上越数学教育研究，第25号，上越教育大学数学教室，2010年，pp.39-50.

割合単元において子どもが知識として形成する固執 model の発達と役割

富田　一志
上越教育大学大学院修士課程 2 年

１．はじめに

式を用いて割合の問題を解く子どもがいたとして，その子どもは割合の考えを理解し用いているのだろうか。

割合単元の学習は，整数の乗法及び除法に数としての小数の難しさが絡み，整数の乗法及び除法から大きな飛躍がある。また割合単元の学習では二つの数量の関係を扱うが故に，子どもが問題場面を把握すること自体が容易ではない。筆者はこのような子どもの実態を受け，具体物による活動の場を用意し授業を行ってきたつもりであるが，その困難を解消するまでには至っていない。その理由の一つに，子どもの活動を促す一方で最終的には言葉の式や数直線を用いた立式の仕方を教え込んでいたことがある。結果，経験から構成されてきた知識と教え込まれた知識とが乖離してしまった。子ども自ら構成してきた知識と新たに形成する知識とを結び付けることが望まれる。そうした試みに資料を提供するために，子ども自身が自らの知識を土台として形式化していく様態を緻密に検討する必要があるだろう。

本研究の目的は，子どもが割合単元の問題を解決していく中で，自らの数学的知識を生かしながら新たな知識を形成し形式化していく過程を明らかにすることである。

2．小数の乗法及び除法に関する先行研究

2.1.整数の除法の学習に関する先行研究

整数の等分除と包含除とを比較すると，様々な場面や書式をもつ問題の解決においては等分除の方が難しいと指摘されている（高橋，1991）。熊谷（1998）は，子どもが整数の等分除と包含除のそれぞれの問題に取り組む際の操作の違いや，その操作の違いによる計算方略の発達の相違を示す中で，子どもが同じ大きさの単位で全体がつくられていることを意識させることが包含除と等分除の共通の視点になると述べた。吉田（1999）は，整数の包含除の場面で，子どもが操作としての配る，取り除くといった活動と，乗法と除法という演算決定との間で混乱をもつことを示している。

2.2.小数の乗法に関する先行研究

問題場面の数値が小数に変わることによる乗法の意味の拡張について，中村（1996）は，乗数が整数のときには同数累加で捉え，乗数が小数になった場合には「割合による意味づけ」で捉えるという立場から，数直線を用いた指導を提案している。中村（1996）は，数量を数直線で表すことによって，数量の関係を比例関係で捉えられることを述べている。しかし，数直線から 2 つの数量の比例関係を読み取ることができない子どもや，除法の場面で数直線が必ずしも有効でない子どもも存在する（白井ら，1997）。

高橋（2000）は，小数の乗法の学習において，子どもが同数累加の考えを乗法的な見方

へと変容させていくきっかけとして，0.1 を単位としたり，2 量の単位を取り直したりすることが必要であると述べている。高橋（2000）は，子どもが乗法的な見方をすることによって，整数の乗法の累加の考えに基づくテープ模型を繋げる活動を数直線を洗練させていく活動に移行させていった過程を示している。

2.3.同種の割合の導入を扱った研究

田端（2003）は，同種の割合の導入場面について，異なる割合を比較するのではなく，同じ割合を考える問題を提案した。早川（2003）や溝口（2006）は，同じ割合をつくることを支持し，数表を用いて同じ割合をつくることで，割合の前提となる比例を意識させ，子どもが加法方略による解決から倍の考えによる解決に移行するとした。特に溝口（2006）は，子どもの思考や解法の変容には，問題の数値や表記に対して個々が行う意味付けが影響を与えていたことや，表記の意味づけにおいて数表では柔軟に解決するに至らない子どもの存在を指摘した。

2.4.割合と比の三用法に関する研究

高橋（2003）は，現実場面をもつ小数の乗法及び除法の問題場面において，子どもは解決のための単位を様々に設定することによる場に応じた model を様々な単位を 1 と見なす割合の考えに基づく model へと発展させることを明らかにした。高橋（2003）によれば，子どもが用いたインフォーマルな単位は，比の三用法というフォーマルな知識へと統合されていった。

以上のことから，割合単元に関して，子どもが自ら土台となる知識を生かし知識を形式化していくためには，(1) 子どもが整数や小数の乗法及び除法の知識に基づきながら，解決のために用いる単位や，それと対になる単位量をどのように形成し使用していくのか，(2) 単位量を利用していくことにより，比例の考えがどのように発達し，乗法及び包含除，等分除が割合の考えで統合され，比の三用法の知識へと形式化されていくのか，(3) 自らの知識を図に表していく活動が，子どもの知識形成の過程とともにどのように発達し，知識形成への役割を果たしていくのか，について考える必要がある。

3. 子どもの活動を中心とした視点

3.1.RME 理論における model

日常性の文脈からカリキュラムや教材をつくる一派として Freudenthal 派が提唱する現実的数学教育(Realistic Mathematic Education 略称 RME）がある（高橋，2003)。子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し算数や数学を経験し、知識を構成することを Freudenthal 派は目指している。

Gravemeijer（1997）は，インフォーマルな知識が抽象的な数学的知識へと向かうための起点であるべきだとする，model の自己発達という RME の鍵となる原理を示した。子どもにとって身近な状況の model（model of the situation 以下 model-of と呼ぶ）は，子ども自ら活動することで構成される。この model が数学的見地からの方略に焦点づけられることによって，数学的推論に向かう model（model for mathematical reasoning 以下 model-for と呼ぶ）へと発達する。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，model-of から model-for への移行を単一的な転換ではなく局所的かつ連続的なものと見なした。教授-学習過程の中で何が model-of, 或いは何が model-for であるかについては，その都度子どもが対峙する文脈，領域，機能に依存する。この視点は，model 自体の発達と見る Gravemeijer（1997）とは異なるものである。

本研究では，児童の活動を分析する視点として，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）

が示す枠組みを採択する。この枠組みを採択したのは，知識の形成過程を局所的に捉えることで，model-of から model-for への移行に新たな視点が得られると考えたからである。

3.2.割合単元における model の自己発達

高橋（2003）の知見をもとに，割合単元における model の自己発達の過程を仮定する。割合単元の model-of は，包含除と等分除の文脈の影響を受けつつネットワークとして形成され，文脈は形式化に伴い薄まっていく。包含除の場に応じた model-of は，乗法の逆として「割合（倍）を求めること」として意味づけされ，包含除における数学的な関係を推測するための model-of へと発達していく。等分除の model-of は，基準量と割合に当たる量との関係について，多様な構成単位の形成を伴いながら，整数の乗法と包含除の model によって形成されていく。

場に応じて基準となる数を柔軟に捉え，様々な単位を 1 と見なすことによって，包含除，等分除を用いた model-of が互いの問題場面でも用いられるようになる。包含除や等分除の関係を相互に活用しながら式を展開する活動が，基準量を 1 とみたり 100 とみたりする割合単元における model-for へと繋がっていくと考える。

4. 教授実験について

4.1.教授実験の構想

教授実験では，絵図を用いて割合の文脈を描写する活動を設定した。児童が自由な単位を用いることができるとともに，用いられる絵図が，Van den Heuvel-Panhuizen(2003) が示すように，割合の文脈を多様に説明する強力な道具になると考えたためである。

教授実験で扱う問題は四つの内容に分けて構成した。第 1～5 時は，児童が割合の文脈を帯図などの絵図を使って記述する内容である。第 6～14 時は，割合の第一用法に関して，現実場面から出発する問題場面を形式化する内容である。第 15～17 時は，割合の第二，第三用法に関して，現実場面から出発する問題場面を形式化する内容である。第 18～20 時は，割合の文脈を捉えるために児童が用いる帯図を円グラフや帯グラフに形式化する内容である。

4.2.教授実験の方法

教授実験は，新潟県公立M小学校 5 年生 5 名を対象に，2009 年 6 月下旬から 7 月にかけて計 20 時間実施した。本稿で報告するのは，Aiko の活動である。毎時間の授業は，ビデオカメラ 5 台によって記録した。授業は各 1 時間程度のものを放課後に実施した。対象児童の抽出は学級担任に一任した。算数の学習に積極的に取り組み，会話などから思考過程が見えやすい児童を抽出していただいた。

5. 子どもの活動の解釈と考察

5.1.Aiko の活動の実際と解釈

1 時間目「**K 小学校には大きな体育館があります。その体育館で 3 つのイベントが開かれました。それぞれのイベントに対して，どのくらいお客さんが集まりそうですか。**」で，Aiko は，出演者と観客を細かく描くと，「3 万人くらい」と記述した（図 1）。この図で示された体育館の混み具合は，実際の文脈そのままで描写された model-of である。

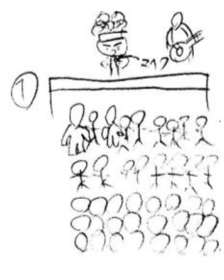


図 1　Aiko の図

第 2 時～4 時は，A と B の蔟（蚕が繭をつくる巣）について栄繭の様子を実際の映像で見せ，混み具合の比較を行った。Aiko はまず A と B の繭を数え, その数値を直接比較する model-of を形成することで解決を行った。

3 時間目の最初に，Aiko は A と B それぞれの蔟について，繭の数と空き部屋で構成された図を描いた（図 2)。Aiko は，蔟の混み具合という状況を「繭の数＋空き部屋」で表現することで，自身が接する文脈の意味を図に表わし説明しようとしている。このような model を本稿では，状況を記述するための model，と呼ぶ。状況を記述するための model は，状況から関係を取り出した model-for と比べた model-of であり，一層文脈依存で解決のための方略や見方とは直接関係をもたない。また，Aiko にとって学習段階の比較的初期，すなわち困難に接した際に現れる model である。

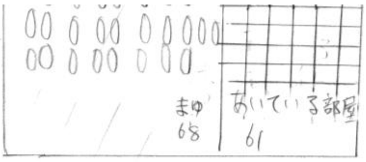


図 2　Aiko が描いた図

次に Aiko は，A の蔟について繭の数から空いている部屋数を引くことで混み具合を記述する。このような model-of を以降引き算 model-of と呼ぶ。その後 Aiko は引き算 model-of を用い，A と B の蔟の混み具合について，空いている部屋と繭の数を加えた数値をつくり，その数値から蚕の数を引く計算を行った。Aiko は，「繭の数－空いている部屋数」という引き算 model-of を反省的に振り返り，「(空き部屋+繭）－蚕の数」という引き算 model-of という混み具合を表現する model を形成した。

教師が，空いている部屋と動く蚕の様子をベルトのように書くことができないか問うことで，Aiko は，細長いベルトの中に蚕を描いた（図 3)。混み具合の描写は文脈とやや離れた model-of として現れるが，この model は状況を記述するための model である。なお，この時点で上のような図を帯図と呼ぶことを Aiko と確認した。

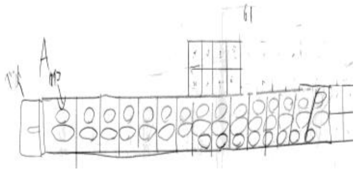


図 3　Aiko が描いた図

4 時間目に，教師が一部屋に一匹蚕が栄繭することを告げると，状況を記述するための model に上下 2 列の空き部屋が加わる (図 4)。

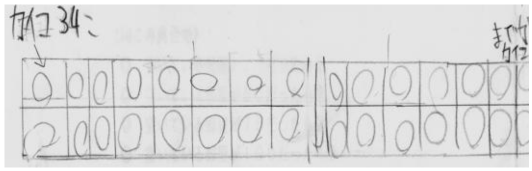


図 4　Aiko が描いた図

Aiko は 2 を基準とした model-of を形成した。Aiko の発話「にーしーろーやーと。」から，この 2 を基準とした model-of は，数値を数えるために Aiko が親しみ形成してきた model であると推察する。Aiko は蚕 2 匹を解決のための単位に設定し，累加の操作で空き部屋全体の数を構成しようとしているのであり，2 を基準とした model-of は包含除 model-of である。ここで，model は状況を説明するための model から空き部屋全体に対して蚕が占める占有の状況を示す model となった。本稿ではこの model を，占有を示す model，と呼ぶ。Aiko にとって占有を示す model は，解決のための単位を累加し全体を構成する操作から現れる。

「問題 3：A と B の蔟について，数字を使って考えるとどうなりますか？」で，Aiko は異なる全体量で同じ混み具合を表現する際，1/2model-of を形成することで解決を行った（図 5)。1/2model-of は，加法的特徴と乗法的特徴の両方を有する Aiko にとって馴染み深い model であるが，Aiko は，この 1/2model-of が適用可能な文脈で課題を解決することができている。また，A の蔟は 1/2model-of，B

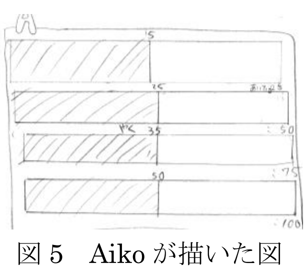


図 5　Aiko が描いた図

の族は「半分の半分」という 1/2model-of を 2 回用いるという発見が Aiko の活動を促進した。この時 A の蔟の帯図から B の蔟の帯図へと model-of は変容しており，1/2model-of で示された帯図は，同様の割合を描写するため文脈から離れた形で現れた占有を示す model である。

5 時間目の問題 1 において，Aiko は 2 つのテレビ番組の人気度を別の帯図に記述した。Aiko は，ここでも 1/2model-of を用いて解決を行っている。人気度を求める文脈においても 1/2model-of を用いているのであり，4 時間目の model が変容していると考えられる。

問題 2 で，23 人に対する 2 人と同じ人気度で帯図を書くことを促すと，Aiko は 100 人中の人気度について，視覚的に判断し 87 人とした（図 6）。これは，占有を示す帯図の役割が翻って用いられているためである。しかし帯図で視覚的には同様の人気度を描写することはできても，一方の数値は 2 人のままである。これは，解決のための単位を適切に設定することができないからであり，Aiko が 1/2model-of と引き算 model-of に固執しているからである。

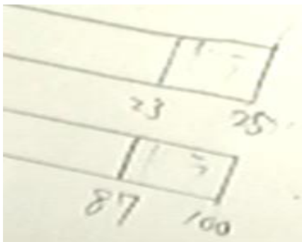


図 6　Aiko が描いた図

問題 3 で，問題 2 と同様の人気度で 100% の帯図をつくる際，Aiko がドラえもんの人数が 8 人であることに到達した直接のきっかけは，全体 25 の帯図が 4 つ並んで 100 になると教師が例示したことであった。5 時間目の問題は 1/2model-of を用いることができないものであった。1/2model-of に固執し困難をきたす Aiko にとって，累加の操作を具体的に示し，乗法としての包含除 model-of を考えさせることは有効であった。

7 時間目「**A 工場には 8.4kg の砂糖があります。一袋に 0.6 ㎏ずつ入れると何袋分砂糖を入れることができますか。**」において，Aiko は状況を記述するための model を描き，問題の題意を掴む。そこから 8.4÷0.6 の立式へ跳躍するのだが解決には至らなかった。次に，Aiko は，0.6kg を解決のための単位に設定し，乗法の式 0.6×14 を試す。Aiko は除法の式と乗法の式を比較しながら包含除 model-of を形成した。Aiko は式による解決を行った後，帯図を描いた（図 7）。帯図は，Aiko が 0.6kg を解決のための単位としながら 2 を基準とする model-of を形成し描いたものである。3 時間目同様，2 を基準とする model-of は Aiko の経験から形成されてきた model なので，包含除 model-of と結びつきやすい。

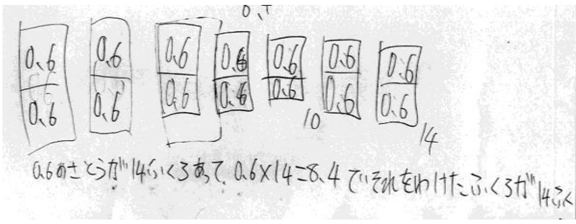


図 7　Aiko が描いた図

8 時間目の問題 1「**山田さんの幅とびの記録 2.4m をもとにしたとき，佐藤先生の記録 7.2m は何倍の長さになりますか。**」で，Aiko は固執 model である引き算 model-of を形成し，7.2－2.4 という式を用いた解決を行った（図 8）。その後 model は状況を記述する model まで逆行するが，級友 Keiko とのやりとりから，2.4 を解決のための単位とした包含除 model-of を形成し，式 2.4×3＝7.2 を用いた解決を行った。その後描いた絵図は棒グラフであるが，これは 3 倍という割合を確認するための図として形成された model-of である（図 9）。

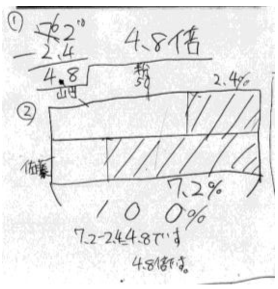


図 8　Aiko が描いた図

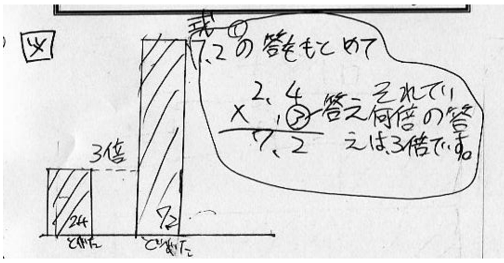


図 9　Aiko が描いた図

問題 2「**山田さんの幅とびの記録 2.4mをもとにしたとき，田中さんの記録 1.8mは何倍の長さになりますか。**」で，Aiko は問題 1 と同様 2.4×（　）＝1.8 という包含除 model-of を用いた解決を行おうとした。これは 8 時間目問題 1 の model の発達であると捉えることができるが, Aiko にとって積が被乗数より小さくなるかけ算には抵抗があったようである。この後，乗法で解決に至らない Aiko は引き算 model-of を用いた解決 2.4－1.8＝0.6 の計算をした。その後に描いた絵図は，8 時間目問題 1 の状況を記述する model に固執したものであった。

9 時間目「**2.5mで 400 円のリボンがあります。このリボンを 3m 買うには代金をいくら用意すればいいでしょうか。**」で，Aiko は 1/2model-of に固執した活動を行った。半分の長さを調べることに活動の中心があったため，Aiko は解決に至ることができなかった。しかしその最中にも Aiko は，帯図に現れた単位量こそ不明だが素朴な等分除 model-of を考えようとしたり，0.5m あたり 50 円とする包含徐 model-of で解答を予想したりしている（図 10）。

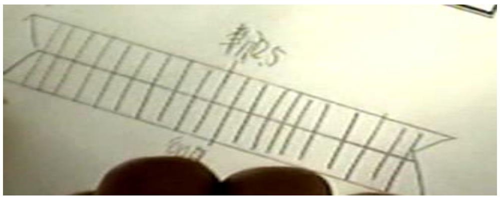


図 10　Aiko が描いた図

Aiko が 0.5m あたり 80 円を解決のための単位として受け入れ, 包含除 model-of を形成し 6 個ビルドアップする式 80 円×6＝480 円を行ったのは，級友 Shousuke らの説明を受けてからであった。

10 時間目「**2.4ℓと 3.2ℓの灯油があります。3.2ℓの灯油をもとにすると，2.4ℓの灯油は何倍ですか。**」で，Aiko は数値を用いた四則計算を一通り試し, 引き算 model-of を用いた解決 3.2－2.4 を解答とした。これは，Aiko が引き算 model-of に固執した解決を行っているからである。

次に Aiko が描いた帯図は，全体量を 4.5 に設定した帯図である（図 11）。

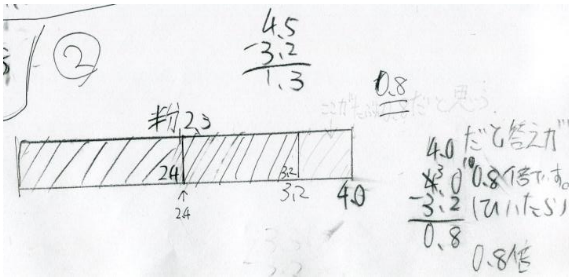


図 11　Aiko が描いた図

これは蚕の蔟の混み具合に関して，状況を記述するために用いる，仮の全体量を設定し 2 量を比較する model-of への逆行と考える。また, Aiko は状況を把握するために固執 model である 1/2model-of を形成している。これらは，割合の困難な文脈に接した際の Aiko の特徴的な姿であると考える。

Aiko は，筆算の記述部分に①，帯図の記述部分に②と記述した。筆算の model と帯図の model は Aiko にとって心的形成物として別々なものであり，その関係は強いとは言えない。Aiko は帯図の基準量を 4.0 と置き直すのであり，筆算に帯図の解決を一致させようとしている。Aiko は，それまでの算数学習の経験から，式による解決に一番の信頼を寄せている。RME では，現実的文脈から知識形成する過程で式への形式化が目指されるが, Aiko は式の解決を最優先し意味を後付けしようとする。このこと故，式と帯図の関連が希薄になっている。

教師は Aiko がとった差 0.8 を取り上げながら, 3.2 と 2.4 から 0.8 ずつとっていく帯図を描いた Shousuke の解決を示した。そこから帯図から視覚的に捉えやすい分数の解決を促すと，Aiko は 0.8 の部分に着目しながら 3/4 と答えた。これは，帯図から分数で割合を考える際に視覚的に捉えやすいことに起因している。帯図は割合を推測したり概算したりするための用いられる役割をもち，本稿ではこの model の役割を, 割合を推測するための model，と呼ぶ。

11 時間目「**12mの赤いテープと 80mの青いテープがあります。青いテープをもとにすると赤いテープは何倍ですか。**」で，Aiko は引き算 model-of に依存した解決に他の model での解決を混在させ始めた。Aiko は, 状況を記述するために仮の全体量 100 を設定し，20 とって 80m とした。次に，引き算 model-of を形成し 80 と 12 の差を考えようとした。その差を 3 等分し，不完全ながら全体 100 を 6 つの部分に等分するように縦線を引き, 等分除 model-of を用いて 4/6 倍と答えた。Aiko は, 解決のための単位を数値でとることはできないものの，帯図では視覚的に単位で全体を構成する操作を繰り返していた。帯図は，解決のための単位を考えるための道具としての役割を果たし始めている。また，固執 model である 80－12 は，単位を考える手がかりとしての役割を持ち始める。

Aiko の帯図で示された最初の部分は 12m であり，それが 2 つ 3 つと累加されていくことが教師によって告げられると，Aiko は 24＋12，36＋12，48＋12 を筆算することで，12 で累加されたものが 80 や 100 にならないことに気付いた。部分量をボトムアップしながら累加していく活動から適切な全体量を帯図に記述することとなったのであり，状況を記述するための model が占有を示す model に発達した。

発表場面で，級友 Hideo が形成した 4m を単位当たり量とする乗法 model が紹介された。引き算 model-of に固執し用いていた Aiko は，Hideo の乗法 model に接近し，任意の単位当たり量を設定する方略において Hideo の影響を受けたといえる（図 12）。

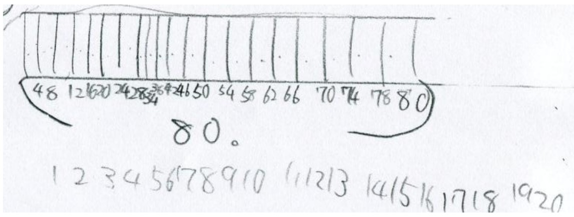


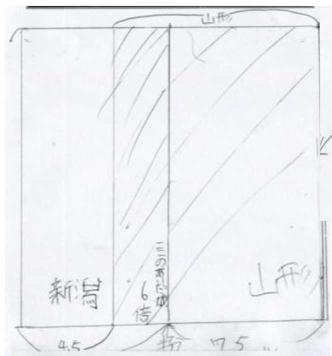
図 12　Aiko が描いた図

Aiko が固執 model を用いた解決から，解決のための単位を設定することに視点を変更するためには, 友人との相互作用が欠かせない。

12～14 時間目の問題は,「**2.6kg の新潟県産の米と 6.5kg の山形県産の米があります。山形県産の米をもとにすると，新潟県産の米は何倍になりますか。**」であった。

Aiko は，最初に状況を記述するための model を形成し，新潟と山形の米の量をそのまま加えただけの図を描いた。

次に Aiko は，米の重さを長さに置き換えると，1/2model-of や引き算 model-of を用いた絵図に model を発達させた（図 13）。



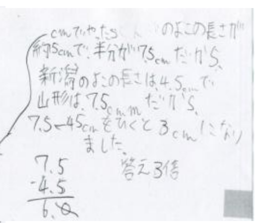


図 13
Aiko が描いた図

以前に形成した蔟の混み具合は，状況を記述するための model や引き算 model-of によって形成されたものだが，困難な割合の文脈に即した際の Aiko の特徴的な model の逆行と固執がここでも起こっている。

長さを用いた解決を終えると，Aiko はすぐに帯図を描き始めた。Aiko は差による model-of や 1/2 を基準とした model-of を帯図の目盛りを 10 等分に増やすことによって，等分除 model-of へと発達させた（図 14）。

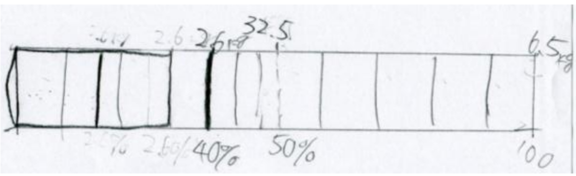


図 14　Aiko が描いた図

Aiko は，1/2model-of に加えて，Hideo の等分除 model-of を援用し，10%を解決のための単位に設定している。Aiko は，帯図に示した 1/2 の model-of について 32.5（ママ）と付け加えるが，このことが 2.6 ㎏を正しく帯図に表現することに役立っている。Aiko は，訂正した 2.6kg に 40%と書き，半分を示す点線の下に 50%と書いた。帯図の視覚的分かりやすさが 40%の記述に効果をもたらしている。帯図は割合を推測するための model として役割を果たしている。

Aiko は包含除 model-of を用いて，解決のための単位を考え始めた。最初は，40%から 8 の段を連想し 8 の倍数をビルドアップした。しかし解決のための単位 8kg では 6.5kg をつくれないことが分かると解決を断念した。

13 時間目では，Aiko は 6.5 ㎏を 100%と基準に置いた帯図から書き始めた。1/2model-of を用いて帯図の半分の箇所に線を引くと，それを基準に帯図を 10 等分した。Aiko は，今回も 10%あたりの重さを解決のための単位に設定した。

Aiko は，帯図で 40%の 4 等分を 3 等分に変えるなど，前時の引き算 model-of による解答 3 倍を反映させるような model の小さな逆行を示すが，分割された部分を何度も数える操作を繰り返す。そこから繋げて 10%当たりの単位量を 5kg に設定し，帯図で単位量をビルドアップするような記述を加えた（図 15）。

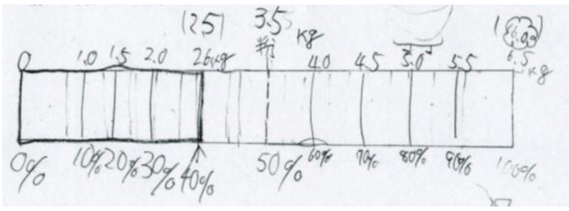


図 15　Aiko が描いた図

5 という数は Aiko にとって馴染み深いものなのだろう。全体量 6.5kg を 6.0 にするなど，自分の解決に沿って文脈を変更しようとする Aiko 特有の心的働きも見られるものの，13 時において Aiko は割合の文脈で初めて解決のための単位を用いることができた。

15 時間目の問題**「いつも新潟県産のナスは 1 ㎏あたり 3200 円で売っています。今日は特売日ということで，25%オフにしました。さて，売値は何円ですか。」**で，Aiko は 100%から 25%を引く計算をした後，帯図を描き始めた。解決のための単位は 1kg あたりの値段であり，題意にそぐわないのだが，Aiko は等分除 model-of を用いて解決に臨もうとした。

Aiko は 3200×100＝320000 の計算を行い，帯図に 90%, 80%, …と記入していく（図 16）。

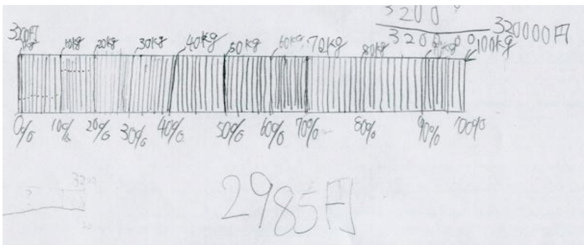


図 16　Aiko が描いた図

続けて，引き算 model-of を用いた解決である 3200－25＝2985 の筆算を行った。2985 円と書いたところまで自力で行うも結局解決には至らなかった。包含除 model-of を用いた解決 320000 円が文脈にふさわしくないという困難に遭遇した Aiko の活動は，ここでも固執 model である引き算 model-of に逆行した。

教師の支援を受け，Aiko は 10 等分された部分に 320 と書き加えることで 10 等分された値段を求めることができた。Aiko は解決のための単位を 10%に設定し，その単位量 320

円を求めた。その要因として，帯図が割合を推測する model としての役割を果たしていたことと同時に，扱う数値が整数であったことが考えられる。Aiko は教師との係わり合いを通して，5%が 10%の半分であることから 32÷2＝16 の計算を行い，5%の値段 160 円を考えた。教師の指摘を受けると Aiko はしばし考え，包含除 model-of である 320×7＝2240 円に 5%当たりの値段 160 円を加えることで解決に至った（図 17）。比較量を求める

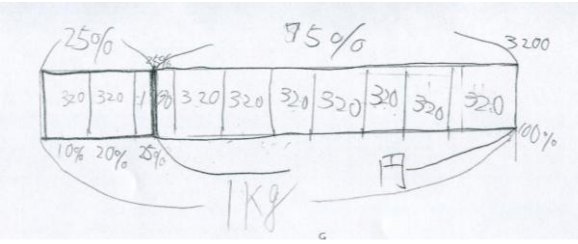


図 17　Aiko が描いた図

文脈の中で，Aiko にとっての等分除 model-of と包含除 model-of が柔軟に用いられるように心的に変容している。Aiko の乗法 model は，柔軟性をもち始めていると言える。

ここで，帯図は割合を推測する model から，10%あたりの値段 320 円や 5%あたりの値段 160 円という解決のための単位量を求め，その単位量を用いて比較量を求めるという解決に向けての演算決定にかかわる情報を Aiko に与えるものとなった。本稿では，この model の役割を，計算のための model，と呼ぶ。

16 時間目の問題は「**例えば，原価が 600 円の場合，600 円＋5%の消費税分支払います。さて，600 円の品物を買うために実際にはいくら支払わなくてはいけませんか。**」であった。Aiko は 10 等分の等分除 model-of を用いた解決を行った。また，半分の 300 円を 50%と記述するのは 1/2model-of への固執であるが，等分除 model-of と併用しているところから初期の段階ほど固執はないようである。1/2model-of は，Aiko にとってそれほど馴染み深い心的形成物である。その後 Aiko は 10 等分の model-of を，4 等分，6 等分の model-of へと変容させるが，これは 1/2model-of への強い逆行であり，固執 model の再現である。

教師の支援を受け，Aiko は再び 10 等分の帯図で考え始めた。Aiko は再度 10 等分の帯図を描き，300 円のところに 50%と書いた。Aiko は前時のプリントを見直すと，60×10＝600 の筆算を行い，10 等分されたマス目に 60 を書き込んでいく。Aiko は，一番左側のマスに書き込んでいた 60 を消すと，そのマスを半分にする縦線を書く。60 円の半分が 30 円であることが分かると，帯図に 30 と書き込んでいる。Aiko は 1%あたりの値段が 6 円であり，10 個集まって 60 円になることを求め，5%分の値段を求める場合かけ算を用いればよいことに気付いた。その後に行った Aiko の筆算は，60×9＝540，540＋30＝570 というものであった。正答には至らないものの，Aiko は計算のための model として帯図を用いている。発表場面で，Aiko は解答を 630 円に訂正している。このときの計算 60×9+60+30＝630 は帯図で示された関係と一致したものだった。

17 時間目は「**20%割引のビデオカメラが今たったの 9600 円です。さて，このビデオカメラのもとの値段（原価）はいくらですか。**」であった。Aiko は，10 等分の等分除 model-of を用いた解決を行おうとするが，まず帯図に依らない比例関係を示す記述をする（図 18）。

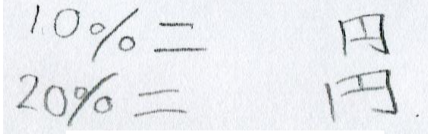


図 18　Aiko が描いた図

その後固執 model である 1/2model-of や引き算 model-of を用いるが解決に至らなかった。

Aiko は 9600×20 の計算の後，帯図を 10 等分し始めた。最初は 10%当たりの値段を 960 円としたが，教師とのやりとりの後，Aiko は 9600 円を 8 等分すればひとつ分を求めることができることに気付いた。帯図から式の

意味を見出すと Aiko は 9600÷8＝1200 の筆算をした（図 19）。Aiko の帯図は計算のための model としての役割をもっていた。

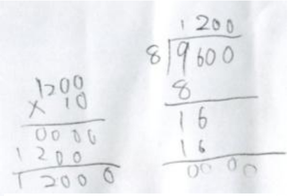


図 19　Aiko の計算

級友 Hideo が 1%が 120 円であることを用いた解決を説明した後，Aiko は 1%あたりの値段について 9600 円を 80 等分すればよいことを発言した。Hideo の影響を受けつつ，Aiko は 1%あたり量を解決のための単位に設定することを意識し始める。

Aiko は，問題「**1205 人の若者のうち，593 人は(1)友達の事を選びました。311 人は(2)部活の事を選びました。196 人は（3）健康の事を選びました。そして，105 人は（4）学校の事を選びました。**」で，最初 593＋311＋196＋105＝1205 の筆算を行い，分数を用いた帯図を描こうとするが解決には至らなかった。これは，解決のための単位を適切な分数で表わすことができなかったためである。

分数を用いた帯図を自分なりのグラフで表現する問題で，Aiko は棒グラフのようなものを記述した（図 20）。棒グラフの縦軸を直すことによって，棒グラフには正確な数値の関係が記述された。グラフを書く際に重要になる正確な目盛が，等分除 model-of の援用を助けた可能性がある。よって，上の図は等分除 model-of を用いた帯図の翻りと捉えることもできよう。

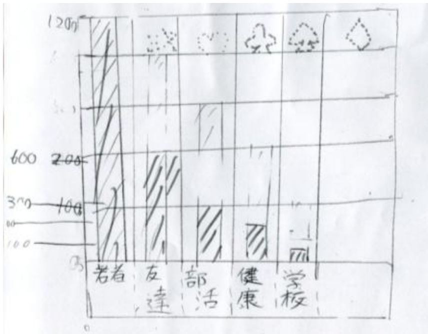


図 20　Aiko が描いた図

20 時間目の問題「**つよしさんの学校で，641 人を対象に「行ってみたい海外旅行」について調査をしました。これを円グラフや帯グラフにしましょう。**」で，Aiko が最初に形成した帯図は前時の棒グラフに固執した帯図だった。教師が 100 等分された帯図の紙を用いて Aiko に説明を始めると，Aiko は 10 等分の model-of を用いた解決を行い，式 641÷10 から，10%あたり約 64 人という単位量を導き出した。次に Aiko は，教師とのやりとりで式 64÷10 の筆算を行い，1%あたり 6 人という単位量を導いた。

その後，教師の支援を受けつつも，Aiko は教師から渡された 100 等分の帯図と乗除法の計算を関係付ける活動を行った（図 21）。

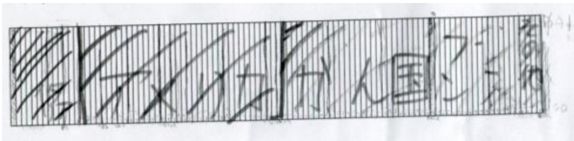


図 21　Aiko が描いた図

Aiko は，10 等分の等分除 model-of や 100 等分の等分除 model-of を柔軟に使い分け，それを包含除 model-of によってビルドアップしたり取り除いたりする計算をしながら解決を行った（図 22）。複雑な文脈の課題に際して，Aiko は 1%あたりの単位量のよさに気付き始めている。100%の帯図に割合を記述することができるようになると，Aiko は前回と同様のやり方で帯図を円グラフに形式化することができた（図 23）。

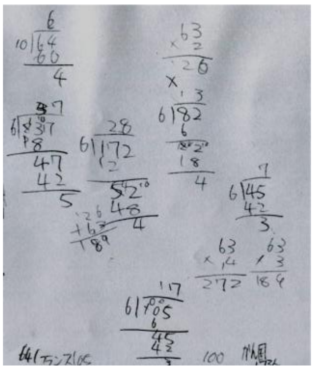


図 22　Aiko の計算

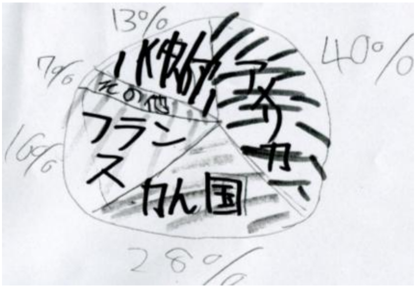


図 23　Aiko が描いた図

5.2.Aiko の活動の考察

帯図の役割が変容し，等分除 model-of が用いられ始めるのは第 12 から第 14 時であった。この変容に関して Aiko がかつて形成してきた model-of との関連は見逃せない。これまでの学習の中で Aiko は固執する model-of，つまり加法構造を用いた解決へ何度も逆行していた。黒板で扱われた model は乗法構造をもつ model だったが，問題場面が変わると Aiko はその都度馴染み深い加法構造に立ち戻っていた。それは，黒板で扱われた解決のための model が Aiko にとって未解決な状態の model であった可能性を示す。Aiko が包含除の問題で描いた絵図は累加を土台にしたものだが，固執する加法構造の model を繰り返し用い解決に至らないながら，割合の問題の中で累加・累減を土台にした解決を行おうと試みたのが第 12～14 時であった。

Aiko の model の自己発達の過程は，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）が示した model の発達のように単線的ではなく，固執 model への逆行が繰り返し起こっていた。この繰り返しを何度も起こしながら，加法構造による model-of であったものが，累加・累減を土台にした考えを連結材として，10%や 1%当たり量を解決のための単位とする乗法的な model-of へと変容していった。固執 model への度重なる逆行は，Aiko が割合の知識を形成する上で不可欠な心的働きであった。

5.3. Aiko が形成した model の役割

Aiko の活動から model の役割について四つ提示する。これら四つの model の役割においても，Aiko には固執と逆行が見受けられた。

(1)状況を記述するための model

状況を記述するための model は，状況から関係を取り出した model-for と比べ，一層文脈依存で，解決のための方略や見方とは直接関係を持たない model-of である。また，この model は子どもたちが学習段階の比較的初期ないし問題の題意が掴めないなど学習の困難に接した際に現れる素朴な model である。

(2)占有を示す model

占有を示す model は，状況を記述するための model から全体に対する部分の関係が取り出された model である。子どもたちにとって占有を示す model は，解決のための単位を累加し全体を構成する操作から現れる。

(3) 割合を推測するための model

割合を推測するための model は，子どもたちが帯図から割合を考える際，視覚的に捉えやすいことから，割合を推理したり概算したりする役割をもつ model である。

(4) 計算のための model

計算のための model は，割合を推測するための model から，解決のための単位を求めるための演算決定にかかわる情報を子どもたちに与える役割をもつ model である。子どもたちは，等分除 model-of と包含除 model-of を柔軟に用いるようになる。

6. おわりに

考察から得られた示唆は次の三点である。

第一に，固執 model は誤答を伴う場合が多いが，その子の本性に即した model である故，教師は固執 model を回避せず，固執 model を生かし，より数学的な方略へ向けた model への発達を促すべきである。

第二に，比の三用法の活用に関して，教師は子どもが解決のための単位を様々に設定する活動を豊かにすることである。子どもが場に応じた単位と単位量を柔軟に設定し，それを形式化していくことを重視すべきである。

第三に，子どもたちが割合単元の model を自己発達させていく際，自身が描く図の役割も発達させたことを踏まえ，教師は子どもたちが帯図等の図を描く活動を十分保証することである。

今後の課題について，二点挙げる。

教授実験における Aiko の model の自己発

達の過程には，時間内での級友とのかかわりが強く影響を与えていた。Aiko は，級友のよさそうなアイデアや教室で取り上げられたアイデアを，固執 model と対応させつつ自身の解決に生かそうとした。本研究は，一人ひとりの子どもが割合単元の知識を如何に形成するのかという過程に焦点づけられた研究である。一方で子どもが知識形成を行う上で，その子が如何に授業に参加していくのかといく視点も欠かすことができないであろう。今後は子どもの知識の形成過程と授業とのかかわりについても考察を進めていく必要がある。

Aiko は，教授実験を通して固執 model への逆行を繰り返し行っていた。この心的働きは, Aiko が解決のための単位を柔軟にとり割合単元の model を発達させていくために必要なものであるが，本研究では Aiko が固執 model すなわち加法に依存した解決を乗法構造に向けた解決へと跳躍させ，比の三用法へと model を統合させていく様態を記述するまでには至らなかった。この跳躍は，Aiko が今後経験する分数と小数の学習や割合単元の学習，比例の学習を通して長期的に起こってくるものなのかもしれない。子どもが形成する model に対して, 比の三用法の知識へと跳躍を促すものについて考察を進めていくことが本研究に残された課題である。

引用・参考文献

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T.Nunes & P.Bryant (eds.), *Leaning and Teaching Mathematics : AnInternational Perspective* (pp.315-345). UK : Psychology press.

早川健．(2003)．「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入．*日本数学教育学会誌, 85（12)*，23-30.

熊谷光一．(1998)．3 年除法の導入に関する教授実験における授業計画のための示唆．*筑波数学教育研究，17*，95-104.

溝口英麿．(2006)．割合の学習における児童の思考過程についての研究～同種量の割合に焦点をあてて～．*上越数学教育研究，21*，107-118.

中村享史．(1996)．小数の乗法の割合による意味付け．*日本数学教育学会学誌，78（10)*，7-13.

白井一之他．(1997)．乗法・除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導．*日本数学教育学会学誌，79（6)*，51-56.

田端輝彦．(2003)．同種の量の割合の導入に関する一考察．*日本数学教育学会誌, 85(12)*，3-13.

Van den Heuvel-Panhuizen，M．(2003). The didactical use of models in realistic mathematics education : an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9 -35 .

高橋久誠．(2000)．小数の乗法の授業構想に関する考察―比例の考えをもとにして―．*上越数学教育研究，15*，85-94.

高橋等．(1991)．児童の能力とさまざまな場面，書式をもつ数量に関する問題の理解との関係．秋田大学大学院修士論文.

高橋等．(2003)．子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．*上越数学教育研究，18*，31-48.

高橋祐樹．(2003)．小数の乗法と除法における子どもの知識の構成過程について―子どもが比の三用法を活用していくまで―．上越教育大学大学院修士論文.

吉田亮．(1999)．子どものリアリティを基盤とした活動の構成　ー第 4 学年・除法の筆算アルゴリズムの形成を目指した教授実験を通してー．*上越数学教育研究，14*，99-110.