上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.1-10.

数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

関数学習の問題点の一つとして、式やグラフなど複数の表現を統合的に利用できていないことに言及されることが多い(例えば Elia & Spyrou, 2006)。実際、平成 20 年度全国学力・学習状況調査数学 A 問題 12 で、y=2x－3 の式からそのグラフの傾きを答える問いでは正答率が 54.2%、y=3x+5 の表から式を求める問いでは 37.8%であった。また同じ調査の数学 B 問題 3 で、同じものがたくさんあるときに、総数を求める工夫として比例が用いられることを選択した生徒は 50.5%であった、という結果を見ると、関数を現実的な場面に適用できないとの問題点も考えられる。

しかし、これらをもう少し広く、数量関係の学習の文脈から捉えなおして見ると、少し異なって解釈することが可能となる。例えば、前者の問題については、割合の学習に関わる布川(2009)の考察を見ると、２量の関係を示す図的表現と式という多様な表現が相補的に働き、子どもの学習を支える傾向が報告されている。また後者の問題については、子どもたちが比例的推論をむしろ過度に適用することが報告されている（例えば Van Dooren *et al.*, 2005)。そこで本稿では、関数の学習に関わる論点のいくつかを数量関係の学習の知見と関連づけることにより、一つの視座を提示することを目的とする。

２．数量関係の知識の適用と対象となる現象

林 (1994)は関数の学習前の中学校 1 年生に対して、台形状に並べたおはじきの個数やクリスマスツリーの電球の個数を求める問題(Stacey, 1989)を提示し、1～3 番目の状態をもとに 4 番目、16 番目、100 番目の個数を求める際の生徒の考え方を考察している。個数は基本的に一次関数に相当する数量関係をもとに求めることができる。その中の何人かの生徒は、4 番目では適切な考え方をしていても 16 番目を比例的推論で求めてしまったり、16 番目は適切に求めていながら 100 番目では比例的推論を用いたり、番数－1 とすべきところで－1 の部分を落としてしまっている。同様の傾向は、特定の課題に関する調査(国立教育政策研究所, 2006)にも見られる。

この視点から前述した平成 20 年度全国学力・学習状況調査数学 A の問題 12 のうち、表から式を求める問いの結果を見てみると、y=3x と答えたものが 10.7%いる。つまり、一次関数であるところを比例として答えていることになる。平成 21 年度全国学力・学習状況調査数学 A 問題 9 で、4 つの表から比例となっているものを選択する問いの正答率は 72.1%であった反面、反比例の表から式を求める問い(問題 10)で、比例の式を解答した者が 12.8%いたことを併せて考えると、比例的推論に関する知見である、比例的推論の過度の利用と見ることもできる。

布川(2008b)は、２乗に比例する関係に関わる課題を考える小学校 6 年生の思考過程を考察して、そこで取り上げられている児童たちも、その課題に比例的推論を適用したことを報告して

いる。比例的推論の適用から２乗に比例する関係に移行できた児童とそうでない児童の思考を比較して、移行のためには自分が比例的推論により場面を意味づけていること、また自分の思考のどこに比例的推論が影響しているかを意識することが重要であると指摘している。自分の比例的な数量関係の利用を意識化することは、その利用を数学的モデル化の観点から考えた場合にも重要となる(Greer, 2007)。ここから、関数などの数量関係に関わる算数・数学的知識を適用する場合に、自分が適用している知識を意識化することの重要性が示唆される。

自分の適用している数量関係を意識することは､適用をコントロールすることにもつながる。Hitt & Morasse (2009)は生徒の関数を利用した推論を発達させることを意図した課題に取り組む生徒の活動を考察し、文字式による考えが行き詰まったときに、数値に基づく思考が文字式での行き詰まりを解消したことを述べている。彼らは、数値に基づく思考が、文字式により思考する生徒の自らの行う過程に対する自覚的を促し、コントロールの要素を提供したとしている(p. 256)。また Mesa (2004)は 7～8 年生の教科書の関数導入時に現れる課題を分析しているが、その際、生徒が考えた結果を生徒自身が吟味するための拠り所をコントロールとし、それに着目している。つまり、課題を解決した際に、関数に関わる知識の適用を生徒自身が意識し確認することが、関数の適切な利用にとって重要な側面であると見ている。

Beckmann (2007)は関数についての柔軟な思考や、対応や依存関係、変化について考えることを発達させるために、線形でない関数を含む活動を経験することが必要であると指摘している。これは、比例のような意識せずに適用してしまいがちな関数ばかりでなく、それ以外の数量関係を考える必要性を感得させることで、２量間の関係を意識して扱うようになることを意図したものであり、自分の扱う数量関係を意識化することが関数の柔軟な思考にとって重要なものと捉えられている。

布川(2008b)が比例的推論の適用から移行できた例として考察している児童においては、自らの比例的推論の適用を意識化した上で、もとになった場面を探究し、そこから数値的データを集めて整理をすることで、新たな数量関係を見いだしている。また草野(1997)は小学校６年生への調査で、正方形に並べたおはじきの個数を求める問題を扱い、１辺の個数が小さい数のときに子どもが用いた式について、その背景にある場面を構造化した操作を意識させることにより、同じ考え方を１辺が 100 個の場合に適用することが促されたとしている。適用される知識とともに、適用される場面や対象についても意識し､その理解を漸進的にでも進めることが、柔軟な利用にとって必要なのである(*cf.* Nunokawa, 2005)。

学習者が場面の数量関係を見いだす過程を分析した研究からも、そうした側面が見受けられる。例えば桐山 (1999)はハンドルを回転するとブロックが動く装置を使いながら中学校１年生が課題を解決する過程を分析し、変数の構成を数量間の依存関係を見いだす過程全体として考える方がよいことを指摘しているが、その過程では､現象から動きを部分的に構成することや、その動きを全体的に構成することの重要性が述べられている。これは、現象に含まれる動きを意識化し、その特徴から現象全体を大局的再構成 (Nunokawa, 1994)することで、場面の理解が進展する過程と見ることができよう。

高見 (1997)は紙を 10 回折ったときの折り目の数を求める問題を解く小学校６年生の解決過程を分析し、面の数という媒介する変量を見出しながら解決に向かう様子を考察しているが、変量を捉えるためには、問題場面に働きかけた上で変化に着目する活動が重要であると指摘している。これは場面に働きかけ、そこに起きている現象を実験のようにして観察することで、場面の理解を進展させることになっている。また動きを全体的に構成するにあたっては、図や

表をかくことが有効との指摘もある (高橋, 2002)が、これにより場面を対象化し、それを探究することを可能にするからだと考えられる。実際、Hines *et al*. (2001)は、８年生と教師を目指す学生の解決を分析し、表をかいて関係を捉えようとする際に、表が背後の現象を再現するために用いられ、それが関数関係を見いだすことを支えていたと考察している。特に関数の導入段階では表は中心的な表記であり式の意味づけなどを助ける役割を持つ(日野, 2009)が、表の表すものが一つの現象であると考えることが、その有効性を高めることを示唆する知見と言えよう。さらに、大滝(2009)が桐山(1999)の装置の簡易版を生徒に持たせたことで、解決の拠り所となったことを報告しているが、扱っている現象に戻ることを容易にしたからだと推測される。

こうした視点から、例えば前述した y=3x+5 の表から式を求める問いを考え直してみると、所与として提示された表に対して、現実的なものであれ数学的なものであれ、そこに何らかの現象を感じとり、それを理解しようとすることが行われていたかが問題になる。つまり、表から式を求めることを単に関数の表記間の翻訳とするだけでなく、表が表す現象や場面の理解と記述と捉えるかどうかの問題が提起される。

他方において、数学の知識を認知的道具とする立場(布川, 2008b)で言えば、ある時点での理解により活性化された数学的知識は、その後の場面の理解を方向付けることになる。先の例で言えば、場面を一次関数で意味づけようとすれば、x の係数に当たる値や y 切片に当たる値を見いだそうとして理解が進むことになろう。だからこそ布川(2008b)が指摘するように、その数量関係に関わる知識の適用は意識的でなければならないし、利用者のコントロール下にあるものであることが要請される。意識化されコントロールされていることで、適用の適切さが問題となり、必要に応じて修正がされる。

第１節で触れた平成 20 年度全国学力･学習状況調査数学 B 問題 3 のうち、釘全体の重さから本数を求める方法を説明する問いで、１本の重さ以外を解答したり、１本の重さを選択してもその方法が記述できないという場合、ここまで述べてきた立場からすると、問題となっている場面で起きる現象、つまり釘の本数が変化するのに伴い釘全体の重さも変化するという現象をイメージしながら考え、またその現象を理解しようとしたかが問われることになろう。また、平成 21 年度全国学力・学習状況調査数学 A 問題 11 で、目盛のないグラフから特定の傾きと切片の関数を選ぶ問いよりも、水を入れる現象から式を作る問いの方が正答率が低いことも、後者では水の入れ方を説明する文章からその現象をイメージすることが行われにくかったことも一因であった、と考えることもできる。

３．共変性の意識化

数量関係の学習、特に関数の学習の導入段階で学習者に課される問題は、基本的に「２つの数量の間の依存関係や関連性の観念(notion)に生徒を慣れさせる」(Mesa , 2004, p. 274)ことを目指している。一方で、一連の数値のペアを表などで提示した場合であっても、含まれる２量が伴って変わると捉えていないとの指摘もある。特に問題になるのは、同一量内での加法的方略(再帰的方略)、つまり同じ数ずつ増えるというパタンの把握や、スカラー的見方、つまりある量がスカラー倍されたときに他方の量も同じスカラー倍されるパタンの把握に留まりがちであり、関数的見方、つまり２量間の関係の把握が難しいことである(English & Warren, 1998; Carraher & Schliemann, 2007)。表を横に見る見方から表を縦に見る見方への移行である。

そのため、この移行を促す手だても探究されてきている。例えば、２量の関係を式により明示することが有効と考えられる。Schliemann, Carraher, & Brizuela (2001)は 9 歳児が表をスカラー的方法による見方から関数的な見方に移行することを意図した授業において、表で N 番目を問うこと、表の中に亀裂を入れること(例えば

10 番目の次に空白を入れ、その後を 20 番目にする)を試みるとともに、一方の量から他方の量を求めるルールを考えること、そのルールを表現する式($n\times2-1$ など)を導入することを行っている。その結果、9 歳児でも比例や一次関数の表を関数的に見ることができるようになったとしている。ただし、このことが当該の２量の間に生じている現象を関数的に見ることを必ずしも意味するものではない。例えば、第２節でも触れた林 (1994)の調査では小さい数で用いた式を大きい数の場合に適用しないということが見られたが、生徒の反応からは、数が大きくなったときにおはじきや電球の配置が変わる、つまり当該の現象自体が変わると考えている様子は見られないので、意識的に適用を控えたというわけではない。単純に２量間の関係を捉えられないわけではないが、一部で見出した２量間の関係が場面の他の部分にまで広がっているとは意識していないと考えられる。

これは Breidenbach *et al*. (1992)が関数の行為的な捉え方(action conception)と過程的な捉え方(process conception)を区別していることにも関わってこよう。つまり、ある数値を求めるための計算式が、必ずしも単一のプロセス(Hines *et al*., 2001)や系(system; 大谷と中村, 2004)を表現するものとはなっていないことを示唆している。

日野(2009)は比例学習前の中学校１年生への事前調査の中で、比例定数を特定の点とみなしている生徒のいることを報告している。本来であれば比例定数は、２つの数量間の関係を特徴づける定数であるが、それがグラフが x=1 と交わる点を指しているようであったとされる。ここでも、ある数量関係がより広い部分で成り立っていることの意識が薄いと考えられる。

このように２量間の関係に注意を向け、その関係を持ちながら場面の全体にわたり２量が伴って変わっていることが意識されにくいとされる反面、数量関係自体を式などで特定はできないものの、２量が伴って変わることを感覚的には捉えられるという面も、学習者には見られる。

上田 (2009)は一次関数学習前の中学校２年生に、曲線を含む３通りの線が１つの座標軸に描かれたグラフを提示し、それらが示すレースの様子を実況中継するという課題を課しているが、生徒は到着の順や抜かれる様子だけでなく、「緩やか」「ペース」といった言葉で変化の割合を含む記述を構成したことを報告している。ここでは、時間とともに位置の変わる様子、さらにはその変化の割合についても生徒が捉えている。ただし２量の関係や２量の変化の割合は数値や式によりは表現されず、「緩やか」といった質的な表現に留まっている。この事例は、２量が伴って変わる、つまり共変性(covariation)について生徒が豊かな感覚を持っていることを示すものである。先の知見を併せて考えるならば、共変性について感覚的に捉えられるものの、その意識化が十分ではない場合がある、という問題点として定式化することができよう。

Moritz (2003)は時間とその時の室温の表を示し、グラフをかかせているが、5 年生のほとんどと 7 年生の 1/3 程度が、共変性を示さないような表現をしていた。しかし一方で、他の課題の反応との比較により、事象の全体の傾向を捉えること、グラフをかくこと、グラフを数値的に解釈し内挿などができることの順に発達するとの見方を示している。ここでも共変性の全体的な把握が先立つという傾向が見られる。

さらに考えてみると、学習者が表において加法的方略やスカラー的見方を用いる傾向が強いとしても、学習の導入時に日常的な現象をもとに表を作成する際には、例えばある時間に対応する水の深さといった２量の対応をもとに表を作成しており、２量間の関係が明確化されてはいないとしても、表の見方としてはむしろ関数的見方になっている。

以上をまとめると、学習者は関数的見方を苦手とする側面も持ちながら、２量の共変性や２量の関数的関係について感覚的には捉えていると考えられる。ただし、その感覚的なものが意識化され、共変性と関数的見方が組み合わさっ

た形(図１(b))に十分発達しない場合があるのだと考えられる。その場合、加法的見方やスカラー的見方(図１(a))と関数的見方の双方を適宜利用できるような多面的に数量関係を捉える(布川, 2009)見方(図１(c)) 1) には至りにくいことになる。

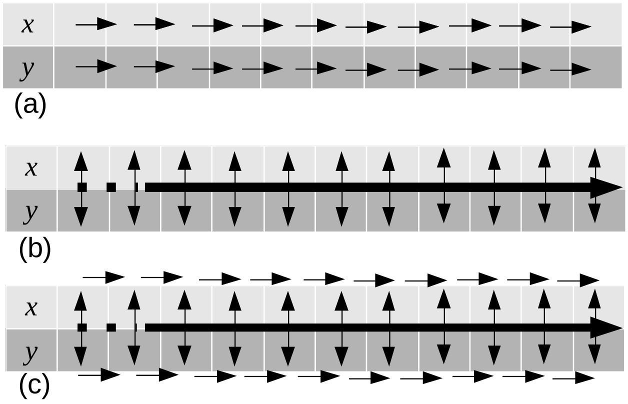

図１

平成 21 年度全国学力・学習状況調査数学 B 問題３で、２種類の電球の総費用が等しくなる方法を説明する問いでは、グラフに言及した者は正誤あわせても 16.3%であった。ここでの議論を踏まえるならば、それぞれの時間に対して総費用が計算できることと、２つの電球の総費用が使用時間とともに徐々に変化することが組み合わさった、図２のようなイメージとして、問題の現象が捉えられなかった可能性も考えられる。図２のような動的イメージでは、２つのグラフの交錯、上下の逆転は創発的な(emergent)要素(Nunokawa, 2006)として意識されやすい。逆にイメージが持てない場合、総費用の多寡が途中で逆転するので「２つの総費用が等しくなる時間がある」(下線は引用者)という、問題文中の説明についても理解が困難となる。つまり、今の問題の低い正答率を、共変性の意識化の不十分さのあらわれと考えることもできる。

このように、共変性が感覚的に捉えられた状態と意識化された状態との差異が問題であるとすると、van Hiele の水準論をそこに援用する可能性が開かれる。布川(1992)は van Hiele の水準論を図形に対する認識の変化という点から再解釈し、最初の３つの水準を図形の感覚的な認識から定義による意識的な認識への変化として特徴づけている。また、そうした変化がインフォーマルな知識からフォーマルな知識への変化に相当するとも指摘している(布川, 1993)。そこで共変性の認識の変化を、この van Hiele の水準論の解釈にもとづいて吟味してみることにする 2)。

４．共変性と van Hiele の水準論

van Hiele の水準論を上のように考え、これを共変性に援用すると、第一水準はある共変性を(現実場面の中であれ数値的なデータの中であれ)感覚的に捉えている水準となり、その弱い構造(feeble structure; van Hiele, 1986, p. 20)を見ている。第二水準では様々な性質を備えたものとして捉えていることになり、第三水準ではその共変性が性質の一部により定義される 3)ものとして捉えられ、他の性質はその定義から演繹的に導出されることになる。

ここで我が国の小学校、中学校での学習がこ

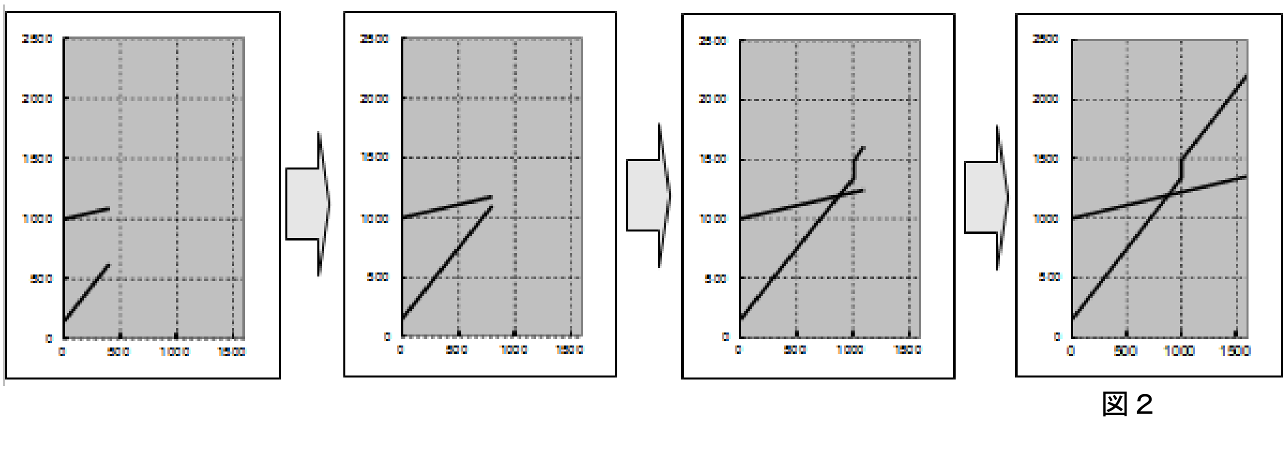

図２

れらの水準のうちのどの水準での学習となっているかを考えておく。例えば小学校での比例の学習では、日常的な現象を表にまとめた上で、その表を比例的推論により特徴づけたり、表から変化の割合を見出し、数量間の関係を言葉の式で表現したり、表からグラフを作成したりしている。比例的推論に基づく特徴がここでの定義ではあるが、ここから他の性質を導くというよりも、表により捉えられた比例という数量関係の様々な性質を帰納的に見出すことが行われている。ここには、小学校における図形の学習との類似の傾向を見ることができる。これに対し、例えば中学校２年生の一次関数の学習においては、いくつかの日常的な現象を考察し、そこでの数量関係が一次式で表現されることを確認した後、y が x の一次式 $y=ax+b$ で表されることを y が x の一次関数であることの定義としているように見える。しかし、一次関数に関わる諸性質が、この定義から演繹的に導かれているようには見えない。例えば、変化の割合を考える際には、式から表を作成し、その上で帰納的に変化の割合が一定になるという性質、また式 $y=ax+b$ の a がその変化の割合と一致することを導いている。またグラフが直線になることも、表を媒介にして帰納的に示されている。図形の学習で定義から出発して他の性質を論証により確立するのとは､少し異なる様相を見せている。ただし、グラフの傾きと y 切片がそれぞれ式の a, b と等しくなることについては、後者は式の形をもとに示され、前者は変化の割合が a と等しくなるという以前の結果をもとに示されており、部分的には演繹的な導出も見られる。以上より、中学校での学習においては、小学校のものよりも関係網の構築が進んではいるものの、第二水準から第三水準への移行期と考えられる。

このように関数の学習を van Hiele の水準論から捉えるとき､いくつかのことが示唆される。第一に最初の水準の重要性である。この水準で見ていた弱い構造を意識化し、自覚的に利用できるようにすることが目指されるとすれば、弱い構造に感覚的に関わる経験が大切にされる必要がある。さらに水準引き下げ(level reduction; van Hiele, 1986, p. 148)の可能性を考慮すれば、感覚的な捉えは後の思考でも役割を果たすと考えられる。第二に小中学校の関数の学習の関係に一つの方向性を与えることができる。すなわち小学校では第一水準から第二水準への移行を目指し､共変性についての豊かな経験を土台として、その諸性質を明確にしていく「記述的レベル」(van Hiele, 1986, p. 53)への移行が行われる。中学校では第二水準から第三水準への移行を目指し、関数の性質を記述しながら、その性質間の緩やかな関係網を構築し、その中で将来的な式による定義からの演繹が主となる学習に備える。第三に水準の移行を目指す学習の 5 つの段階 (van Hiele, 1986, pp. 53-54) が示唆される。特に第 3 の明示化の段階において、諸関係を意識するようになり、それを言葉で表現しようとし、そのための用語を学ぶとされる。第二水準への移行では諸性質の明示化、第三水準への移行では諸性質間の関係の明示化が試みられる。第２節では数量関係の知識に関わりその適用の意識化と適用される現象の意識化について論じてきたが、関数の学習に際しては、感覚的に捉えた共変性の意識化、その諸性質間の関係の意識化が問題になると考えられる。

５．共変性の意識化の手立て

布川(2008a, 2009)は $y=u\times r$ (y は比べられる量、u はもとにする量、r は割合(倍))の u を固定したときに、様々な y に対して割合がどうなるかを比例的推論をもとに考える活動を、小学校 5 年生の割合単元の導入として試みた｡その際に、割合メーターと呼ばれる二重数直線のような表記に結果を記入し、さらに数値間の乗法的関係も矢印により明示した。比例的推論とこの表記の利用を単元を通して続けたところ、学習者は比例的推論をより意識的に利用するようになり､また割合メーターの上で乗法的関係を多面的に探求するようになったと報告している。田端

(2003)は同一の r を与える y と u を数多く生成し表にまとめた上で、共通する r を見出す形で割合の導入を行っている。これらの学習は当該の数量関係の新たな性質 $r=y/u$ を見出すものとなっているが、学習者自身が共変する(co-vary) 2量について多くの数のペアを作り、またその作り方やそこで用いた乗法的関係を明示化することを伴っている。

前節で見たような、学習者が感覚的に捉えているものを意識化するという学習の流れ、また比例的推論の学習に見られた多面的に数量関係を捉えるという観点からすると、感覚的に捉えられていた２量間の関係をもとに、それを意識化することでより豊かな数量関係の把握ができるようになることが重要であろう。例えば式に重点を置きすぎることでかえって制限的な理解になる(Elia & Spyrou, 2006)ことは、これに反すると考えられる。林(2001)は桐山(1999)と同じ装置を用いた課題から始まる授業を実施し、生徒が早い段階では変化に着目していたにも関わらず、その後の学習の中で、文脈のない問題では加法的方略のように変化に注意を向けることができなくなったことを報告している。

日野(2009)の事例に見られる生徒は、$x=1$ のとき $y=15$ である比例の表で「x」のときの他方の量を考える際に、x が(1 から) x 倍になったので y も x 倍になると考えて立式している。$y=15x$ の式は基本的には関数的見方により立式されるであろうが、この生徒のようにスカラー的見方により立式することで、スカラー的見方と関数的見方とを関連づける多面的な捉え方も可能になる。van Hiele の水準論の援用から示唆されたように、数量関係の諸性質を意識化し、またそれらを関係づけるという点からは、スカラー的見方から関数的見方に移行すると考えるよりも、両者を統合することが重要と言える。

大谷と中村 (2004)の小学校６年生における実践では、比例の式の x の係数とグラフの傾きを吟味する場面で教師が $y=2/3\times x$ の式を提示したところ、最初は児童がそうしたグラフがあるのか困惑し、その後受容したことが報告されている。これは式が新しい関数を規定することの素地的経験となり、式からグラフに向かう新たな関係の明示化になっている。彼らの実践では、背後にある比例的推論のような「しくみが見え隠れしている」(p. 7)状態を、言語や図示により意識化する様子も伺える。

数量関係の多面的な捉え方を重視することの他に、共変性の意識化のために、共変性の感覚的な経験を豊かに準備し、それをもとに意識化することが考えられる。Falcade *et al*. (2007)は作図ツールにおいて、図形のある要素のドラッグにより他の要素が変化することが、共変性の理解を促し、関数の観念を捉えることにつながるとしている。実際 Nunokawa & Fukuzawa (2002)の事例では、作図ツールでの頂点のドラッグにより辺の長さや他の点の共変に注意が向けられている。上田 (2009)の実践で、グラフの線上で視点を徐々に動かしていく動的見方が生徒の学習を促し、動的見方を伴うグラフの利用が式の利用のコントロールを与えたこと、また高橋(2002)の実践で表、グラフ、式を利用する場合でも、事象の動きを表すことばを用いることが有効であったことを考慮すると、グラフを図形としてみなすことが必要な場合もある(Zazkis *et al*., 2003) [4] とは言え、その利用において共変性を動的に経験できる環境を準備することも、共変性の意識化という点からは必要となろう。

グラフの動的扱いという意味では、コンピュータの利用があるが、従来は、式の係数とグラフの視覚的特徴の関係を探究する学習が多かった(例えば Kalchman & Case, 1999; 佐藤, 1997)。これに対し、共変性に重点を置いた場合、図３や図４のような環境が考えられる。

図３は表計算ソフトのグラフにスライダーをつけている。スライダーで x の値(■)を学習者自身が動かすと、それに伴って y の値(●)が一定の関数関係を保ちながら動くようになっている。また図４は同様の環境を作図ツールで作っているが、この場合は、x の値を示す点 A を直

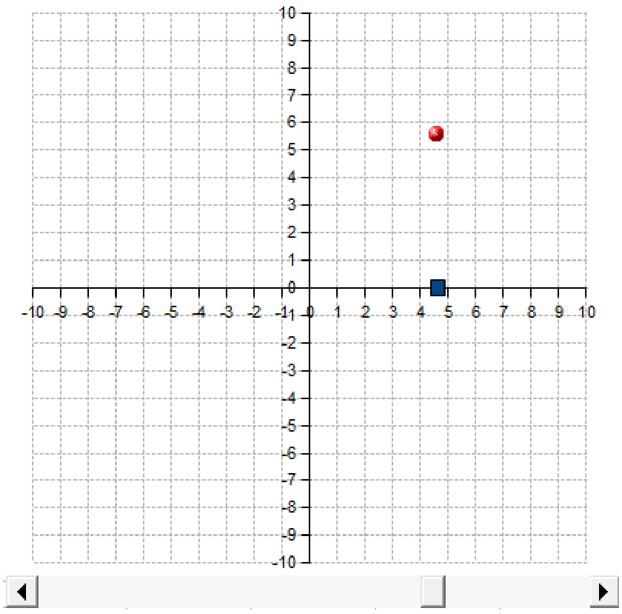

図３　OpenOffice で作成したグラフ

接ドラッグすることが可能であり、「共変のアイデアが…目と手の間の連携を通して経験される」(Falcade et al., 2007, p. 331)と期待されよう。また、点 B の残像を表示するように設定することで、点 A の操作から関数のグラフが生成されるようにもできる。

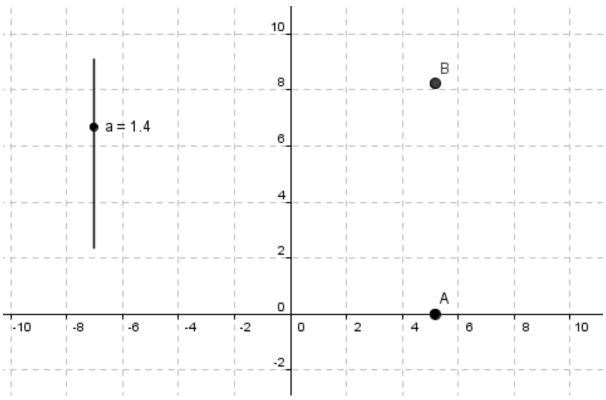

図４　GeoGebra で作成したグラフ(左の縦スライダーは x の係数を変えるためのもの)

Schliemann, Goodrow, & Lara-Roth (2001)は、体育館に作った座標軸の上で、子どもたちがある条件を満たす位置を探して、そこに立つという活動を小学校３年生に対して行っている。多人数の子どもでこれを行うことは、２量の共変性についての身体的な体験と見ることができる。関数的見方の中でも共変性の感覚が失われないようにすることが求められると言えよう。

６．おわりに

２量間の関係、あるいは２量間の対応や共変性を考えてみると、グラフによりその全体的特徴を視覚化することができるとは言え、身の回りの形のようには見えやすくはない。２量があったときに、x と y の値自体を見ることはできても、例えば y=2x+1 という２量間の関係自体を、またその２量が伴って変わること自体を捉えることは容易ではない。感覚的に捉えている共変性などを意識化することで、数量関係に関わる知識をより自由に、自覚的に利用することが可能になると期待される (布川, 1993)。また、共変性を意識することは、第２節で述べてきた、２量に関わる現象を意識することになり、そうした現象に関数などの数量関係の知識を適用しているとの意識にもつながると考えられる。

註および引用文献

1) Slavit (1997)は関数の構造的見方には多様な側面があることを指摘している。

2) 関数の学習に van Hiele の理論を適用することは、既に礒田(1987)によりなされているが、それは方法の対象化をもとにした水準論の解釈に基づくものである。本稿では異なる解釈に基づいた援用を試みることとする。

3) $x \in \Re$ で x が有理数のときは $f(x)=1$、無理数のときは $f(x)=0$ とするような関数、あるいは高木関数のように関数列の極限で定義される関数などは、定義により決まることが明確であり、また他の性質はこの定義から導出される。

4) $y=ax+b$ のグラフを $y=ax$ を y 軸方向に b だけ平行移動したものではなく、x 軸方向に $-(b/a)$だけ平行移動したものとする見方(Chiu *et al.*, 2003)は、こうした側面をよく示している。

Beckmann, A. (2007). Non-linear functions in secondary school of lower qualification level (German Hauptschule). *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4* (2), 251-257.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23,* 247-285.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction*, *19* (2), 213-252.

Elia, I. & Spyrou, P. (2006). How students conceive functions: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3* (2), 256-272.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91* (2), 166-170.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 317-333.

Greer, B. (2007). A sense of proportion for social justice. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 21*. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome21/

林　宏樹. (1994). 状況的認知を視点とした関数の指導についての考察. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文 (未公刊).

林　弘. (2001). 一次関数における学習過程に関する考察：事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して. 上越数学教育研究, *16*, 81-90.

Hines, E., Klanderman, D. B., & Helen, K. (2001). The tabular mode: Not just another way to represent a function. *School Science and Mathematics*, *101* (7), 362-371.

日野圭子. (2009). 中学校比例の授業での生徒の表・式・グラフの内化の様相：表に焦点をあてて. 日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集, 505-510.

Hitt, F. & Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: Constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of functions. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7* (1), 243-260.

礒田正美. (1987). 関数の思考水準とその指導についての研究. 日本数学教育学会誌, *69* (3), 82-92.

Kalchman, M. & Case, R. (1999). Diversifying the curriculum in a mathematics classroom streamed for high-ability learners: A necessity unassumed. *School Science and Mathematics*, *99* (6), 320-329.

桐山眞一. (1999). 中学生における関数の理解に関する研究：一次関数を事例として. 上越数学教育研究, *14*, 61-72.

国立教育政策研究所教育課程研究センター. (2006). 特定の課題に関する調査(算数・数学) 調査結果. 国立教育政策研究所.

草野　収. (1997). 算数における式をよむ活動についての一考察. 上越数学教育研究, *12*, 81-92.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 255-286.

Moritz, J. (2003). Constructing coordinate graphs: Representing corresponding ordered values with variation in two-dimensional space. *Mathematics Education Research Journal*, *15* (3), 226-251.

布川和彦. (1992). 図形の認識から見た van Hiele の水準論. 筑波大学教育学系論集, *16* (2), 139-152.

布川和彦. (1993). van Hiele 理論に対する新たな意味づけ：インフォーマルな知識と発達の最近接領域を手がかりとして. 教育方法学研究, *19*, 37-46.

Nunokawa, K. (1994). Solver's structures of a problem situation and their globalrestructuring. *Journal of Mathematical Behavior*, *13* (3), 275-297.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 325-340.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2* (3), 33-54.

布川和彦．(2008a). 比例的推論を利用した割合の導入の試み．日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集, 957-958.

布川和彦．(2008b). 算数の授業における小学校６年生の問題解決過程についての一考察：初期の意味づけから離れる過程に着目して．数学教育学論究, *90*, 19-39.

布川和彦. (2009). 比例的推論を利用した割合単元の構想と児童の学習過程．上越数学教育研究, *24*, 1-12.

Nunokawa, K. & Fukuzawa, T. (2002). Questions during problem solving with dynamic geometric software and understanding problem situations. *Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part D: Mathematics, Science, and Technology Education*, *12* (1), 31-43.

大滝浩之. (2009). 生徒が数学を創る活動を促す場の設定に関する研究：一次関数の単元構成を通して．上越数学教育研究, *24*, 53-64.

大谷実，中村雅恵.(2004). 比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程：教授実験における教師と児童の談話の質的分析．日本数学教育学会誌, *86* (4), 3-13.

佐藤徳顕. (1997). 高校数学における二次関数の指導に関する研究：教授実験によるシェマの構成過程をもとに．上越数学教育研究，*12*, 105-114.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. (2001). When tables become function table. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4* (pp. 145-152). Utrecht, The Netherlands.

Schliemann, A.D., Goodrow, A. & Lara-Roth, S. (2001). *Functions and Graphs in Third Grade*. Symposium Paper. NCTM 2001 Research Presession, Orlando, FL.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (3), 259-281.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164.

田端輝彦. (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察．日本数学教育学会誌, *85* (12), 3-13.

高橋　薫. (2002). 事象から形式的な表現への過程を重視した一次関数の授業．上越数学教育研究, *17*, 91-102.

高見資宏. (1997). 算数における依存関係を認識する過程に関する研究．上越数学教育研究, *12*, 115-124.

上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察．上越数学教育研究, *24*, 41-52.

van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional. *Cognition and Instruction*, *23* (1), 57-86.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orland, FL: Academic Press.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003) Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 437-450.