上越数学教育研究，第26号，上越教育大学数学教室，2011年，pp.13-20.

ゼミから生まれた数学的活動図

伊　達　文　治
上 越 教 育 大 学

1．はじめに

上越教育大学大学院学校教育研究科教科・領域教育専攻自然系コース数学分野における，筆者の担当するゼミは，2 年半前まで広島県立高校に長年勤務していた筆者が本学に赴任したことを契機として，2 年前の 4 月に発足した。

最初のゼミに所属したのは小林君と槌屋君である。それぞれ工学部，国際経済学部を卒業し本学に入学してきた。発足したばかりのゼミには先輩はいない。二人はそれぞれの数学経験と課題意識を基に自由に議論し，白熱して気付いたら外はすっかり暗くなっていることもしばしばであった。小林君の課題意識は，中学校で（－）×（－）が（＋）になることは教えているが，負数乗法の奥深い意味は教えていないのではないか，というものであった。槌屋君の課題意識は，「中一ギャップ」即ち算数から数学に移るとき生徒が大きくつまずくという問題は，「文字におくこと」の意義に迫らない「文字と式」の形式的な指導に起因するのではないか，というものであった。二人は共に算数から数学に入る時期の教科内容に対する疑問を抱えていたと言えよう。

一年後にゼミに所属したのは，同じ理学部数学科を卒業して入学した松井さんと中澤君である。松井さんの課題意識は，多くの子供が証明問題に苦手意識を持っているのは，今の証明の指導が形式的なものに陥っていて証明の意味や必要性を伝えるものになっていないからではないか，というものであった。中澤君の課題意識は，高校の複素数の指導は「2 乗して負になる数が虚数である」ことを言っているだけ，即ち複素数の形式的な提示に終わっているものであり，複素数のイメージは深まることも広がることもなかった，というものであった。ゼミの二つの世代は，高校で複素数平面を学習した世代（前々回の改訂）と学習しなかった世代（前回の改訂）とに別れ，いみじくも学習指導要領の改訂の一面を象徴している。

ゼミで色々と話し合う中で，ゼミ生に共通の課題意識が明らかになっていった。その課題意識は，筆者が高校に勤務していた当時の課題意識と見事に符合するものであり，また「数学的活動」に深く関係するものであった。そのことをはっきり意識したのは最近のことである。折しも，ここで述べるゼミの活動の時期は，学習指導要領改訂の時期に当たっている。新しい指導要領では，「数学的活動」を一層充実させ，「数学的な思考力・表現力」などを育成することが強調されている。

本稿では，まず筆者が高校に勤務していた当時の課題意識を述べ，次にゼミで問題にした「数学的活動」の捉えを明らかにし，おわりにゼミの活動の成果の一端として生まれた「数学的活動図」を提示する。読者の皆さんのご意見を伺い，これからのゼミの活動に生かしたいと考えている。

２．一高校教師の課題意識

筆者が高校に勤務していた当時の課題意識をよく表していると思われる，今から3年前の草稿がある。次に示すことにする。

わが国では，「学力低下」・「理数離れ」・「数学教育の危機」などが社会問題となって久しい。しかしその実態は，認知的学力低下にあるのではなく，むしろ情意的学力低下にあるといえよう。したがって，情意的学力低下の背景基盤の究明こそ，認知的学力低下の臨床的対応にもまして，重要であると考える。

2006年に経済協力開発機構（OECD）によって実施された「生徒の学習到達度調査」（PISA)の15歳児の数学的リテラシーに関する国際調査結果では，科学（理数）の有用性を認めたり関心を持ったりするわが国の生徒の割合は，OECD加盟国平均を大きく下回った。また，平成17(2005)年度高等学校教育課程実施状況調査の生徒質問紙の結果をみると，「数学が好きだ」，「数学の勉強が大切だ」に対して肯定的な回答をした生徒は，それぞれ38.9%，59.0%であり，数学は勉強しなければならないが好きになれないという，高校生の意識の実態が明らかになる。また，教師の質問紙の結果を見ると，「実生活における様々な事象との関連を図った授業を行っていますか」に対して肯定的な回答をした教師は，29.4%であり,数学教育の意義や必要性を実感させる授業の工夫等を行う意識あるいは余裕のない，高校教師の実態も浮かび上がってくる。

私たち高校数学教師の中には，授業を知識・技能の習得の場とだけ捉えていて，問題解決型の授業を全く行わなかったり，知らなかったりする者も少なくないのではないかと思われる。勢い，その授業は，概念の指導と演習の解説に終始し，あたかも大学での数学講義のミニチュア版を彷彿させると言ってもよい。実際，数学教師用指導書の解説には，何を学習するのかという内容と，どのように扱うべきかという方法だけが記述されていて，教材の価値とか本質に触れるものは皆無である。

学校（特に高校）数学の授業や学習指導案の殆どは，教師が問題場面を提示し，生徒はその問題を解決するように求められるというものである。ともすれば，授業を知識・技能の習得の場とだけに捉えられ，問題解決型の授業が全く行われなかったりもする。教科書の指導書の記述を見ても，何を学習するかという内容とどのように扱うべきかという方法だけが記述されていて，教材の価値とか本質といった観点がみえてこない。

例えば,今日では完成した対数を取り扱い，普通，対数の定義を「$x=a^y$ である時 $y=\log_a x$ 」とし，これから対数の諸性質を誘導し,それらを数の計算に利用している。そしてこれらの事項は，どの教科書にも記載され，これを利用するのに何ら困難な所はない。したがって教師も生徒も教科書記載の事項だけを理解して，これで対数について完全な知識を得たと思い，満足しているようである。しかし，これで対数そのものの真の意味を理解し得たといえるだろうか。対数を，文化的な視点からみようとすると，対数はどのような実用上の必要から生まれたのか，どうしてこのような定義が都合よい性質を含むことに気がついたのか，三角比や微分積分学などとの関係はどうなのか，自然対数の底は $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2.718\cdots\cdots$ であるが，なぜこのような複雑な極限を底とすれば対数研究に都合がよいのか，なぜこのような複雑な超越数 e を底とする対数を自然対数と名づけたのか，というような数々の疑問が浮かんでくる。これまでの学校数学の展開は，このような疑問を生じさせるものにも，それらの疑問に答えるものにもなってはいない，すなわち，対数

そのものの真の意味理解までに至るものにはなっていない，と言えよう。これまでの学校数学の教育内容においては，この他にも，真の意味理解に至らない内容展開が少なからずある，と考えられる。

これからの高校数学を展望するとき，中学校数学との関連や高校数学の全体像，各指導内容の関連を把握した上で，生徒の実態や様々な社会的要請等を踏まえつつ，生徒が興味を持って主体的に取り組むことができ，それを通して文化としての数学を学ぶことができる，そのような教育内容を創造し実践していくことが，今正に求められている。

数学は，先人達が自分の文化の中で，問題を自分の問題として捉え，試行錯誤を繰り返しつくり上げ，今も，世界各地，社会の中，教室の中，各個人の中で，そして，各文化の中で，つくられ発展しているものである，という「文化的数学観」「文化的数学学習観」への意識変容を図る方策が必要である。文化としての数学を学ぶことのできる教育内容や教材の見直しがなされなければならない。他教科では得られない数学のよさ・面白み・美しさ・楽しさ・有用性という「数学の本質的な価値」を感得できるような，教育内容の創造と教育方法の工夫という取り組みも大切となる。その取り組みによって，生徒の「数学観」・「数学学習観」が変容し，情意的学力も向上し，学習意欲を育てることができ，生涯数学を学び続ける力にすることができると考える。

以上が，筆者が高校に勤務していた当時の課題意識を表した草稿である。先に述べたゼミ生の課題意識と符合するのは，次のような数学に対する考え方に依るところである。数学は人間の活動から生み出された文化的所産であり，各文化の中でつくられ発展している。数学学習は，数学的活動を通して自らの中に数学をつくっていくものである。そう考えると，現在の学校教育は自らの中に数学をつくっていく活動が不足しているという課題意識が表出してくることになる。

ゼミの中で出た話である。ゼミ生の一人が次のように話した。「学習塾で中学１年生に，一次方程式を教えた。そのときは練習問題もこなし，方程式を解く問題はできるようになっていた。何週間かが過ぎて同じ問題を解かせたところ，文字を使わない算数問題の解き方に退行していた。」 その話を聞いてゼミで考えたことは，方程式の学習において受身的に教え込まれ主体的に行う数学的活動がなされていなかったため，自分の中に方程式に関わる数学をつくることができていなかったのではないか，ということである。数学を自分の中に形成するには，各教育内容（各単元）の学習それぞれの中で主体的に行う数学的活動が必要不可欠である，という認識に到った。

次節では，新しい学習指導要領で強調されている「数学的活動」の充実について，高校を中心にして学習指導要領の解説から把握することにしたい。

３．「数学的活動」の充実について

「数学的活動」は平成 10 年度学習指導要領から目標に取り上げられたものである。今回の改訂においては，小学校，中学校及び高等学校で一貫して，目標の冒頭に「数学的活動を通して…」が位置付けられ，その充実が一層強調されている。

以前は「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」と文中において示され，数学的活動そのものは，観察的操作，実験・実習などの外的な活動，直観，類推，帰納，演繹などの内的な活動，数学化し課題を設定する活動，これまでに学んだことを基にして新しい定理等を構成する活動，思考の過程を振り返る活動等と例示により規定されていた。

今回の改訂では，より一般的に「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動」と簡略に示されている。目的意識をもった主

体的活動を通してのみ真の数学の学習は可能であり，数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動を数学的活動といっている。したがって，数学的活動は，生徒が数学を学習する方法というだけではなく，数学の学習を通して身に付けるべき内容ともいえるべきものである。

さらに，指導に当たっては，各科目の特質に応じ数学的活動を重視し，数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに，次の事項に配慮するものとしている。

① 自ら課題を見いだし 解決のための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。
② 学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること。
③ 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること。

数学的活動の配慮事項として上の三つの事項を上げているが，これは，従前の高等学校数学科の数学的活動で重視していたことや，今回の改訂における中学校の数学的活動を踏まえたものである。今回の改訂では，内容の取扱いにおける新たな配慮事項を設け，「各科目の特質に応じ数学的活動を重視し」と表現し，いずれの科目でも科目の特質に応じて数学的活動を重視した指導を求めている。

①では問題の解決に関すること，②では学習した内容の問題の解決への活用に関すること，③では言語活動の充実に直接かかわることが述べられている。これら①から③相互の関係は，高等学校学習指導要領解説数学編（文部科学省，2009）において，図１のように図示されている。（図中の(1)，(2)，(3)は本文中の①，②，③に当たる。）

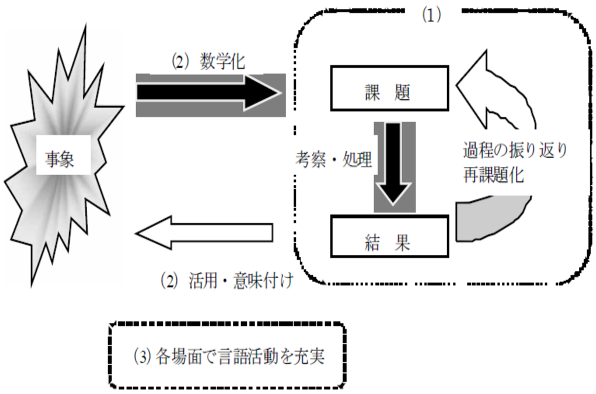

図 1.　数学的活動

なお，「数学Ⅰ」及び「数学Ａ」には課題学習が設け，「内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにする」，「実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする」，と規定されている。この課題学習では，生活と関連付けた課題を設けたり，生徒の疑問を課題として取り上げたりすることなどが大切であり，課題の解決に当たっても①や③で述べられているような生徒の主体的な活動や言語活動が重視されなければならないとしているのである。

また，「数学のよさ」の認識について，次のように述べられている。

今回の改訂では，中学校及び高等学校において「よさ」の認識の対象が従前より広くなっている。「数学のよさ」は，従前の「数学的な見方や考え方のよさ」はもちろん，数学の概念や原理・法則，数学の記号そのもののよさ，数学的な表現・処理のよさ，数学的活動そのもののよさ，数学的に考えることの楽しさなどをも含むものであるとされている。

この「数学のよさ」を生徒に認識させるためには，数学の内容を教えることを通して，

「よさ」を強調した指導が求められる。授業後などに何を学んだのか(学んだ事実)，何を考えたのか(数学的な考察)，どのように発展させたのか，させたいのか（発展させたいこと）等をかかせる取組の中で，数学のよさを取り上げるようにしたいものである。

以上，「数学的活動」の充実についての概略を把握してきた。新学習指導要領では，「数学的活動」を数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動と明確に規定している。これまでのゼミの活動は，ゼミ生と元高校数学教師の課題意識にある問題点の解決にこの「数学的活動」の充実が必要であるとして取り組んだ活動であったことになる。ゼミでこれをはっきり意識したのはごく最近のことであるが。ともかく，ゼミでは，ゼミ生が研究テーマの対象とする各教育内容（各単元）の学習に必要な「数学的活動」は何か，を議論してきた。

この「数学的活動」は「目的意識をもった主体的活動」であるから，それは二つの重要な要素，即ち「向目的性」と「主体的活動性」を有するものである。したがって，「数学的活動」は，基盤となる対象から目的となる対象へと向かうベクトルとして表すことができる。

各教育内容（各単元）の学習に必要な「数学的活動」は何かの議論は，何時しか「数学的活動」をベクトル（矢印）で表す図的な表現を取り入れた議論へと発展した。

次節では，ゼミの活動の中で「数学的活動」の図的な表現として生まれた，ゼミ生それぞれのテーマにおける数学的活動図について述べることにしたい。

４．ゼミから生まれた数学的活動図

先述したように，これから述べようとする数学的活動図は，各教育内容（各単元）の学習に必要な「数学的活動」は何かという議論から生まれた。ゼミ生 4 人それぞれのテーマに応じた 4 つの図が未熟ながらも結実したのである。これら 4 つの図はそれぞれのテーマに固有の数学的活動を表しているものであるが，次のような共通点がある。

(1) 「数学的活動」をベクトル（矢印）で表している。
(2) ベクトル（矢印）には全て，それに対する（逆方向の）逆ベクトルが存在すると考えている。（例えば，前掲の図１において，→の「数学化」に対して，←の「活用・意味づけ」が存在するというような関係である。）
(3) 各教育内容（各単元）の学習には，双方向の「数学的活動」（あるベクトルとその逆ベクトルの両方）が必要であるとしている。
(4) ベクトル（矢印）は「向目的性」と「主体的活動性」を有していて，ベクトル（矢印）全てにそれぞれ，生徒に考える対象に向かって主体的活動を起こす「問い」が対応している。

ゼミ生 4 人それぞれのテーマに応じた 4 つの数学的活動図について，その概要を順次述べていくことにしたい。これから示す図は，ゼミの最中に図的表現を用いての議論になったとき実際ホワイトボードに描かれたものが元になっている。本稿掲載の図は，松井さんがデジタルファイルの図として作成したものである。

４－１．負数乗法

次頁の図２は，小林君の研究テーマ「負数乗法の指導改善」に関わるゼミの議論の中から生まれた数学的活動図である。

算数の世界では，子供達は日常的事象を全て自分の経験を通して学び自分の中に算数をつくっていく。「借金×借金がなぜ財産か」というスタンダールの問いに象徴される「(－) ×（－）がなぜ（＋）か」という非

日常的事象は，自分の「経験」を通して確かめるということはできない。

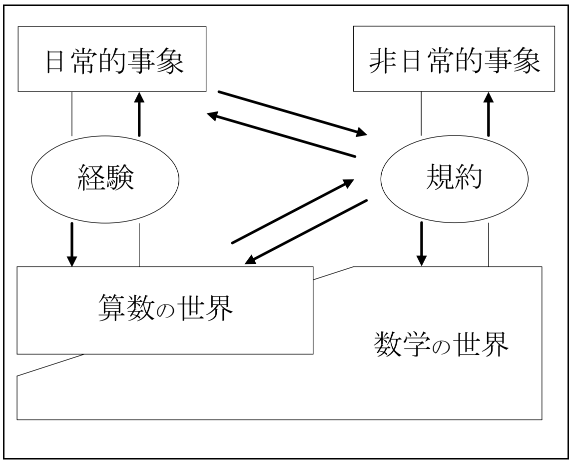

図２． 負数乗法の学習における数学的活動

非日常的事象を考えるためには，算数の世界をつくる「経験」に代わるものが必要である。それが「規約」であろう。現在の負数乗法の指導の問題点の一つは，数学の世界をつくるのに必要な「規約」を意識させず，あたかも算数における「経験」から自然に導けるものであると教えていることである。学生に「(－) × (－) がなぜ (＋) か」の説明を求めたところ，殆どの学生の答えは説明にもならないものばかりであった。愕然としたことを思い出す。ただ，ここで規約を意識させるというのは，「 (－) × (－) は (＋) になるとする」と規約したことを教えればいいと言っているのではない。ゼミでは，「負数乗法にはどのような規約が必要なのか」，「規約をどのように決めたらよいのか」，「そのように規約したらこれまでの既習知識はどのようになるのか」などを生徒自らが考えていく活動が必要であるという思いに及んだのである。

「日常的事象→ (←) 規約」は，物理的アプローチであり，「算数の世界→ (←) 規約」は外挿法によるアプローチである。「非日常的事象→ (←) 数学の世界」を仲介する「規約」は，量的アプローチや数的アプローチの個々の規約を包括する「同符号の積は正，異符号の積は負」というまとめとしての規約である。

４－２．文字式

次の図３は，槌屋君の研究テーマ「文字式学習の意義と展開」に関わるゼミの議論の中から生まれた数学的活動図である。

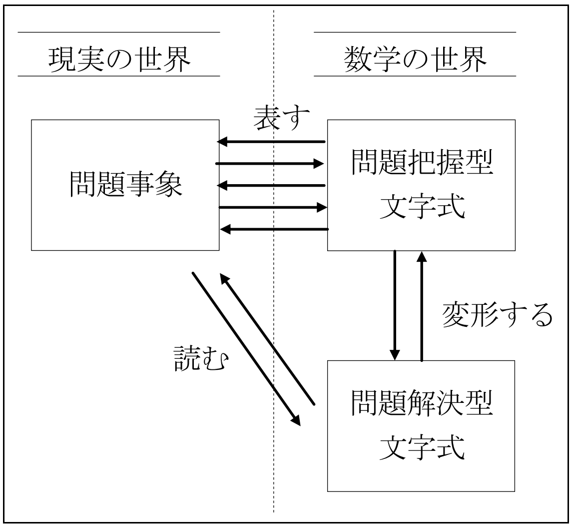

図３． 文字式学習における数学的活動

「文字と式」（方程式も含む）の学習に必要な数学的活動は，サイクルを形成する。２つの対象間の小さいサイクルと３つの対象間を巡る大きなサイクルである。ゼミにおいて，槌屋君が大学生に行った調査を基に，このサイクルの様相を検証した。その結果，「問題事象→ (←) 問題把握型文字式」の数学的活動はこの２つの対象間を行ったり来たりするものであり，文字式学習における数学的活動の中でも非常に重要なものであることがわかった。この数学的活動は，問題事象において「何をどのような文字式におけばよいか」を考える活動である。「文字におく」ということが複雑な様相を示していたのである。例えば，「偶数や奇数を文字に置き換える」ということの中には，「偶数をａ，奇数をｂとおく」や「偶数を 2n，奇数を 2n+1 とおく」，「偶数を 2m，奇数を 2n+1 とおく」などの段階がある。だか

ら，大きなサイクルに入る前に，この２つの対象間の小さなサイクルを行ったり来たりするのではないかと考えた。さらに，ここでの数学的活動をしっかり行っておかなければ，その後の記号代数とも言える「数学の世界」に入っていくことが難しくなるのではないか，という認識に到ったのである。

４－３．証明

次の図４は，松井さんの研究テーマ「証明の機能としてのコミュニケーション」に関わるゼミの議論の中から生まれた数学的活動図である。

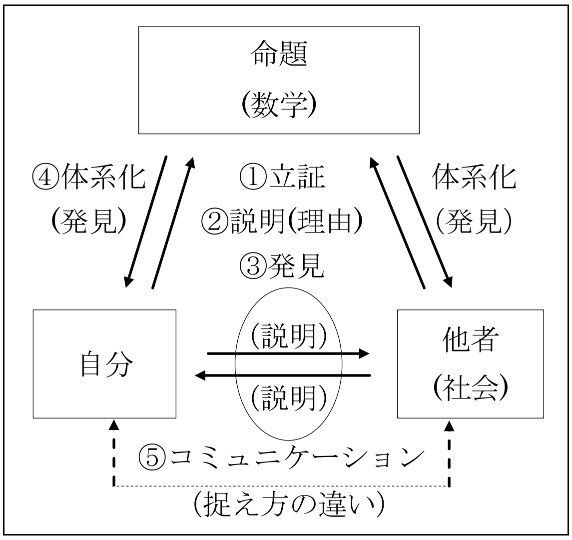

図４． 証明学習における数学的活動

ゼミで講読した de Villiers (1990) は，数学における証明の異なる機能として次の 5 つを提示していた。

① 立証 (verification)
② 説明 (explanation)
③ 発見 (discovery)
④ 体系化 (systematization)
⑤ コミュニケーション (communication)

これらは機能(function)であるから，対象から対象へという方向性を有するものである。ゼミではこれを「数学的活動」のベクトルとして考えられないかを検討した。そのためには対象を明らかにする必要がある。図に示しているような証明学習における３つの対象を考えた。「命題（数学)」，「自分」，「他者（社会)」である。それらの対象間の数学的活動を表すベクトルに，de Villiers (1990)に学びながら，5 つの証明の機能を対応させた。証明学習における数学的活動の様相は，この数学的活動図によってかなり明らかにすることができたように思う。松井さんの注目する「コミュニケーション」（自己内対話も含む）は，他の機能を統括するというような働きをしていることも読み取れる。「コミュニケーション」は，証明学習において非常に重要な数学的活動である。このようなことが，数学的活動図を通して確信できたのである。松井さんのこの研究は始まったばかりであり，これから，この数学的活動図をたたき台にし，証明学習におけるコミュニケーションの役割を明らかにすることや数学的活動の活性化を目指して,研究が推進されることを期待している。

４－４．複素数

次の図５は,中澤君の研究テーマ「複素数学習における幾何的アプローチ」に関わるゼミの議論の中から生まれた数学的活動図である。

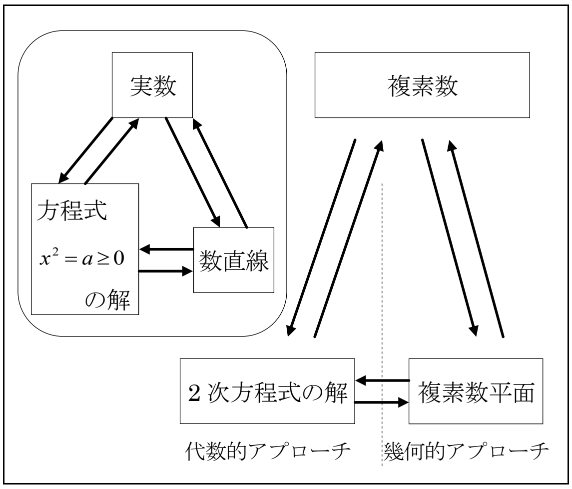

図５． 複素数学習における数学的活動

これまで学習指導要領から姿を消していた「複素数平面」が，今回の改訂で高校「数学Ⅲ」の単元「平面上の曲線と複素数平面」として復帰した。中澤君は高校で「複素数平面」を学ばなかった世代であり，大学での複素数イメージの広がりや学習指導要領の今回の改訂をきっかけとして，高校での複素数学習の指導改善を研究テーマに据えた。

ゼミでは，複素数学習において「複素数平面」を学習しないということは，どのようなことになるのか，どのような数学的活動が欠落することになるのか，を考えていった。図５はその過程で生まれたものである。中学校までに出てくる新しい数としては，負の数や無理数即ち実数がある。実数学習における数学的活動は，図５内の小さい枠の中に示されるものと考えられる。実数にも複素数にも代数的側面と幾何的側面があり，複素数学習も実数学習における数学的活動と同様な活動（小枠の外に示されたもの）が要るのではないか，と考えるに及んだ。そうすると，複素数学習において「複素数平面」を学習しないということは，実数学習において「数直線」を学ばないということに等しいものとなる。これでは，新しい数のイメージが代数的側面にのみ偏狭したものに陥るのは免れないであろう。複素数学習においても，複素数の図示は不可欠であると考えられる。中澤君は今，代数的な文脈から起こる複素数の導入に幾何的アプローチができないものか，と模索している。中澤君のこの研究も始まったばかりであり，これから，この数学的活動図をたたき台にし，複素数学習における幾何的アプローチを明らかにすることや数学的活動の活性化を目指して，研究が推進されることを期待している。

５．おわりに

本稿において，ゼミの活動における「数学的活動」の捉え方について述べ，ゼミの成果の一端として「ゼミから生まれた数学的活動図」を例示してきた。しかし，これらはまだまだ未熟である。先に述べたように，ベクトル（矢印）全てにはそれぞれ，生徒に考える対象に向かって主体的活動を起こす「問い」が対応している。この「問い」の検討や開発は，ゼミにおいても途上にある。「数学的活動」の考え方や「数学的活動図」などに関するゼミでの活動は，これから実践的検討を加えると共に理論的精緻化を目指さなければならない。

「数学的活動」は数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動であるが，当ゼミでの活動は，数学教育学研究にかかわる目的意識をもった主体的活動であると言ってよいであろう。当ゼミの数学教育学的活動の活性化のためにも，皆さんのご意見をお待ちしたい。

［引用・参考文献］

Mary.L.Crowley.，& Kenneth.A.Dunn.（1985）. *On multiplying negative numbers*. Mathematics Teacher， Vol.78， No.4. National Council of Teachers of Mathematics，pp.252-256.

Michael de Villiers.（1990）. *The role and function of proof in mathematics.* Pythagoras，pp.17-24.

Panaoura,A.,et al. （2005）. *Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology，Vol.37，No.6，15 September 2006，pp.681-706.

文部科学省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編.

伊達文治(2010)，「高等学校の数学教育の概要」，数学教育研究会編『新訂 数学教育の理論と実際』，聖文新社，pp.206-216.