上越数学教育研究，第26号，上越教育大学数学教室，2011年，pp.91-102.

代数学習における Alnuset の可能性

－高等学校不等式領域の場合－

石田　裕介
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1.　はじめに

1.1　テクノロジー利用の現状

今日の社会は高度情報化社会などと呼ばれ，様々な情報技術が著しく進歩を遂げている。その影響は学校教育にも及び，テクノロジーを利用した学習指導が促進されている (文部科学省，2009)。わが国の数学教育，特に中学校と高等学校においては，これまで数式処理システム (CAS: Computer Algebra System) や表計算ソフト，グラフ電卓，動的図形ソフトなどの探究学習や発見学習への利用, 電子黒板やプロジェクター，実物投影機，プレゼンテーションソフト (PowerPoint など) などのより視覚化された授業への利用などが検討されてきた。その一方で，テクノロジーが数学教育にあまり利用されないという事実もある。先行研究によれば,「グラフ電卓や CAS (Computer Algebra System) を使えば，複雑な計算が簡単にでき，式の展開や方程式を解くなど自分で行わなくなるため，基礎的な式の操作や計算ができなくなると危惧している人もいる」 (垣花，2007，p.62) など，数学の基礎的な内容の学習にテクノロジーが役立たないとの認識があるようである。こうしたテクノロジーが数学の学習指導に定着しないことは，必ずしもわが国に限らない。TIMSS2003 の調査によれば，海外においてもしばしばテクノロジーが利用されないことが報告されている　(国立教育研究所，2005)。その要因として，Artigue (2000) は 4 つのことを指摘している。それは「1. コンピュータ技術の社会的・科学的な正当性が高いのに対し，その教育的な正当性が低いこと」「2. 数学知識のコンピュータ化に関わる問題が過小評価されていること」「3. 数学的な活動における技術的な側面と概念的な側面の間に大きな対立があること」「4. 用具化の過程における複雑さが過小評価されていること」 (pp.8-9) である。これらはすべて，今後の数学教育研究の課題でもあろう。中でも第 2 の点は，テクノロジー利用によっていかなる数学知識の学習が可能となるかといった問題にかかわるものであり，筆者の関心のあるところである。これまでわが国では，発展的な内容の学習へのテクノロジー利用はしばしば検討されてきたが，数学の基礎的な内容の学習へのテクノロジー利用の検討は少ない。そこで本研究は，基礎的な内容の学習におけるテクノロジーの可能性を探りたい。Artigue の言葉で換言すれば，基礎的な数学知識のコンピュータ化の可能性を探る。

1.2　不等式の学習

本研究では，代数，特に不等式の基礎的な内容の学習におけるテクノロジーの可能性を検討する。この領域選択の理由は，方程式や不等式の学習が解法の手続き的なも

のに偏ることが少なくなく，意味の学習が十分になされていないと考えたからである。実際，先行研究では，大小関係を示す不等号と不等式の解の集合を表す不等号との区別についての困難性など，意味の学習が十分なされていないことが指摘されている(山口，1986，p.89)。本研究では，こうしたことから不等式の意味の学習におけるテクノロジーの可能性を探ろうと考えた。そこでまず，不等式の意味の学習がいかなるものを対象とするか示しておこう。

高等学校の学習指導要領解説では，不等式の学習について次のように述べられている。

「不等式の中の文字や不等式の解の意味について扱い，不等式が大小関係についての条件を式に表したものであり，この条件を満たす変数の値の集合が不等式の解であることを理解させる。その際，不等式の解がどのように定まるかということについては，x にいろいろな数値を代入して確かめたり，数直線と対比させたりしながら，解の存在する範囲をとらえさせることが大切である。」 (文部科学省，2009)

ここでは，不等式が条件式であること，その解が条件を満たす値の集合であることに言及されている。このことは，方程式と同様であり，先行研究でも指摘されてきたものである (例えば,藤井 (1987))。例えば, $x + a < b$ といった不等式が左辺が右辺より小さいという大小関係を表しているのに対し，$x < a$ などと表現される不等式の解は大小関係よりもむしろ a より小さい値の集合を表している。この点は，生徒に混乱を招きかねないものであり，不等式の意味の学習で大事なものとなろう。

また，不等式が文字式を利用するため，文字や文字式の意味を考慮に入れる必要がある。「文字」には，一般に「定数として使われる文字」「未知数として使われる文字」「変数として使われる文字」の 3 つがある(杜威，1991)。不等式においては，文字は未知数であるとともに，解の数が多いため未知の変数のような扱いとなる。こうした点も不等式の学習で留意する点である。さらに，杜威 (1991) によれば，文字式が「数量や数量関係を表す」ものであるにもかかわらず，生徒に「数や文字と計算記号が並べてある物」と認識されるとのことである。つまり，不等式の意味の学習においては，本来既習である文字式そのものの意味についても考慮に入れる必要がある。

本稿では，以上に述べたようなことが不等式の意味の学習に必要となると考え，これらに焦点を当てた学習を検討する。

1.3 目的・方法

本研究では，テクノロジー利用という点においては，代数学習用のソフトウェア “Alnuset” [1)]を利用する。したがって，本研究の目的は，不等式の意味の学習における Alnuset の可能性を探ることである。具体的には，Alnuset を用いて，いかに不等式の意味の学習を目的とした授業をデザインできるか検討する。このソフトウェアを用いた理由は，Alnuset が量的に文字式を捉えることを可能にし，不等式の条件としての意味，解の意味の学習に非常に適していると感じたからである。

上記の目的を達成するため，本稿では，まず 2 節で Alnuset の主要機能を紹介し，3 節で Alnuset を用いた不等式の授業を検討する。3 節では，学習をいかに捉えるか示したうえで，Alnuset を用いて学習が生じるような授業をデザインする。そして，その授業で生じうる教師と生徒の活動を想定し，学習の視点から検討を加える。

2. Alnuset について

Alnuset は, Windows もしくは Java で動くソフトウェアである。その詳細は，

Chiappini & Pedemonte (2008), Pedemonte & Chiappini (2008) などで紹介されている。Alnuset は，これまで代数学習で検討されてきた従来の CAS やグラフ電卓とは大きく異なる。“Algebraic Line” (代数ライン), “Algebraic Manipulator” (代数マニピュレータ), “Functions” (関数) と呼ばれる 3 つのインターフェイスをもち，中でも，代数ラインは数直線を拡張したもので，これまでの代数学習ソフトには見られなかった興味深いものである。そこで以下では，代数ラインの機能を詳細に紹介し，それ以外のインターフェイスについては簡単な説明にとどめる。これは，次節以降に検討する授業において代数ラインを主に利用することもその理由となっている。

2.1 Algebraic Line

代数ラインのインターフェイスは，2 本の数直線からなる (図 1)。数直線上に変数や文字式などを点として設置し，動的に動かすことができる。変数が数直線上の点として与えられるため，特定の値を持つが，移動により，変数として捉えることができる。

例えば，2 直線の代数ライン上に文字 (ここでは x と置く) を作成し，ライン上で，四則演算や累乗の結果を表わす点を構成できる。図 1 では，x の点に 2 の点を加えることで，$x + 2$ の点を新たに構成している。また x が動的であるため，代数ライン上を移動させることで，x の値を任意の点におくことができる。さらに，x の値に応じて，$x + 2$ の点が移動するため，代数ライン上で $x + 2$ を x との関係を数量的に捉えることができる。この場合，x と $x + 2$ の点は一定の距離間隔で動く。この x と $x + 2$ の関係は独立変数と従属変数と同様である。

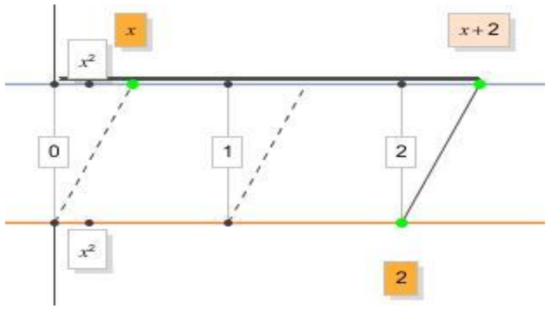

図 1　代数ライン上における文字式の構成

また，代数ライン上で点が重なることで，複数の文字式が同値であることを表現できる。例えば，図 2 では，x が 2 の点にあるときに，x^2 と $x + 2$ の点が 4 の点で重なっている。これは，x の値が 2 のときに，2 つの整式 x^2 と $x + 2$ のそれぞれの値が等しいことを示しており，$x^2 = x + 2$ の根の一つが $x = 2$ であることに相当する。

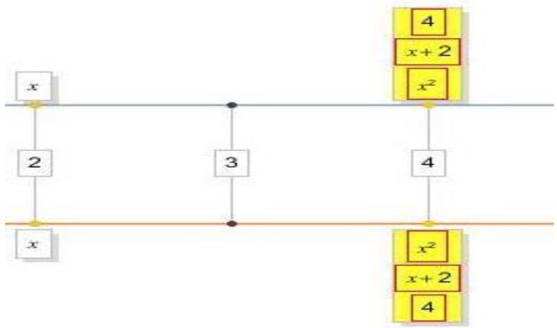

図 2　文字式の根の同値を表す代数ライン

等式，方程式や不等式を代数ラインに直接入力することもできる。すると，“Sets” という名称のウィンドウが表示される (図 3)。このウィンドウには式が表示され，動的な点 x を動かした際に，x の取る値に応じて式の真偽を表示してくれる。真偽は，式の横の丸の色 (赤と緑) で判断できる。図 3 では，緑が表示され，真であることがわかる。これは方程式や不等式にある値を代入し，その値の真偽を決定することとほぼ同等である。

図 3　Sets ウィンドウ

また，“Sets” の機能を用いて，代数ライン上に解の範囲を指定することもできる。例えば, 図 3 の方程式 $x^2 = x + 2$ を右クリックし, “Edit Set” を選択することで解の範囲を作成する直線を呼び出す (図 4 の上の数直線の下の太い直線)。この直線から，解の値や範囲を選択することができる。ただし，整数の点 (ポイント) のみ解の範囲の指定に利用できる。そのため，整数でない有理数や無理数を解とする方程式・不等式の場合は解を正確に表現することはできない。さらに選択した解は，“Sets” のウィンドウに表示される (図 5)。これにより，方程式や不等式で予想した解が，Alnuset の示す真偽と一致するかどうか調べることができる。

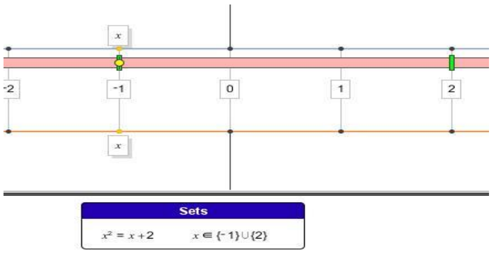

図 4　Sets から真の集合の設置

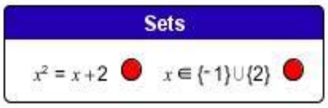

図 5　選択した解の集合

代数ラインのインターフェイスでは，“$E = 0$”という機能もある。これは，ある文字式について，“文字式 ＝0” とおくと，方程式を直接解いてくれる。動的な点を 0 に近づけると，代数ライン上の解となる点にアニメーション(赤や緑の三角形) (図 6) が表示され，その値が自動的に計算される。

以上が代数ラインの主な機能である。

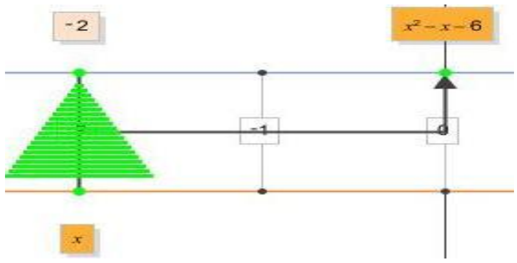

図 6　方程式の解の一致を表す代数ライン

2.2　Algebraic Manipulator

Algebraic Manipulator のインターフェイスは，Alnuset で認められた規則のみを使って式変形を行うことができる。図 7 の左側には，規則の一覧があり，それらは分配法則等の文字式の計算における公理的なものが与えられている。図 7 の右側には式変形の過程が表示される。

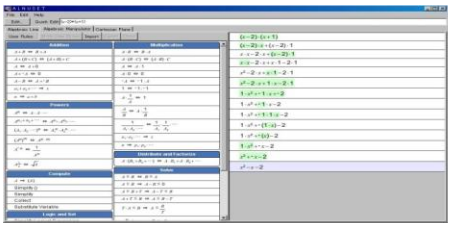

図 7　Algebraic Manipulator の画面

2.3　Functions

Functions のインターフェイスを図 8 に示した。上部に代数ライン，中央及び下部に座標平面を備えている。代数ライン上で表現された式のグラフが，座標平面上に自動的に表現される。代数ライン上で変数の点を移動すると，それと対応する座標平面のグラフ上の点が移動する。

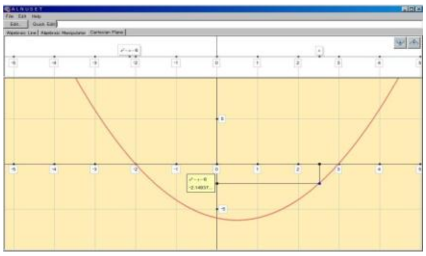

図 8　Functions インターフェイス

3. Alnuset を用いた代数学習の可能性

テクノロジーを用いた代数学習の可能性を探るため，以下では Alnuset を用いた授業を設計し，いかなる学習が生じ得るか検討する。そこでまず，学習をいかに捉えるか示す。これが授業設計の拠りどころになる。

3.1 授業デザインのための理論枠組み

本研究では，数学知識の発生に焦点をあてた Brousseau (1997) による「教授学的状況理論」にもとづき，学習を捉える。

教授学的状況理論では, 学習の状況を「教授学的状況」と呼び，図 9 のようにモデル化する。この状況において，生徒は milieu との相互作用もしくは適応により学習が進むとする。

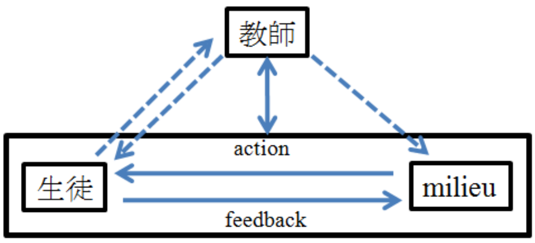

図 9　教授学的状況のモデル

教授学的状況理論の詳細は宮川(2007; 投稿中) などで示されているため，ここでは，授業デザインの際に考慮に入れる 2 点を簡単に述べる。第 1 の点は生徒と milieu の相互作用である。Brousseau は「生徒は, 矛盾や困難, 不均衡を生じる milieu に適応することで学習していく」 (1997, p.30) と述べ，学習とは milieu への action つまり働きかけと milieu からの feedback によって生じるとする。ここで milieu とは数学知識に直接関わる環境であり，feedback とは，生徒が正しいと期待した結果に対して，それが誤りであると自ら気づき，他の方法を探らせるような情報のことである。Brousseau は，このように教師が存在するがあたかも生徒と milieu との相互作用のみで学習しているかのような状況を「亜教授学的状況」と呼ぶ。

第 2 の点は異なった状況である。Brousseau は数学知識の異なった状態もしくは学習の状態を主に 3 つの状況で特徴づける。試行錯誤の状況(situation of action), 定式化の状況 (formulation), 妥当性判断の状況 (validation) である。詳細は宮川 (2007) でも述べられているため示さないが，本研究ではこうした異なった状況・場面を考慮に入れる。

テクノロジーを用いた学習や代数学習において，教授学的状況理論の考えを援用した研究はこれまでにも見られる。例えば，清水 (1999) は図形ソフトを利用した学習を「知的な鏡としてのコンピュータ」と学習者の相互作用として捉える (図 10)。知的な鏡としてのコンピュータと学習者との相互作用により，学習者が自分なりの図形についての知識を構成していく環境をもたらすとする。

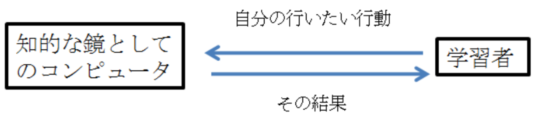

図 10　知的な鏡としてのコンピュータ

さらに，代数学習においては，岡崎 (2001) は，正負の数，文字式から方程式へとつながる単元を代数の導入過程と考え，「原初数学的」「擬数学的」「数学的」の 3 つの段階に Brousseau の 3 つの状況を対応させる (図 11)。

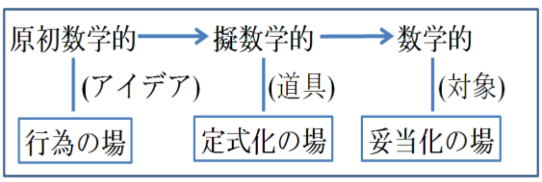

図 11　数学的知識の段階と場の対応

本研究は，こうした教授学的状況理論を援用した研究と類似した仕方で，Alnuset を用いた授業を設計し，その可能性を探る。

3.2 授業デザイン

教授学的状況理論の視点から，文字や文字式，不等式の意味の学習が生じる授業を次のように構想した。

対象学年：高等学校第 1 学年

既習事項：第 1 学年の 2 次方程式，2 次関数。2 次不等式は未習とする。

環境：コンピュータを用い，生徒は二人で一台の Alnuset を用いる。

授業の構成：3 時間分の授業を想定した。ただし，ここでは方程式と不等式の解の意味を発見するまでの学習であり，4 時間目以降は 2 次不等式の通常の解の求め方へと展開していく。

> 1 時間目　主な課題
> (1) Alnuset の使い方
> (2) 課題 1：代数ライン上で色々な式をつくろう！作成した点を動かすと他の点はどのようになりますか？
> (3) 課題 2：次の 2 つの式，どちらが大きいでしょう。その理由は？
> (a) $x^2 + x,\quad 2x$
> (b) $x^2 + 2x - 3,\quad x + 3$

1 時間目では，まず Alnuset の基本的な使い方を説明し，課題 1 に取り組む。ここでは，Alnuset の使い方を学習しつつ文字式の構造を知ることを目標とする。次に，課題 2 に取り組む。この課題は，不等式が大小関係についての条件であることを知るための素地となるものである。目標は，2 つの文字式の大小が変数の値に応じて変化することを知ることである。また，ここでは，文字を変数として捉えるようにする。

> 2 時間目　主な課題
> (1) 課題 2 の復習
> (2) 課題 3：次の式が成り立つ x を求めよう！
> (a) $x^2 + 2x < x$
> (b) $x^2 - x + 1 > x + 4$
> (3) 課題 4：次の不等式の解を求めよう。
> (c) $-x^2 - 2x + 3 < -2x - 3$
> (d) $x^2 - x + 2 < 2x - 3$

2 時間目では，変数のとる値によって 2 つの式の大小関係が変化するという前時の課題 2 の復習の後，不等号を導入し，課題 3 に取り組む。ここでは，不等式の意味と不等式の解の意味を学習目標とする。課題 3 での文字は，式の変数であり，かつ未知数として捉えるようにする。なお，ここでは不等式を代数的に解決することを目標としない。

課題 4 では，課題 3 と同様の方法が使えないことに気づき，他の手段の必要性を感じ，それを探そうとするところまでを目標とする。この段階では，不等式の解と方程式との関係は必ずしも生じなくてもよい。

> 3 時間目　主な課題
> (1) 課題 5：課題 4 を解く方法を考えよう！

前時の課題 4 で，Alnuset を用いたおおよその解を得る方法を学習しているため，3 時間目では，正確な値を導く方法の発見が目標となる。不等式の解と方程式の解の関係に気づき，方程式の解を用いて不等式の解を表現できるようにする。この段階で解の範囲の特定 (つまり，$x < a$ もしくは $x > a$) は Alnuset の代数ラインを用いている。代数的な解決方法もしくは関数を用いた解

決方法は，本稿で扱わず，次時以降の内容とする。

3.3 起こり得る学習の検討

では，前述の授業においていかなる学習が生じ得るか，生徒の活動を想定しながらより詳細に検討する。

1 時間目

〇想定される活動

まず教師が Alnuset の基本的な使い方を説明する。それから生徒は課題 1 に取り組む。Alnuset を用いて，代数ライン上で好きな式を作成する。ここでは特定の式を指定していないため，何を作ればよいかわからない生徒には, x^2 や $2x + 3$ など具体的な式を提案する。教師はどのように文字式を作成するか支援する。また，生徒はペアで課題に取り組むため，お互いに協力し合って文字式を作成する。生徒の実際の活動としては，例えば $2x + 3$ を作る場合，まず，x を代数ライン上に作成する。その点を元にコマンド "□・□" を用いて，代数ライン上をドラッグすることで, "$2 \cdot x$" を作る。次にコマンド "□+□" を用いて, "$2 \cdot x + 3$" を構成する。ここで, 代数ライン上には "x", "$2 \cdot x$", "$2 \cdot x + 3$"の 3 つの点が表示される。教師は,「点を動かしてみよう」と生徒に促すことにより，生徒は x を動かすとそれに依存する他の点が動くこと，x 以外の点は動かせないことに気づく。

次に課題 2 では，教師はまず Alnuset を用いず，生徒にどちらの式が大きいか予想させ，その理由を記述させる。その後，生徒は，Alnuset を用いて，文字式を作成し比較する。(a) の場合，$x^2 + x$，$2x$ を作成し，その位置関係から大小を比較する。課題 1 で x の点を動かしていることから，ここでも同様に x を動かし 2 つの式の大小関係を認識することが予想される。その際，2 つの式の大小関係が変化することに気づく生徒もいれば，x を動かす範囲が小さく，大小関係の変化には気づかない生徒もいるであろう。後者の場合，教師は，生徒間のコミュニケーション等で気づけるように働きかける。また，大小関係の変化に気づいた生徒には，どのような場合に一つの関係が成り立つか見つけ記述するように促す。そして教師は本時のまとめをして授業を終える。

●起こり得る学習

課題 1 では，生徒が代数ライン上で文字式を一つ一つ作るため，文字式が構成されている順序を考慮する必要がある。$2x + 3$ の場合，まず "$2 \cdot x$" を作ることになる。順序を考慮しないで $x + 3$ を最初に作れば, その後 $2(x + 3)$ となり，目的とする式が得られなかったことに生徒自ら気づくことができる。これは, 式を作成するという milieu (Alnuset) への働きかけ (action) に対し，$2(x + 3)$ という milieu からの情報が feedback となっていると言える。また，式を作成する際に作られた点すべてが表示されるため, x の移動という milieu への働きかけにより，生徒らは 2 点間の関係が情報として得られると予想される。つまり, $2x + 3$ の場合，x と $2x$，$2x$ と $2x + 3$ それぞれの関係である。x と $2x + 3$ の関係は点の動きから明瞭ではないが, x と $2x$ では間の距離が徐々に大きくなること，$2x$ と $2x + 3$ では間の距離が一定であることに気づくことができる。なお，点を移動する際，x 以外の点を選んだ場合は，点が動かない。これは, 点を動かそうとする milieu への働きかけに対し，動かないという情報を feedback として与えている。つまり，依存関係の存在に生徒らが自ら気づける環境となっている。以上のように，課題 1 では，文字式の構成の順序，作成された複数の式 (点) の間の関係，依存関係に生徒自ら気づける状況，つまり亜教授学的な状況になり

得ると考えられる。

課題 2 では，最初に教師が生徒に大小関係の予想をさせるため，Alnuset からの点の位置関係の情報がその予想の feedback になる。これは，どのような予想が出てくるかによるが，$x^2 + x$ ，$2x$ では，前者が 2 乗を含むため，前者が大きくなると予想する生徒が想定される。その場合，Alnuset での x の移動という action により，[0,1] の区間では $2x$ が $x^2 + x$ より小さくなるという feedback を得られる。さらに，x を負の方向に移動することにより，x が小さくなれば，$x^2 + x$ が $2x$ より再度大きくなるという情報が得られる。こうしたことを通して，大小関係が変化することに生徒自ら気づくことができる。大小関係が一定の範囲が 1 か所しかないと予想している生徒もいるであろう。Alnuset において，大小関係が変化しない範囲でのみ x を移動していると，Alnuset から feedback を得ることはできない。特に (b) では，$x = -3$ で大小が変化するため，正と 0 近辺の範囲に x を動かす場合は feedback が得られないであろう。この場合は，他の生徒とのコミュニケーションや発表が自分の答えと異なるという feedback となり，x をより広い範囲で動かすことに導くであろう。

以上のように，1 時間目では，試行錯誤で文字式を作り，x を移動させ大小関係を探る (試行錯誤の状況)。課題 2 では理由や答えを記述させること，他者とのコミュニケーションを図ることにより，Alnuset 上でのアイデア (「x が 1 以上では $x^2 + x$ が大きい」など) が少し定式化されると考えられる。また，アイデアの妥当性については，Alnuset が保証しており，数学的な妥当性ではない。

2 時間目

○想定される活動

教師は，まず 1 時間目の課題 2 を振り返り，どのような答えになったか生徒に問いかける。この問いかけに対する答えを利用して不等号と不等式を導入する。例えば，(a) の場合に，0 から 1 の間で $x^2 + x$ が $2x$ より小さくなるなどの発言から大小関係を表す記号として，$0 < x < 1$ では $x^2 + x < 2x$ と不等号を用いて表すことを説明する。そして，課題 3 を提示し，教師は「どのような値でこの式が成り立つでしょう？」と生徒に問いかけ，こうした大小の条件が与えられた式を不等式と呼ぶことを説明する。そこから，生徒は課題 3 に取り組む。生徒は Alnuset を用いて，課題 3 の不等式の左辺と右辺をそれぞれ入力し，x の値を移動させながら，成立するときの x の値もしくは範囲を見つけ記述する。解がどの辺りにあるかペアで協力しながら取り組む。課題 3 (a) の場合, 生徒は 2 つの文字式 $x^2 + 2x$ ，x をそれぞれ作成する。x の値を移動させることで，x が-1 から 0 の間で常に不等式が成立することに気づき，記述する。その際，教師は，言葉を用いた答えと不等号を用いた答えの両方を記述するように促す。なお，前時の活動で 2 つの式の大小関係が変化することを知っていることから，ここで大小が変化する点を発見できない生徒は少ないと考える。大半の生徒が (a) と (b) の両方を終えた段階で，教師は生徒に解答を発表させ, クラス全体で解答を確認する。教師は，生徒自らが答えた解答において，数学的な記号を用いて表現でき，不等式の解の表し方を説明する。例えば，課題 (a) では, x が-1 から 0 の間という言葉の表現を “$-1 < x < 0$”と記号で表すこと，課題 (b) では，x が-1 より小さいときと x が 3 より大きいという言葉の表現を “$x < -1$，$3 < x$” 記号で表すことなどを説明する。そのとき，この表したものが 2 次不等式の解であることをはっきりと確認しておく。

次に，課題 4 では，生徒は課題 3 と同様に取り組む。しかし，課題 4(c) では，生徒は入力した式がある程度の範囲の解まで予測することができるが，2 つの文字式が整数値で重ならないため，正確な値が得られないと感じる。教師は生徒の動向を見つつ「正確な値を出したいよね」「どうやったら出せるだろう」などと投げかけ，生徒に考えさせるにとどめる。そして, 2 時間目は, 生徒がある程度考えたところで終える。

●起こり得る学習

2 時間目の最初に教師が前時の課題 2 を復習し，その際に不等式を導入するため，大小関係を表現する方法は，言葉の表現から記号の表現へ教師が定式化することになる。さらに，不等式についても，大小関係が指定された条件式であることが教師により定式化される。

課題 3 で，生徒は，代数ライン上で不等式の左辺と右辺を作り，変化する大小関係において，指定された大小関係となる x の値を探る。課題 3 (a) $x^2 + 2x < x$ では, $x^2 + 2x$, x の 2 つの式を作成し, x の値を移動させ, $x^2 + 2x$ が x より常に小さい値を探り，$-1 < x < 0$ を得る。ここでは，x の移動という milieu への働きかけに対し, 2 点の位置関係が milieu からの情報として得られる。前時の活動より，2 つの式の大小関係が変化することを知っているため，ここで得られるものは情報であり feedback ではない。また，解の表現方法については，教師が 2 時間目の最初に説明してはいるものの，ここでは不等号を用いて生徒自身で定式化しなければならない。ペアでの活動であるため, 相手の生徒との相互作用により，定式化がなされるであろう。

課題 4 は，課題 3 までで容易に解の重なる点 (ポイント) を得られるという期待に対する feedback を与えるものである。具体的には，課題 4 (c)では，代数ライン上での x の移動に対し，大小関係の変化が 2 から 3 の間で生じることが feedback になる。さらに，課題 (d) では，x の値をどこに移動しても求められた大小関係が成立する点がないことが feedback となる。課題 (c) では，これによりいかに値を求めることができるか探る状況に移行する。一方，課題 (d) では，成立する点が本当にないのかその妥当性を探る状況に移行する。

以上のように，2 時間目では，前半は主に不等式の解の定式化の状況となっている。後半は，課題 (c) により，さらに別の解決方法を探る試行錯誤の状況となっている。

3 時間目

○想定される活動

教師は，2 時間目で扱った課題 4 の解答をいかに解くことができるか問いかける。最初は課題 (c) を検討する。生徒は入力した式の値の重なる点が整数の値ではないことから他の解法を考える。教師は課題 3 などこれまでの課題では，いかに答えを得られるか考えるように促す。それにより，生徒はもう一度，課題 3 を振り返り，課題 4 との違いを探る。具体的な活動として，課題 3 から生徒自らが発見して入力した解答のポイント (点) が x の値について，どのようなものであるか考え始める。もしくは, 不等式に直接, 値を代入して計算し始める。ここでは，ペアでの活動であるため，生徒間のコミュニケーションなど，解について話し合うことも行う。例えば，課題 3 (a) を利用した場合，-1，0 の値そのものについて考える。生徒は紙上で不等式 $x^2 + 2x < x$ の x の値に数値を代入してみる。ここで，$x = -1$ を代入した場合, 計算結果から両辺の値が等しくなることを見つける。さらに, 不等式が方程式に類似した関係であると考え始める生徒もいる。こうしたことから, 生徒は課題 3 の問題を方程式のように記述

し解き始める。例えば，課題 3 (a) の場合，$x^2 + 2x = x$ と見立てて解く。このことにより，$x = -1, 0$ を得ることができる。そこで，Alnuset で設定した点と方程式の解との関わりがあることに気づく。さらに，課題 4 を同じように解き始める。あらかじめ，Alnuset より解の予想を行っているため，予想した解と実際に記述して求めた解答を比較することできる。例えば，課題 4 (a) の場合，不等式を方程式に見立てて，$-x^2 -2x + 3 = -2x - 3$ と解き，$x = \pm\sqrt{6}$ が重なる点であることに気づく。また，教師は課題 4 の活動では，解を Alnuset で確認するように生徒に促し，自ら解の妥当性を判断できるようにする。

課題 4 (c) を終えた生徒は，次に，課題 4 (d) に取り組む。(d) では，代数ライン上で大小が変化しないため，解がないと予想し主張する生徒もいるであろう。そうした場合は,「ほんとうに？代数ライン上を全部調べた？」と問い，解がないとする根拠を考えさせる。(c) の場合の方法を用いて，方程式に見立てて $x^2 -2x + 2 = 2x - 3$ を解こうとする生徒もいるであろう。しかし，今度は解けない。最後に教師は不等式の解についてさらに考える必要があることを示唆し，今回の授業をまとめて終える。

●起こり得る学習

課題 4 を解くために別の方法が必要であることから，生徒は方法を試行錯誤しながら探る。その際, milieu は Alnuset ではなく，紙と鉛筆の環境での課題である。特に，課題 3 を振り返った際は，与えられた不等式と得られた解（特に大小関係が変化する点の値）を milieu として，その解が代数ラインを用いずにいかに得られるか試行錯誤する。課題 3 (a) では，-1 と 0 のどちらかの値を元の不等式に代入し計算するという action に対し，milieu から $-1 = -1$ や $-1 < -1$ などの情報を得る。ここから生徒は，式の大小が変化する点の値が代入すると左辺と右辺が同値になる点であることに気づく。これにより，不等式の解と方程式の解との関係に気づき始める。課題 3 では，代入を用いず，不等式をそのまま方程式のように変形・因数分解するという action を起こす生徒もいるであろう。その際は，この action に対する milieu からの情報として $x(x + 1) < 0$ を得て，方程式の解との関係に気づき始める。なお，ここで，生徒と milieu との相互作用の結果は解決の方法である。この方法は，ペアで活動することにより，「方程式と同じように解ける」などと定式化されるとともに（定式化の状況），課題 3 (a) や (b)，さらに課題 4 で試すことにより妥当性が高められる (妥当性判断の状況)。

次に，課題 4 (c) では，課題 3 で定式化した方法を適用する。生徒は，両辺を方程式の解を求めるときのように整理し (action)，$x^2 - 6 = 0$ もしくは $-x^2 + 6 < 0, x^2 - 6 < 0$ などの式を情報として得るであろう。いずれの場合でも，生徒は正確な値を求めることを目的とするので，ここでは $\pm\sqrt{6}$ を得て，その点で大小が変化することに至るであろう。範囲を $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ とするか，$x < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < 0$ とするかは，生徒は Alnuset との相互作用（代数ライン上での点の移動）で判断する。また，生徒によっては方程式と全く同様の方法を用い，$x < \pm\sqrt{6}$ などといった解答を出す可能性もある。この場合は，Alnuset の代数ライン上で，x の点を移動させることで，式の大小が自らの解答と代数ライン上で一致しないことが feedback となる。したがって，ここでは，不等式の解の妥当性を自ら判断できる状況（亜教授学的状況）になっている。

課題 (d) では，生徒と Alnuset との相互作用から，代数ライン上で大小が変化しない情報を得て，解がないと予想する。しかし，今度は，方程式が解けないため，この

ことが課題 (c) で見つけた方法に対する feedback となり，さらに別のことを考える必要性を生じさせる。

4. おわりに

以上が，不等式の意味の学習を目標とした Alnuset を用いた授業の検討である。今回は，発展的な学習ではなく，不等式の意味という非常に基礎的な内容でのテクノロジー利用を検討した。代数ライン上の動的な点を利用することにより，2 つの式の大小関係から生徒が不等式の意味や不等式の解の意味という代数の基礎的な内容を十分認識できる授業になっているのではないだろうか。特に，従来の紙と鉛筆環境では，変数を動的に扱うことができず，こうした不等式の意味を十分扱えなかった。変数を動的に扱うことができたのは，テクノロジーを利用したからこそである。本稿で提案した授業は，今後，実際に不等式の意味の学習を可能とするか，授業でいかなる制約があるか，教授実験により検証していく。さらに，今回は不等式の解と方程式の解とのつながりまでを対象とした授業であり，不等式単元すべてに対するものではない。今後は，より包括的な授業デザインが求められるであろう。

注

1) Alnuset は Italian Research Council (CNR) の ReMath European project の Institute for Educational Technology で開発されたものである。DiDiMa という研究における専門的知識、数学教育とソフトウェアデザインを持っているプログラムのオリジナルの開発者によって運営された CNR スピンオフ企業によって配布されている (http://www.alnuset.com/en/home)。

参考文献

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7–17). Potsdam, Germany. http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000.

Brousseau, G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht:Kluwer Academic Publishers.

Chiappini, G. , Pedemonte, B. (2008) The design of new digital artefacts as key factor to innovate the teaching and learning of algebra: The case of Alnuset. In *Proceedings of CERME* 6,1389-1398.

Pedemonte, B., Chiappini, G. (2008). ALNUSET: a system for teaching and learning algebra. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning (IJCEELL) 18, 5/6*, 627-639.

岡崎正和 (2001) 「全体論的な視座からの授業設計に関する考察－中学校 1 年の文字式・方程式の授業デザインに向けて－」上越教育大学数学教室，16，47-56.

垣花京子 (2007) 「ITの活用で数学教育は変わるのか？－動的図形学習ソフト Cabri-Geometryの実践研究からの考察－」，日本科学教育研究，31，pp.62-63.

国立教育政策研究所『TIMSS2003算数・数学教育の国際比較　国際数学・理科動向調査の2003年調査報告書』，ぎょうせい，2005。

清水克彦 (2008) 「コンピュータを駆使して問題を解く能力の育成の重要性」，日本科学教育学会，32，pp.399-402.

清水克彦『コンピュータで支援する生徒の活動—数学科・図形分野での新しい展開—』，明治図書出版，1999。

杜威 (1991). 『学校数学における　文字式

の学習に関する研究　数学の世界から文字の世界へ』，東洋館出版社。
藤井斉亮 (1987) 「方程式・不等式における文字 X の意味についての一考察－認知的コンフリクトを視点としてー」，数学教育論文発表会要項，20，pp.87-92.
宮川健 (2002) 「教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察」，筑波数学教育研究第 21 号，63-72.
宮川健 (投稿中) 「フランス数学教授学～「学」としての数学教育研究をめざして～」，23 pages.
文部科学省 (2009). 『高等学校学習指導要領解説 数学編理数編』，実教出版。
文部科学省 (2009). 「教育の情報化に関する手引」検討素案：http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/056/shiryo/attach/1244851.htm.
山口格 (1986) 「数学教育における不等式の研究」，教授学の探究，4，89-103.