上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.11-18.

# アリストテレス的数学観に立つ数学教育学研究の幾つかの方向性

高　橋　　等
上越教育大学

算数・数学教育で扱う数学とは如何なるものかに対する関心は，我々教師にとっても研究者にとっても重大なものである。算数・数学に好意をもっているから算数・数学教育を行うということで充足する向きもあろうけれども，しかし殊に研究を行うことになるとすれば，それが学術研究であれ，実践的研究であれ，数学が如何なるものかに対する見方をもつことは必然であろう。数学を行ったことがあるとしても，その数学が何ものかを知らないのであれば，子どもに算数・数学を課すという謂わば重い仕事を全うすることにならないのではなかろうか。

この研究の目的は，数学の本性に対する見方である数学観が数学教育学研究に影響を及ぼすことを論じ，さらにアリストテレス的数学観に立つことによって数学教育学研究を幾つかに方向付けることである。

この研究を理論的考察によって進める。初めに数学の哲学と数学教育学との関連性を論じ，次いでプラトン主義的数学観とアリストテレス的数学観とを対比的に論ずる。最後にアリストテレス的数学観に立脚したとしての数学教育学の幾つかの方向性を示す。

## １．数学の哲学と数学教育学との関連性

数学の哲学，即ち数学の本性を何と見るか(Dossey,1992)を数学教育学で扱うことが適当かどうかには議論を差し挟む余地があると主張する人がいるかも知れない。しかし，算数・数学教師の数学的知識の形成が数学の哲学に曝され(Cooney et al.,1998)，しかも教師のもつ数学の哲学が数学教育の実践に影響を及ぼす事実(湊&浜田,1994, Cooney et al.,1998)からすれば,数学の哲学が数学教育学と関連することに疑う余地はない。数学の哲学とここまで呼んできたものは Dossey (1992)が philosophy of mathematics と言い表したものである。数学の本性に対する見方を Dossey(1992)は view of mathematics，湊&浜田(1994)は数学観と呼び，Cooney et al. (1998)は belief という語に含めたのである。

数学の哲学をより学術的に位置づけ数学観と一旦区別したとしても，数学の哲学が数学教育学と極めて強く関連する。勿論，この関連という言い方は曖昧であり，数学の哲学を数学基礎論，それはヒルベルトが提示したメタ数学を含む，をもって言う人々からすれば数学教育学と数学の哲学との関連は単純ではない。しかし，湊(1976)が論じたようにメタ数学をも数学教育学に含めて考える立場からすればこの広義な数学の哲学もまた数学教育学に含めることができる。

ところで，1940 年発行の Mathematics Reviews(AMS et al.,1940)の数学の分類では数学史と数学基礎論も項目となっている。Davis&Hersh(1981)は数学とは何かを論ずる際に 1979 年の Mathematics Reviews における

分類を取り上げており，その項目には数学史と伝記，数理論理学と数学基礎論が含まれ，さらには物理学や天文学の分野も含まれている。2003年発行のMathematics Reviews(AMS, 2003)は数学の分類の項目に数学史と伝記,数理論理学と数学基礎論，物理学や天文学，生物学や他の自然科学を含み，さらにMathematics educationという語で数学教育学を含めている。

AMSが数学として分類するものはその項目から見れば広域にわたる。それは数学史や伝記，メタ数学としての数学基礎論，証明を伴うような数学，証明を伴わない数学，数学を使用する他の科学，数学教育学からなり，AMSは数学と関連する研究分野を悉く網羅し，数学に含めようとしているように見える。AMSのこの分類の背景には数学なるものを規定しようというよりは，数学らしきものと関連しそうな分野を何はともあれ数学に含めようとしている意図があるのではないか。

湊(1976)の立場と数学教育学を数学に含めているAMSの分類(AMS, 2003)とは相対するように見える。もし，AMSの分類(AMS, 2003)が正当であるのであれば，極めて柔軟な数学観が流布していると見なければならない。しかし，そうであろうか。実はAMSの分類(AMS, 2003)には数学の哲学という項目がなく，AMSでは数学らしきものによって何かを説明しようとしているものの，自分たちが何者かについては関心がないように見える。

## ２．数学の哲学の二極性

数学の哲学はプラトン主義的かアリストテレス的か(Doosey,1992, 湊&浜田,1994)という二極を根本とする。プラトン主義をDavis& Hersh(1981)は次のように言う:

According to Platonism, mathematical objects are real. Their existence is an objective fact, quite independent of our knowledge of them. Infinite sets, uncountably infinite sets, infinite-dimensional manifolds, space-filling curves—all the members of the mathematical zoo are definite objects, with define properties, some known, many unknown. These objects are, of course, not physical or material. They exist outside the space and time of physical existence. They are immutable—they were not created, and they will not change or disappear. (p.318)

Davis&Hersh(1981)の柴垣他(1986)による和訳書から上記引用の該当箇所を引用しよう：

プラトン主義によれば,数学の諸対象は実在する。それらの存在は客観的事実であって,それについてのわれわれの知識には全く依存しない。無限集合,非加算無限集合,無限次元多様体,空間充満曲線—いわば数学という名の動物園にいる成員はすべて明確な対象であって,定まった諸性質を持ち,そのあるものは知られているが,多くは未知である。これらの対象は,もちろん肉体的なものでなくまた物質的なものでない,それらは肉体的経験の時間と空間の外に存在する。それらは不変である—それらは創造されなかったし,そして変化せず消滅しないだろう。(p.308)

プラトン主義と名付けた数学の本性に対するこの捉えをDossey(1992)ないし湊&浜田(1994)も同様に行っている。

人間の知識を越えた，人間とは関連しない実在としての数学的存在に対するこの思想は原論を支える根本思想となる。原論は唯一絶対の客観的知識の体系として，プラトン主義の支えを受けながら，欧流数学をギリシャ時代から支配している。

しかしながら，プラトン主義は非ユークリッド幾何学によって覆される(Davis&Hersh, 1981)。確かに，プラトン主義による平面の上での幾何学が唯一のものであるという立場は球面ないしは鞍型の上での幾何学によって根底から崩されるのである。Davis&Hersh(1981)

の言う通り形式主義者の立場からはユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学の何れかが真であることは論点ではなくなるものの，プラトン主義に立つ限り，ユークリッド幾何学か非ユークリッド幾何学かの何れか一方を真と見なさなければならない。ここに，プラトン主義の自己崩壊を見て取れる。

Dossey(1992)がプラトン主義と対比させて取り上げ数学の哲学の二極のうちの一つとしたのはアリストテレスの哲学である。Dossey(1992)は次のように言う：

Aristotle´s view of mathematics was not based on a theory of an external, independent, unobservable body of knowledge. Rather it was based on experienced reality, where knowledge is obtained from experimentation, observation, and abstracttion. This view supports the conception that one constructs the relations inherent in given mathematical situation. In Aristotle´s view, the construction of a mathematical idea comes through idealization performed by the mathematician as a result of experience with objects.(p.40)

Dossey(1992)の上記箇所を訳出すると次である：

アリストテレスの数学観は外在的な，独立して存在する，観察不可能な知識体に基礎を置かなかった。逆にそれは知識が実験，観察および抽象化から獲得される経験的な実在性に基礎を置いた。この見方は人が与えられた数学的状況に固有の関係を構成するという着想を支持する。アリストテレスの見方において数学的考えの構成は数学者により遂行される物体を用いた経験の結果としての理想化を通して成る。

アリストテレス的な数学観は現代数学的である。ただし，現代数学を行っているからといって，プラトン主義に立つことは可能であり，そういう場合は多いだろう。

Davis&Hersh(1981)はプラトン主義と並列させて，互いに相容れないものとして形式主義と構成主義とをあげた。Davis&Hersh(1981)によれば形式主義とは如何なる数学的対象も存在せず，数学とは単に公理，定義，定理からなるに過ぎないとする立場である。形式主義に立てば前述したように，数学的存在を信じる必要はなく，数学的言語，記号の運用によってのみ，数学を遂行し得るのである。この場合，ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学との違いも考慮する必要はない。他方で，構成主義とは，Davis&Hersh(1981)によれば，有限な構成によって獲得できるもののみを真の数学と見なす立場であり，無限集合を考慮しない立場である。

現代数学が形式主義によることはHarel&Sowder(2007)による次の記述からも読み取れる：

Another critical difference between Greek mathematics and modern mathematics has to do with *form* versus *content*. In Greek mathematics, the *form* of the proof could not be completely detached from the *content* of the spatial or quantitative context. In contrast, in modern mathematics proof is valid by virtue of its form alone. (p.817)

Harel&Sowder(2007)の上記記述を訳出すると次である：

ギリシャ数学と現代数学とのもう一つの決定的な違いは形式対内容に関係がある。ギリシャ数学では，証明の形式は空間的ないしは量的な文脈の内容から完全には切り離され得なかった。対照的に，現代数学の証明はその形式によってのみ正当である。

Harel&Sowder(2007)がギリシャ数学と呼んでいるものはユークリッド幾何学であるものの，この語にはプラトン主義とアリストテレス的数学観の双方を含めている。ギリシャ数学が

空間的ないしは量的な文脈と完全には切り離されなかったという Harel&Sowder(2007)の見解は，ユークリッド幾何学が全くにプラトン主義に基礎を置くとした Davis&Hersh(1981)の見解と異なる。勿論，我々がユークリッド幾何学における証明を行うとき，具体を考えざるを得ないということであれば Harel&Sowder(2007)の見解はユークリッド幾何学がアリストテレス的な数学観からも解釈されることを示す。経験から理想化された対象を証明するということが避けられないならば，プラトン主義と見える場合であっても，その主義は実際には遂行されていないこととなる。

形式主義はプラトン主義でないという点でアリストテレス的な数学観と同一視できるかといえば慎重にならざるを得ない。Davis&Hersh(1981)はプラトン主義と形式主義との相違を数学的存在を巡る見解の違いとし，数学を行うことに関しては両者の矛盾はないとする。アリストテレス的数学観に立脚するのは構成主義の数学観である。有限な構成とは人間の経験によって触知可能な構成であり，その点では構成主義はアリストテレス的数学観を有する。

さて，証明とアリストテレス的数学観との関連について述べておく。アリストテレス的数学観に立てば，数学において証明をするか否かということは第一の問題点にはならない。勿論,Davis&Hersh(1981)があげる形式主義や構成主義では証明を要するのであるけれども，そもそも知識が実験，観察および抽象化から獲得される経験的な実在性に基礎を置くという根本的な思想には数学的な存在が完全でなければならないという制約はない。プラトン主義では数学的存在は人間界から超越した完全な存在でなければならず，その存在保証である証明が数学的活動の中心である。アリストテレスの数学観では抽象化という活動が数学的活動の中心となり，数学的活動に証明する活動を包含し，証明する活動は数学的活動の一つの特徴となる。

## ３．数学観と数学教育学研究の対象

数学観がプラトン主義的なものからアリストテレス的数学観へと変容して来たかに見えるけれども，現在の数学教育学研究との関連か見ればこれら二極は併存している。先に述べたように，教師のもつ数学観が数学教育実践に影響を及ぼすことから，この二極の数学観を考察することで数学教育学研究の方向性を探ることには意義がある。Dossey(1992)は数学観と数学教育学研究との関連を考察し，数学観が外在的，即ちプラトン主義的な数学観であるか，内在的，即ちアリストテレス的な数学観であるか，によって数学教育学研究を分類している。ここでは，Dossey(1992)の論を考察しながら数学教育学研究の方向性を論じていこう。

### 3.1. 指導法の研究に対して

Dossey(1992)は数学観が外在的である場合の数学教育学研究の一つに指導法の研究があるとして次のように述べる：

The work of two groups of researchers treats mathematics as an externally existing, established body of conceptions, facts, principles, and skills available in syllabi and curricular materials. The work of the first group of researchers adopting the external view focuses on assisting teachers and schools to be more successful in conveying this knowledge to children. (p.43)

Dossey(1992)の上記記述を訳出しよう：

研究者の二つの集団の研究は，外在的に存在し教育細目と教育課程における教材に利用できる概念，事実，原理そして技能の固まりとして確立されたもの

として数学を扱う。外在的な見方を採用する第一の研究者の集団の研究は教師および学校がこの知識を子どもたちに伝達することに一層成功的になるように支援することに焦点を当てる。

さらにDossey(1992)は次のように言う：

Studies investigating the role of teachers in mathematics classrooms commonly focus on the actions and instructional methods of the teachers rather than on the mathematics being thought or the methods by which that mathematics is being learned. (p.43)

Dossey(1992)によるこの箇所を訳出したものは次である：

数学授業における教師の役割を調査している研究は，通常，教えられる数学あるいは数学が学習される方法というよりは寧ろ教師の活動と指導法に焦点を当てる。

Dossey(1992)による指導法の研究に対するこの痛烈ともとれる指摘は，指導法の研究が数学を伝達する，それも効果的に伝達する方法の研究という性格を少なからず帯びているとの考察によるものであろう。確かに，もし指導法の研究が数学的知識を効果的に伝達するための研究に特化するのであれば，それらの研究そのものもさることながら，湊&浜田(1994)が指摘するようにその種の指導法を選択する教師のもつ数学観もまたプラトン主義的なものである。さらに，教師が権威的立場にあって，単に教材を教えることが指導法であるならば，教師も子どもも没個的なものになるだろう。

湊(2002)による授業の三型論では講義型ないし問答型の授業よりも洗練されたものとして自力解決・討論型の授業をあげている。湊(2002)は講義型と問答型の授業は教師のプラトン主義的数学観に対応し，自力解決・討論型の授業はアリストテレス的数学観に対応するとする。Dossey(1992)は欧米における指導法の研究の多くがプラトン主義的数学観により効果的に数学を教えることに偏ったものと判断したのかも知れない。しかしながら，湊(2002)の論は指導法が数学観によって選択可能なことを示唆しており，研究において十分な哲学的な考察があれば，それに応じた指導法を提示することができることを示唆している。十分な哲学的考察を行い，研究における立場を明確にすること，このことが指導法の研究に求められることとなる。

Dossey(1992)，湊&浜田(1994)，および湊(2002)が述べるように，プラトン主義的な数学観では子どもの主体的な学習を保証できない。十分な哲学的考察と先に述べたけれども，この哲学的考察によって確立する立場とは，大きくはアリストテレス的な数学観に依って立つものでなければならない。

さて，依って立つ数学観を明確にしたとして，実践可能な指導法とは，何れにしてもその数学観と対応する範囲内での指導法ということになる。一般化可能な，普遍的な指導法はあり得ない。もしも普遍的な指導法があり得るとすれば，普遍的な数学観がそれを支持するのでなければならない。普遍的な数学観などなく，数学観に二極があるのは先に述べた通りである。

指導法の研究が複雑なのは，それが教師を対象とした研究を避けられないからである。指導法の研究は教師の数学観を無視するか，或いは教師の数学観がその指導法に対応する数学観に当然に巻き込まれるとして進められてきたのかも知れない。しかし，各々の教師が主体的に数学観をもつことは必然であり，それ故に指導法の選択が生ずるのである。

### 3.2. 教材論に対して

Dossey(1992)は，教えられる数学，即ち教

材についての研究をプラトン主義的数学観を有する研究に含めなかった。しかし，教材論はその立脚する数学観によって左右される研究である。教材を一応，教育目標達成のための文化的素材であるとした上で，教育目標は価値観に左右される

さて，数学を数学的言語・記号に表象させざるを得ないような高度に抽象化された姿とその本質の姿である数学的構造という二視点によって捉えることにしよう。数学教育現代化は数学的構造の表象を翻案することを主とし，数学的構造そのものに対しては，一切，手を加えなかった運動なのである。数学教育現代化の思想を純粋に推進する授業では，表象は子どもの認知様式に合わせて翻案させても，数学的構造としてはそのままである教材を子どもに課していたことになる。ここに，プラトン主義的数学観とアリストテレス的数学観との中間にある数学観を見て取ることができる。

現代化当時の Bruner,J.S.(例えば，Bruner,1966)や Dienes,Z.P.(例えば，Dienes,1977)がプラトン主義者であったか否かということをここで論ずるつもりはないし，それはここでは大きな問題ではない。しかし，子どもの活動を中心に据えるように見えても，認知様式に応じて数学的構造がそのままに心的に構成されると見なす立場は，結局のところ数学的構造の普遍性を力説する立場であり，人間の知的構造の構成が数学的構造の構成をもって成るという立場なのである。この立場は Piaget,J.(例えば，Piaget,1960)の立場でもある。

勿論，数学が人間の活動によって構成されるとする立場はアリストテレス的数学観に影響を受けているのであろうけれども，記号的表象から映像的表象や活動的表象への翻案による教材化を行い，それらの教材によって，例えばゲームを行えば子どもが知的に数学的構造を構成し得ると見なすことが適切かどうかは慎重に検討されてよいことであろう。Dines,Z.P.と BrunerJ.S.とによる実験(例えば，Dienes,1977)が必ずしも成功的でなかったことはこのことを物語る。

現代化の流れに与しなかった系譜に Freudenthal 派(例えば，Gravemeijer,1997; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)がある。Freudenthal 派では数学を人間の活動によって形成されるものと見なし，多くの場合，現実世界の場面からの数学化をもってその活動であるとする。勿論，数学的言語・記号を用いることが現実である場合もある。Freudenthal 派の流れを汲む MiC による教科書(例えば，MiC,1998)では殆どが挿絵の現実世界が掲載され，子どもはそこからの数学化を目指して活動することになる。Freudenthal 派の言う数学化は心的構成物を形式的数学に向けて変容させることによって成るものであり，その理論における教材化は数学的構造の翻案による教材化と一線を画した，現実世界の中での数学的関係の教材化である。

心的構成物を形式的数学に向けて変容させると述べたけれども，Freudenthal 派では可能な限りは形式的数学の形成を目指している。Freudenthal 派による形式的数学の設定は Bruner,J.S.や Dienes,Z.P.の様に数学的構造，それも代数的構造に束縛はされていないものの，現象学的な文脈を保ちながらも最終的にはできる限り数学的言語，記号を用いた数学を目指しているのである。とは言っても Freudenthal 派による現実世界や文脈の重要視は数学教育の現代化から離れ独自に発展させたものであり，その教材を支える立場はプラトン主義とは相反する。

ところで Freudenthal 派からの影響のないところで我が国の場合であっても現実世界や文脈を重視した時期があったことは周知である。緑表紙と呼ばれた小学尋常算術，青(水色)表紙と呼ばれたカズノホンないし初等科算数の文章題は今もって新鮮である。尤も，尋常

小学算術，カズノホンないし初等科算数の教材には関数的考えと関連するものも多く，そこには数学教育改良運動からの影響がある。

アリストテレス的数学観が支える教材開発のもう一つの可能性は Johnson,M.(例えば，Johnson,1991)，Lakoff,G.(例えば，Lakoff,1993) および Núñez,R.E.(例えば，Núñez,2000)による数学が身体的構造からの比喩によるという視点である。Núñez(2000)によれば比喩とは起点領域から目標領域に向かう射影である。この射影においてイメージ・スキーマという知的構成物が起点領域と目標領域とに共通の構造を与える。Johnson,M.，Lakoff,G. および Núñez,R.E.の理論を延長すれば，数学的構造が Bruner,J.S.や Dienes,Z.P の述べるような代数的構造を反映したものでなくともよいことになる。高橋(1996)，および Takahashi(1998)は左右対称である身体的構造からのイメージ・スキーマに基づく教材として正の数・負の数の計算における数直線の使用の正当性をあげた。数直線を利用した正の数・負の数の計算は代数的な構造を反映しないものであるけれども，凡そ人間が考えやすい関係性をもつのである。

### 3.3. 学習者個人および集団の研究に対して

先にプラトン主義的な数学観をもつ研究として指導法の研究をあげたけれども，Dossey(1992)は内在的な数学観，これをアリストテレス的と言い換えてもよいが，を有する研究として，三つあげている。一つ目は，個人的に内的に数学を構成する過程に焦点を当てた研究であり，数学教育学で言う急進的構成主義者による研究に代表されるものである。二つ目は，これも個人的な内的な数学の構成を扱う研究だが，認知的な手続きとスキーマといった心理学的モデルの形成を記述する研究である。三つ目は，数学的知識を社会的相互作用の結果と見なす研究である。

急進的構成主義者による研究と認知論者による研究は，同じく個人を対象としていながら異なるものとして Dossey(1992)は区別している。急進的構成主義者が Piaget,J.を源流とし，認知論者の理論が情報処理理論と関連することを考慮すればこれら二つの学派は相容れないのであろう。

しかしながら，急進的構成主義と認知論との双方にもない視点がある。それは同じく個人 personal を冠する Polanyi(1958)の影響を受けた研究である。Polanyi(1958)の理論によれば人間の知識形成には暗黙性が関与し，それ故，全人格的な形成を伴いながら知識が形成されていく。その暗黙性は所謂イメージや情意などを含むものである。この点で Polanyi(1958)の理論はアリストテレス的数学観を有する。Polanyi(1958)の言う個人 personal とは字義通りのものではなく，佐藤(1980)によれば人間主体が関わるという意味である。

数学的知識を相互作用の結果と見なすとしても，その理論と Polanyi(1958)とは矛盾しない。Polanyi(1958)は学術的知識を個人が鎖状に結び付いた状態であると論じており，この点からも Polanyi(1958)の理論は個別の個人をのみ対象としているわけではなく，相互作用に関与するものなのである。

## 4. 結語

この研究では Dossey(1992)を踏襲しながら，アリストテレス的数学観に基づく数学教育学の方向性を論じてきた。ところで，ここでの論では指導法の研究に対して Dossey(1992)を支持し，多少は批判的な考察をしたかも知れない。しかしながら，それは指導法の研究の重要性を承知しているつもりであるからであり，指導法の研究が教師を対象とする研究を避けて通れないという葛藤を含む分野であることを承知しているからである。教師の価値観に係る研究を考慮しつつ，指導法の研究の展望を開くことも期したい。

文献

AMS et al.(1940). Mathematical Reviews,1.

AMS. (2003). Mathematical Reviews, 35.

Bruner,J.S., 田浦武雄&水越敏行訳(1966). 教授理論の建設. 黎明書房.

Cooney,T., Shealy, B. Arvold, B.(1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29, 3*, 306-333.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

Davis,P. & Hersh,R. 柴垣和三雄他訳.(1986). 数学的経験. 森北出版.

Dienes,Z.P., 沢村昂一訳(1977). 算数・数学学習の実験的研究. 新数社.

Dossey, J. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.39-48).New York: Macmillan Publ. Co.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective (pp.315-345). UK: Psychology Press.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.805-842). U.S.A.: Information Publ. Inc.

Johnson,M.,菅野盾樹&中村雅之訳(1991).心のなかの身体.紀伊國屋書店.

Lakoff,G., 池上嘉彦&河上誓作他訳(1993). 認知意味論. 紀伊國屋書店.

MiC.(1998).Teacher resource and implementtation guide. Chicago: Britanica.

湊三郎. (1976). 数学教育学, および数学教育学に対する数学の位置について. 日本教科教育学会誌, 1, 1, 62-72.

湊三郎&浜田真.(1994).プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか―数学観と数学カリキュラム論との接点の存在―. 日本数学教育学会誌, 76, 3, 2-8.

湊三郎. (2002). 授業三型論に基づく教師の数学的資質. 上越数学教育研究, 17, 1-20.

Núñez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 3-22). Hiroshima, Japan: Hiroshima University.

Piaget,J., 波多野完治&滝沢武久訳(1960). 知能の心理学.みすず書房.

Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The Univ. of Chicago press.

Polanyi,M. 佐藤敬三訳. (1980). 暗黙知の次元　言語から非言語へ. 紀伊國屋書店.

高橋等 (1996). 数学的知識に関する中学生の持つ比喩の様相. 筑波数学教育研究,15, 35-44.

Takahashi, H. (1998). Some characters of metaphorical knowledge of several materials: A case of a junior high school student. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 17*, 241-248.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.