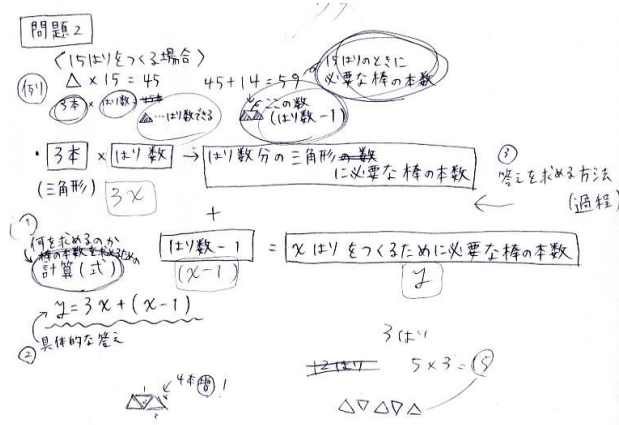


図 12 Sa のモデル

図 13 は Sa のモデルの局所的な発達である。文脈から形成された絵図 model-for が、絵図モデルという局所的な部分で、文脈を描いた 1 つの絵図から、定数部分と変数部分に分けられた式を示した絵図へと発達している。

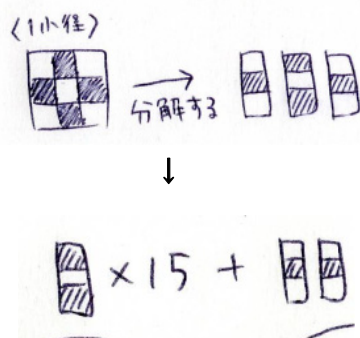


図 13 Sa のモデルの局所的な発達

以上のことから、子どもの知識の形成過程は Van den Heuvel-Panhuizen (2003) の論じた発達過程とおおむね整合していると考えられる。

4.3.2. モデルの逆行と発達について

詳しく分析を進めていくと、モデルは常に漸進するとは限らず、以前のモデルへ逆行したり、発達すると予想されるモデルを飛び越えて飛躍する様子が見られた。

図 14 は Sa のモデルが逆行する様子である。小径数とタイル数の関係について表によるモデルを形成したが、解決の見通しが得られず、

より以前の事象の変化を示す具体的な 2 小径の絵図によるモデルで思考することにより「(横に並ぶタイル数) - 2 = 小径数」ということばの式によるモデルを形成した。

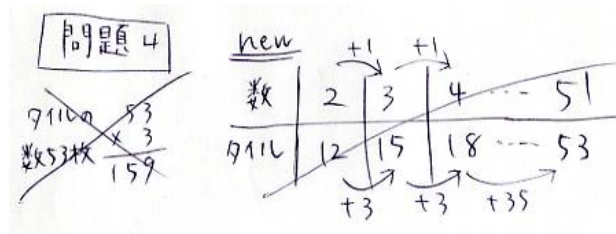


図 14 Sa のモデルの逆行

モデルが逆行する様子は、他の子どもにも数例見られたが、どのモデルに逆行するかは、その時の状況や子どものもつ知識や適性などにより異なる。ただし、模型操作や具体的に事象を考察できる文脈への逆行する例が多い。

モデルが次に発達が予想されるモデルを飛び越え、飛躍する様子も見られた。調査問題 III においては、多くの子どもたちが文脈から次に予想される表モデルを飛び越え、「青いタイル数 = (床数)²」などのことばの式によるモデルを形成した。子どもたちのモデルを形成する様子を観察すると、自然にモデルを形成していたことから、今までの学習経験の影響もあるが、子どもたちにとって調査問題 III が、容易に関数関係を見つけることができた事象であることが要因として考えられる。特に学習経験に関しては、調査問題を重ねていくうちに、より抽象度の高い事象を考察したり表現できるようになったこと、より

formal なモデルである文字式に価値を見だし、表現できるようになったことなどの変化が見られる。

4.3.3. Sa と Sio の形成過程の比較について

抽出生徒である Sa と Sio の形成過程の比較により明らかになったことを三点述べる。

第 1 は、調査問題を重ねるごとに形成過程が単純化してきたことである。調査問題 I においては、慣れていないためか、Sa は絵図によるモデルとことばの式によるモデルの間で（図 15）、Sio は表によるモデルとことばの式によるモデルの間で（図 16）発達と逆行を何度も繰り返し、ことばの式によるモデルを形成している様子が見られたが、調査問題 III においては、Sa は比較的順調に知識を形成した（図 17）。要因としては慣れを通して、事象の変化を絵図や表による表現を超えて式による表現となった。関数を表現する能力を身に付けたと解釈できる。

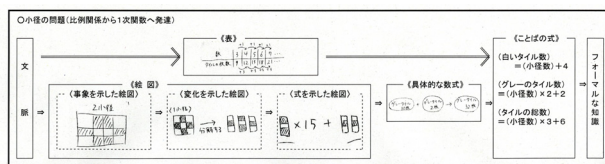


図 15 調査問題 I における Sa の知識の形成過程

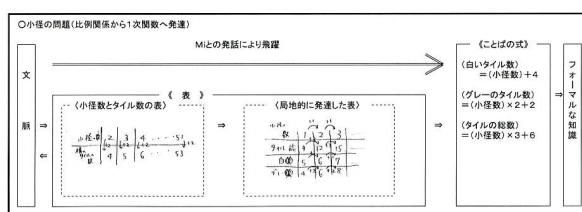


図 16 調査問題 I における Sio の知識の形成過程

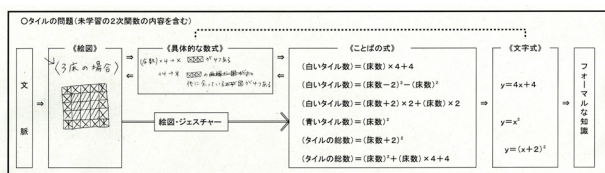


図 17 調査問題 III における Sa の知識の形成過程

第 2 は、子どもが自らすすんで文字式によ

るモデルを形成するなど、数学的に構造化された formal なモデルが形成されるようになったことである。要因としては、各調査問題の最後の小問において、方程式を利用し、解くことができた、という学習経験が文字式モデルに価値を与えたことが考えられる。

第 3 は、固執モデルの存在である。Sa は絵図モデルに、Sio は表モデルに価値を見だしており、これらのモデルに固執して知識を形成している。要因としては各々の学習経験が大きく関わっていると考えられる。この固執モデルは、逆行したり飛躍するきっかけとなるモデルであり、調査問題 I で見られるように、局地的な発達もこのモデルで見られる。

4.3.4. 調査問題について

調査問題では MiC の問題を参考にしたが、多くの知見を得るものとなった。その中から三つ述べる。第 1 に、現実的事象である。調査問題における事象は、問題の度に常に出発点となり、子どもたちが学習をすすめる上で意識していた重要なものとなった。その理由として、調査問題が模型の手操作で考えやすい現実的事象であったことがあげられる。模型での手操作は文脈に大きく依存しているため、事象の変化を読み取りやすく、より抽象度の高い事象でも捉えられやすい。特に、学習の遅い子どもにはモデルを形成するのに模型での手操作が有効であった。また、扱った事象は離散的なものであったことも助力となっている。現在の中学校で扱う時間とともに増える水量などの連続関数は、模型では扱いにくく、関数を理解する点だけにおいては、子どもにとって水槽の問題は難しい教材であると考えられる。

第 2 に、調査問題が、子どもが自分の知識を用いて解くように仕向けられた問題であったことである。子どもたちは戸惑いをみせたが、時間はかかりながらも自分の知識を用いてモデルを形成できた。そのモデルは常に事象が意識されたものであり、モデルは問題解

決に用いられ、その形成する過程そのものが、次のモデルを形成するための支えとなった。調査問題の解決を通して、モデルとして表される知識が、有機化、再組織化され、formalなモデルの様相である文字式に至る発達となると考える。

第3に、複数の方略を話し合う機会がモデルの発達を促すことである。この機会には、説明することを通して、自分の考えを表現する能力を育成するとともに、新たな知識の形成過程を拡張し、多様にすることができる。子どもは知識を形成するためにそれぞれ価値を見いだしているモデルをもっているが、例えば、絵図を中心に知識を形成している子どもが表による知識形成を学び、その後の調査問題解決の際に、表により新たな知識を形成しようとしていた様子が見ることができた。

以上の点から、MiC教材が関数の知識形成に関して有効であることの知見を得た。

5. 終わりに

教授実験は、比較的自由な雰囲気の中で、少人数により行われた。その恵まれた環境の中で、子どもたちは離散的な教材を扱い、発達や逆行、飛躍を繰り返しながら、時間を掛けて関数の知識を形成していった。しかし、実際には時間や人数の制限された環境の中で、連続的な事象での考察を通して関数の知識を形成することが求められる。離散的な事象から連続的な事象へのステップは、子どもたちにとって、筆者が考えるより大きく、この溝を埋める努力とともに、教師と子どもたちの互いの意識も進化させていかなければならない。

引用・参考文献

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Mathematics education library. 9 Lecture. Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, P., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (eds.), *Symbolizing and Commu-*

-nicating in Mathematics Classroom (pp.225-273).

Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates

林弘. (2001). 一次関数における学習過程に関する考察—事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して—. *上越教育大学数学教室*, 16, 81-90

磯田正美, 志木廣, 山中和人 (1990). 関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究—小中高にわたる発達と変容—. *日本数学教育学会誌*, 72 (1), 48-59

桐山眞一. (1998). 中学生における関数の理解に関する研究—一次関数を事例として—. 平成10年度修士論文.

国立教育政策研究所. (2009). 平成21年度全国学力・学習状況調査: 調査結果のポイント. 文部科学省

国宗進. (1987). 関数の課題解決場面における子供の考え方. *日本数学教育学会誌*, 69 (9), 248-257

文部科学省. (2008). 学習指導要領解説数学編. 教育出版株式会社.

日本数学教育会. (1966). 数学教育の現代化. 株式会社培風館, 10, 45, 158

高橋薫. (2002). 事象から形式的な表現への過程を重視した一次関数の授業. *上越教育大学数学教室*, 17, 91-102

高橋等. (2003). 子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる. *上越教育大学数学教室*, 18, 31-52

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in Primary School* (pp.21-56).

上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて—中学2年「一次関数」の単元における影響についての一考察—. *上越教育大学数学教室*, 24, 41-52

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

横関達人. (2005). 実験を伴う関数授業における子どもの思考過程について—数学的モデリングに着目して—. *上越教育大学数学教室*, 20, 121-132