

証明学習におけるコミュニケーションの役割

松井 悠香

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

今日, コミュニケーション能力があらゆる分野で重要視されている。中学校学習指導要領解説 (2008) では, 「表現することは知的なコミュニケーションを支え, また, 知的なコミュニケーションを通して表現の質を高められ, 相互にかかわりあいながら学習を充実させることにつながる」 (中学校学習指導要領解説数学編, 2008, p.17) と記されている。

数学教育におけるコミュニケーション能力とは, 自己の考えを他者にも納得のいくよう論理的に述べることができる力であり, そのような力を育むためには, 証明学習指導の充実が必要である。なぜなら証明は, 言わばある事柄が正しいことを筋道立てて述べることからである。したがって, 今証明学習に必要とされていることは, 他者と係わり合いながら, 自己の考えの修正や正当化を行い, その考えをいかに証明するか考えていくことであろう。

一方, これまでの証明学習には演繹的な考え方の理解が求められていた。実際には「証明の形式」ばかりが強調され, 仮定及び結論を問題文から正しく読み取り, それを形式的に順序よく並べていくことが求められていた。これは, 教科書で記されている証明の意味, 「すでに正しいと認められたことがらをよりどころとして, あることがら成り立つことを筋道立てて述べること」

(吉田稔, 2001 年発行, p.115) という記述の示すところに留まるものと考えられる。

筆者が受けてきた証明学習を思い起こすと, 導入期に提示された問題は証明問題というよりは寧ろ, 穴埋め問題のようであり, その後の学習は形式的, 機械的な学習であったように思える。このような学習を繰り返すことで, 生徒は証明の形式に対する知識を得ることはできる。その一方で, 証明学習の意義を感じることができず, 証明の本来の意味である, 「ある事実が正しいことをまず自分が納得し, 他人を説得する手だてである」 (中学校学習指導要領解説, 2008, p.41) ことは理解できないのではないかと考えられる。

本稿では, このように形式的, 機械的な指導になりがちな証明学習に対して, 子どもたちが学ぶ意義を感じる証明学習を目指し, 証明の学習活動をみる視点を構成することを目的とする。そのために, まず証明の幾つかの機能と役割に着目し, 証明がそれらとどのように関係しながら為されていくのか, 具体的な事例を基に考察していきたい。

2. 証明に関する先行研究

我が国において, 証明学習に関する研究及びその機能に関する研究は, 数多く為されている。それらの研究は, 数学教育における証明の機能の観点からいくつかの機能

に分類されている。そして多くの論文においては、それらの機能の全てに重点を置くのではなく、ある特定の機能に焦点を当てて研究が行われている。(梅川, 2001, 五十嵐, 2005, 灰野, 2005 など)。

本稿ではまず、多くの研究で述べられている証明の機能とはどのような機能であるのかを明らかにする必要がある。そして、それぞれの機能が証明を行う上でどのように役割を果たすのかを考察する。

証明の機能の分類には様々あるが、本稿では de Villiers (1990) の証明の 5 つの機能に着目する。de Villiers (1990) は自身の証明の機能を、「Bell (1976) の 3 つのセンスの僅かな拡張」(de Villiers, 1990, p.18) であると述べている。ここで、Bell (1976) の 3 つのセンスとは、立証あるいは正当化 (verification or justification), 鮮明化 (illumination), 体系化 (systematization) である。これは証明が人に与えるものと捉えている。一方 de Villiers (1990) は人が証明を使うことで何ができるかを捉えている。次に de Villiers (1990) の証明の 5 つの機能と役割を明らかにする。

2.1. de Villiers (1990) における証明の 5 つの機能と役割

伝統的に証明の機能は、数学的な陳述の正確さの言い回しとしてみられてきたが、de Villiers (1990) はそれを批判し、数学における証明の異なる機能として次の 5 つを提示している。

- ・立証 (verification)
陳述の真実に関すること
- ・説明 (explanation)
それが真実である理由について洞察を与えること
- ・体系化 (systematization)
公理、主な概念や定理の演繹的な

体系の中に様々な結果を組織化すること

- ・発見 (discovery)
新しい結果の発見あるいは発明
- ・コミュニケーション (communication)
数学的知識の伝達
(de Villiers, 1990, p.18)

これらに重要性の順序はないとしている。次に、5 つの機能についての概略を述べる。

(i) 立証／確信の機能

de Villiers (1990) は、「証明は、絶対的な確かさを与え、それゆえ証明の正当性の立証には完全な権威がある」と述べている。また、確信 (確かさ) は、「証明するための前提条件である」(de Villiers, 1990, p.18) とも述べている。なぜなら、多くの証拠を集めることは、対象の疑問を解消し、証明する対象が正しいと思う要素になるからである。このような確信がなければ、数学における証明は為されないと指摘している。加えて立証については、厳密な証明よりも確信の水準は高く、証明しなくても疑問を打ち消すことができることも述べられている。

したがって、確信は証明を行う第一歩である立証を行うための重要事項であると考えられる。しかし、「関係結果が直観的に自明およびまたは説得力のある準経験的証拠によって確証されるとき、数学者にとっての証明の機能は必ずしも立証の機能ではなく、むしろ説明の機能である。」(de Villiers, 1990, p.20) と述べている。

(ii) 説明の機能

立証/確信の機能に対して、「準経験的な立証の手段によって推測の妥当性が完全に信頼の水準を達成することは可能であっても、なぜそれが真であるかの十分な説明は一般に与えない。」(de Villiers, 1990, p.19)

と述べている。

多くの考察は真である確信を高めることはできるかもしれないが、結果がなぜ真であるかの十分な説明を与えることや、洞察や理解に対して心理的な満足感を与えることができず、ただ確認するだけになるのである。ここに立証することと説明することの大きな違いが存在し、多くの数学者にとって証明の説明や理由の見方は、立証の見方よりも重要であるとされている。また、「Manin (1981:107) と Bell (1976:24) も説明は『私たちがより賢明にするもの』であり、その命題がなぜ正しいかということに対しての洞察をもたらすことが期待されるということをそれぞれ述べている時の『いい』証明の基準になる」(de Villiers, 1990,p.20) と述べられている。

(iii) 体系化の機能

体系化については、重要な機能として5つの機能を挙げている。

- (1) 仮定が正しいかどうかを見ることができること
- (2) 陳述、定理や概念などを統合することで理論を簡素化し、簡潔な結果を導くことができること
- (3) 証明しているものがよく見えること
- (4) 公理や定義の適合をチェックすることで、数学の内外面の適応に役立つこと
- (5) 新しい視点を与えることでもっとよい体系を導くこと

(de Villiers, 1990,p.20)

(1)は、矛盾や循環論法、視覚的には解らない仮定の存在を判断する役割である。

(2)は、他で発生した陳述、定理や概念などを合わせることにより、それぞれの数学の理論を統一し、簡素化することができる。

そしてさらにその結果の簡潔な提示を導くことができる。

(3)は、証明に用いられる性質が演繹されることによって、その構造を陳述することによって、対象の全体の見方あるいは鳥瞰図を得ることができる。

(4)は、証明に用いられる公理や定義は、証明に適合するか判断されるため、複雑な構造や簡単な論理全体の適用性を調べることを高める。したがって、数学内での応用、数学外での応用に有益である。

(5)は、新たな視点の演繹的な体系を導いたり、より説得力のある演繹的な体系を導いたりすることである。

以上のことから、証明を行うことにより様々な体系化の役割が果たされることがわかる。

(iv) 発見の機能

発見については、「演繹的公理化や定義することのような形式的な推論による過程の文脈の中でさえ、しばしば証明は新しい結果を導くことができる」(de Villiers, 1990,p.21) と述べている。つまり、既知の対象の特性を分析することによって、他の対象とのつながりを見つけ、広がりをもたらすのである。したがって、同じ仮定から新たな結果を発見することができると述べられている。

(v) コミュニケーションの機能

「最近の数人の著者が証明のコミュニケーションの機能の重要性を強調した。」(de Villiers, 1990,p.22) と述べ、次のような引用を行っている。

『数学をしている人々の間でコミュニケーションの意味で証明は、会話の形成であるように思われる』

— Volmink (1990:8)

『人間のやりとりは意味の共有を基礎にし、言葉のや公式が全てではない』

— Davis & Hersh (1986:73)

『証明の本当の意義の一つは、証明が批判的な論争のフォーラムを作ることである』

— Davis (1976)

(de Villiers,1990,p.22)

この見方から、コミュニケーションの役割を「証明は数学的な成果を伝達する独特な方法である」(de Villiers, 1990, p.22) としていると考えられる。したがって、コミュニケーションの機能とは、概念や使う対象によって生じる違いを社会的濾過し、共通のものを生み出すことである。社会的濾過とは、「関係する概念の意味することだけでなく、暗黙のうちに受諾しうる議論の基準についての主観的な相互交渉」(de Villiers,1990,p.22) であり、統一した理由付けを考えていくことはである。そうすることで、対象を評価することができると考えられる。また、「様々なコミュニケーションの中の証明の社会的濾過は、反例の発見によって否認することだけでなく、その証明の改善や誤りの識別を与える」(de Villiers,1990,p.22) と述べている。

2.2. 証明の5つの機能に対する de Villiers (1990) の見解

de Villiers (1990) は、「互いに区別されることができるけれども、それらは特定のケースでしばしば詳細に連結される。ある場合にはある特定の機能が他の機能を支配するかもしれない、他方若干の場合には特定の機能がまったく役割を果たさないかもしれない」(de Villiers, 1990,23) と指摘している。

また、「立証の手段としての証明にだけ一方的に焦点を合わせるよりむしろ、生徒にとって意義ある活動としての証明を提示す

るために、いっそう基本的な説明の機能を利用すべきである」(de Villiers,1990,p.23) としている。ここで、説明を「いっそう基本的な」としている点で重視している機能であると判断できる。

さらに、「それと同時に注意すべきことは、受容できる証拠、説明または証明についての基準を生徒たちの活動を通して相互交渉するコミュニケーションの見方、と同じく証明の発見の機能を与えるべきである」(de Villiers,1990,p.23) とし、「証明の純粋な体系化の機能は非常に高度な段階の砦においてのみ表面化される。それゆえ導入期においては保留されるべきである」(de Villiers,1990,p.23) と指摘している。「証明の純粋な体系化の機能」としていることから、完成した証明に対して体系化を見ていると考えられ、その上で体系化は「導入期においては保留されるべきである」としていると考えられる。

3. 証明の流れと証明の機能の関係性

前節では、de Villiers (1990) の5つの機能と役割をみてきた。本節では、証明を行うときの我々の思考段階において、de Villiers (1990) の5つの機能がどのように関係しているのかを考察していく。

前節で述べた de Villiers (1990) のコミュニケーションの機能は、他者との間で果たされる機能であった。しかし筆者は、その役割は自分自身の中でも行われる「自己内対話」であると考え。「自己内対話」について、中学校学習指導要領解説 (2008) において次のように述べられている。

「数学的活動の過程では、何を考え、どのように感じているのか、自分自身と向き合わなければならない。自分自身の言葉で着想や思考を表わすことにより、自分の考えを再認識することができる。こ

うした言語で表わされたものは、自分の考えを見つめ直す反省的思考を生み出し、さらに研ぎ澄まされたものとなっていく。この自己内対話の過程は、他者とのコミュニケーションによっていっそう促進され、考えを質的に高める可能性を広げてくれる。」

(中学校学習指導要領解説,2008,p.29)

上記の事柄は、証明の機能に対する具体例が示されていると考えられる。自分自身の考えと向き合い、自分自身の言葉で表すことで考えを再認識することは、de Villiers (1990) の示す証明の機能の立証／確信、説明の機能に値し、考えを見つめ直す反省的思考により研ぎ澄まされた考えを生むことは、体系化、発見の機能に値する。したがって、証明学習における自己内対話とは、自身でコミュニケーションの機能を基盤とし、その他の機能を用いることによって証明を完成させることであるといえる。

以上のことから、コミュニケーションの機能に自己内対話の役割を導入し、証明の流れと de Villiers (1990) の 5 つの機能との関係性を以下で考察していく。その関係性は、図 1 のようになると考えられる。命題（数学）と他者（社会）との関係性は、命題（数学）と自分の関係性と同じであり、自己内対話は命題（数学）と自分及び社会間の、立証、説明（理由）、発見、体系化を行うことであると考ええる。以下の文中に記す①から⑥は図 1 のものに相当する。

まず証明を始めるとき、その説明を考える前に対象が真であろうという確信を求める立証（①）を行う。そして対象が真であるという高い確信を得られたならば、我々はその確信を基に説明を考える。

前節で述べたように、証明とは「他者を心理的にも十分納得させることができるくらい詳しく述べること」であった。すると、

立証を行うことで陳述の真実に関することを示すことはできるが、立証のみでは証明が成されたと言えないことに気づく。つまり、なぜ対象が真実である理由についての洞察を与える説明（②）を行わなければならない。

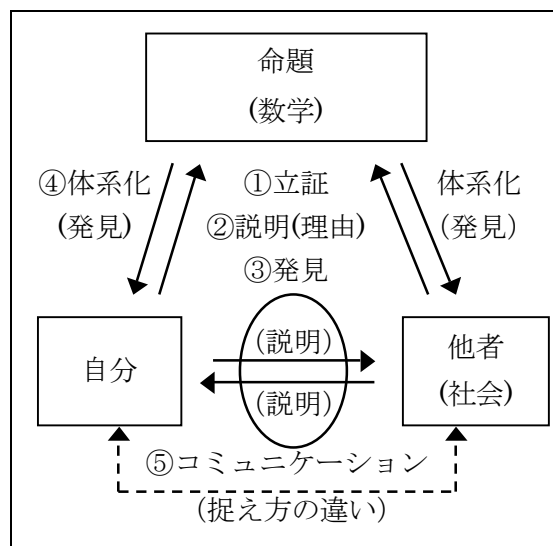


図 1. 証明の流れと証明の機能の関係性

ここで、証明を行うときには 2 つの場合があると考ええる。1 つは一人で証明を考えていく場合である。この場合、説明を自分自身で考えなければならない。したがって、理由の妥当性や正当性について自身で判断しながら、対象が真実であることを考えていく。すなわち、自分自身とコミュニケーション（自己内対話）を行いながら説明（②）を行うのである。また、妥当性や正当性の判断を行う際の気づきは、既知の対象を分析することや他の対象とのつながりを見付けることであり、生徒にとって大きな発見（③）となる。さらに、説明を確立させていくためには、自身の中で生まれた事象たちを統合することで理論を簡素化し、簡潔な結果を導く体系化（④）を行う必要がある。このような発見や体系化を行う中でも自分自身とコミュニケーション（自己

内対話)を行っている。

ゆえに、説明(②)を行うためには、コミュニケーション(自己内対話)を通して立証(①)や発見(③)、体系化(④)を繰り返し行う必要がある。以上の活動を行うことで証明は形成されることが考えられる。

証明を行うもう1つの場合は、二人以上の集団で証明を考えていく場合である。この場合にも2つの場合があると考えられる。1つは初めから二人以上の集団で考えていく場合、もう1つは初めに一人一人に証明を行い、その後二人以上の集団で考えていく場合である。本稿では後者の場合を考える。

この場合、まずは一人一人に証明を行う。これに関しては、先に述べた過程を辿る。したがって、その後の二人以上の集団で考える場合の流れと証明の5つの機能の関係を以下で考察していく。

複数の集団で証明を考えていく場合、証明は他者との間で意見を交換しながら統一した理由付けを行うことで形成されていく(社会的濾過)。個々人でコミュニケーション(自己内対話)を行い考えた証明を、集団の中でのコミュニケーション(⑤)により濾過していく活動は、一人一人に考えた説明よりも吟味されたものであり、質が高められた説明であるといえる。なぜなら、コミュニケーション(⑤)により互いの考えを濾過していくことで、一人では説明できなかった子どもは、他者の説明を聞いたり、問いかけたりすることで、問題点を解消することができ、自身の説明をもつようになるからである。

説明と同様に、発見(③)や体系化(④)においても、他者とのコミュニケーション(⑤)により、他者から発信される情報や自身の投げかけに対する返答を自分自身とコミュニケーション(自己内対話)することで、一人一人に証明を行った中で生まれた

ものよりも、より質の高い発見、体系化を行うことがわかる。したがって、複数で証明を考えていくと、一人で証明を考えたときよりも質の高い証明を成すことができると考えられる。

証明は他者を心理的にも十分納得させる説明を行うことである。したがって、二人以上の者で証明を行うことは、本来の証明の意味に大変忠実であり、互いを高め合うことのできる学習であるといえる。そして先にも述べたが、一人一人に証明を考えていくこと、学習指導要領解説(2008)で記されている自己内対話は、de Villiers(1990)は述べていないが、コミュニケーションの機能の一つの形態であるといえる。ゆえに、証明を行う過程で、所々にコミュニケーションの機能が重要な役割を果たしているといえる。

しかし、筆者が受けてきた証明学習ではこのようなコミュニケーションの機能を通して立証や発見、体系化の機能が役割を果たすような授業展開が為されていなかった。そこで、2010年「実践場面分析演習Ⅰ」授業内に実施した証明学習の具体例を基に、de Villiers(1990)が示した証明の5つの機能と役割がどのように関係しているかを考察を行う。ここで、これ以後で述べる証明の5つの機能と役割には、コミュニケーションの機能の一つの形態として自己内対話を含むものとする。

4. 授業内における証明の機能と役割

現在の証明学習における指導内容は、問題提示の際に「～であることを証明しなさい」という形で、結論が示されている。また、中学校数学で取り上げられている証明は主に図形領域であり、問題とされる事柄は、小学校で既に学習した内容や、直前に学習した図形の性質をよりどころとして、証明を行う問題ばかりである。

したがって、問題を解く生徒たちは、証明すべき対象が真実であることに対しては、生徒自らが確信を得ることはなく、立証するための方法に対して確信を得ようとすると考えられる。そして、説明に至までに何度も確信と立証を繰り返す。また、その結果は生徒にとっては新たな発見となる。そのようにして証明は為されていくと考える。

そこで具体的な授業を基に証明学習における証明の機能と役割の関係性を分析する。下記の授業は、大学生及び大学院生を対象に行った授業であり、中学生を対象に行った授業ではないが、証明学習を分析する上では有効であると考ええる。

4. 1. 授業の概要

2010 年「実践場面分析演習Ⅰ」授業内において、上越教育大学学部生・大学院生を対象に次項に挙げる問題を実施した。その概要を以下に記す。

(ⅰ) 授業のねらい

「三角形の内角の和は 180° である」ことの説明を考える場面を設定し、生徒に類推的、帰納的な考えへの疑問を生じさせ、演繹的な考え方へ移行させることを試みた。

(ⅱ) 実施方法

2010 年 6 月 18 日に、上越教育大学大学院の「実践場面分析演習Ⅰ」授業内において、同学校の学部生及び院生を対象にして、多角形と角の単元における授業を実施した。授業の様子は 1 台の VTR で記録した。

(ⅲ) 生徒について

対象とした学生は、学部 3 年生 3 名、学部 4 年生 3 名、修士 1 年生 2 名、修士 2 年生 3 名であり、クラス一斉授業による形態で行った。生徒の習熟度は特に設定を行わず自由とした。また、三角形の内角の和は

180° であることを小学校では、分度器で測ったり、紙を切って並べたりして調べることを認識しているとした。既習事項は、次のように設定した。

- ・多角形の内角の和は $180 \times n(n-2)$ である。
- ・ n 角形の外角和は 360° である。
- ・対頂角の性質：対頂角は等しい
- ・平行線の性質：平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき、次の性質がある。
 1. 同位角が等しい
 2. 錯角が等しい
- ・平行線であるための条件：2 直線に 1 つの直線が交わるとき、次のどちらかが成り立てば、それらの 2 直線は平行である。
 1. 同位角が等しい
 2. 錯角が等しい

(吉田稔, 2001 年発行, p.93-99)

(ⅳ) 実施計画について

三角形の内角の和に関しての授業を考えた理由は、多くの生徒が小学校において実験・実測による説明から「三角形の内角の和は 180° である」ことを学習し、中学校の証明学習の導入において、演繹的な考え方の第一歩として学習するからである。またこの命題は、類推的、帰納的に考えた時に生徒が矛盾を実感しやすいため、演繹的な考え方への移行を比較的容易に行うことができると考える。

4. 2. 実践場面分析演習Ⅰにおける分析

授業は、「『三角形の内角の和は 180° である』の説明を考えよう」と本時の目標を提示することで開始する。三角形の内角の和については小学校での既習事項であり、和が 180° であることは生徒にとって既習知識である。

小学校においては、実測や実験による説明を通して内角の和が 180° であることを学習する。しかし、中学 2 年生に求められている説明は、そのような実測や実験を用いた説明ではない。直前に学習した平行線

と角の性質を用いることで、筋道立てて述べることを、すなわち証明を行うことである。

ところが、生徒たちは小学校での学習で上記に記したように、実測・実験の結果によって「三角形の内角の和は 180° である」という知識を習得したため、その説明を求めたとしても、初めから証明を行うことは少ないと考えられる。さらに、そのような説明で十分であると考えている生徒が大多数であり、生徒がどのように演繹的な説明に必要性を感じていき、そのときどのような証明の機能と役割が関係しているのかを分析する。

(i) 実測による結果から行う証明

生徒たちは「三角形の内角の和は 180° である」の説明を考えるにあたり、 180° であるということは確固たる真実であると考えており、「3つの角をそれぞれ測定し、その和をとると 180° になっている」であろうという強い確信を持ち、立証を始める。

しかし、実際に測ってみると 180° になった者もいれば、ならなかった者も現れた。前者については立証により命題が真であることが言えたので、「分度器で測ってみるとそれぞれの角度は A° と B° と C° であり、その和をとると 180° になった。ゆえに、三角形の内角の和は 180° である。」と説明することができる。そして生徒自信も心理的に満足することができ、説明を証明へと変換することができる。

後者については、立証を始める前の強い確信とは裏腹に異なる結論を得ることになり、再び確信を得る活動へと戻る。あるいは、同じ確信の基に、他の三角形を用いて測定を始める。このような帰納的思考による活動が為されるのは、小学校の実測及び実験を用いた、「分度器で測った和は 180° になる」という学習の印象が強く、強い確信として生徒の中に存在するからではない

かと考えられる。

(ii) 実験による結果から行う証明

小学校での学習では、分度器を用いた実測の説明の他に、三角形3つの角を一カ所に集めると一直線に並ぶという実験の説明が為されている。そのため、この説明を採用し、立証及び説明を行う生徒も多かった。

生徒が実測による説明により示すことから離れたとき、 180° であることを説明するためにはどのようなことが示されればよいか、を考える。すると、「3つの角の和が 180° であれば、それぞれをしきつめて並べると一直線になる」という視覚的な判断から、命題が真であることの確信を得ようとするのではないかと考える。したがって、生徒は「三角形の内角の和は 180° である」のだから、3の角を並べてみれば 180° を示すであろう」という確信を持ち、「三角形を3つの角が別れるよう適当に切り、それを一カ所に集めると一直線に並ぶので 180° である」という立証を確かめ始める。

しかし、実際にみると一直線に並んでいるといえる者もいえない者もいた。この結果に対する見解には2通りの見方があった。両者の違いには小学校での学習が強く関係していると考えられる。前者は、内角を 180° になるよう意図的に並べていたり、初めに書いた直線と内角が成す線との誤差に対して重視していなかったり、 180° であるという結論からの影響を強く受けている。それに対して後者は、 180° になることよりも、実験の結果を重視しており、視覚的な判断に疑問を抱き始める。このように考える生徒の多くは、実測において 180° にならなかった。

したがって、実験による説明は3つの角を一カ所に集めることはできるが、その和の正確な角度は判断することができないと考え、他の方法により立証し、説明を考え

ようとする。

4.3. プロトコルによる分析

本項では、4 つの考える場面をプロトコルを基に、5 つの機能と役割がどのように関係しているか考察していく。以下の4つの考える場面は、個々人で説明を考える活動からグループあるいはクラス全体で考える活動へと考えを共有する領域を広げている。そのような変化が、生徒の自分自身で考えた説明に対する変化に顕著に反映されていた。したがって、証明の機能と役割を分析するために有効であると考えた。

まず、図2に示すような一人一人での説明を考える場面の実測・実験による説明を考察する。

(i) 実測・実験による説明

図2は、個々人で説明を考える場面における生徒の会話である。

本授業において、多くの生徒が角度を測ったり、三角形を切ったりすることに着目し、説明を考えようとしていた。このことから、生徒たちは小学校での学習や直観的な考え方、視覚的な判断による考え方に対して強い確信を持っている。しかし、生徒Aは説明を考える過程から、自分の行った説明では 180° にならないと考えている。それに対して生徒Bは、どのような説明を行っても 180° になると考えている。

生徒A：測ったら 180° にならなかった。

生徒B：なったよ。

生徒A：うっそ。だってこれ重ならない。

生徒B：切れればいいじゃん。

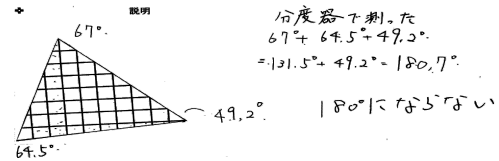
生徒A：切るのめんどくさいし、切っても変わらなくない、要は。

生徒B：切って合わせればいいじゃん。

生徒A：うん。じゃあ、切る。

図2. 生徒Aと生徒Bの会話

(1) 実測による説明



(2) 実験による説明

生徒Bによる提案を受けて行った実験による説明は下記の通りである。

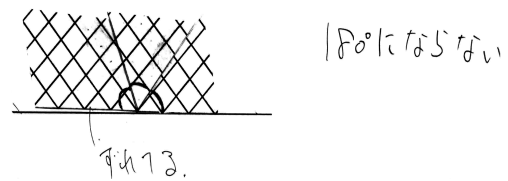


図3. 生徒Aの説明

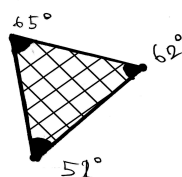
図3は生徒Aによる説明である。生徒Aは、内角の和は 180° であるから、分度器を用いて3つの内角を測り、和をとると 180° になるであろうと考え（立証／確信）、命題が真であることの説明を考えようとした。しかし、和は 180.7° であり、既習知識との矛盾が生じた。このことは、図3の(1)からわかるように、立証の失敗であり、活動は再び確信を得ることへと戻っていく。

次に、内角の和の説明をするため、3つの角を集められれば、 180° であることがいえるであろう（立証／確信）と考える。作成した三角形を折り曲げ、角を一カ所に集めようと試みたが上手くいかず、生徒Bから作成した三角形を切ることを勧められた。しかし、生徒Aはどちらの方法であったとしても同じ結果に至ることを理解していたことが図2から読み取れる。

このことから、生徒Aは一人で説明を考えていく中で、自己内対話を行いながら立証／確認を行い、その結果から自身が行った実測／実験による説明に対して不十分であることを理解している。そして、実測・実験による説明に対する疑問へと発展し、演繹的な考え方の発見へと繋がると考えられる。

一方生徒 B は、図 4 の示すように、生徒 A と同様に内角の和は 180° であるから、分度器で 3 つの角を測定し、和をとれば 180° になるであろうと考え（立証／確信）、命題が真であることの説明を考えようとした。結果は 179° であったため、約 180° と説明している。

(1)実測による説明



$$65 + 62 + 52 = 179$$

A. 約 180°

(2)実験による説明



折って合ったら 180° になった

図 4. 生徒 B の説明

生徒 B は(1)の説明で十分であると考えているが、教師の呼びかけにより(2)の説明を考える。そして三角形の定義（3 つの直線に囲まれた形）から、任意の辺に重ねれば 180° になると考え、三角形を折り曲げて確かめ、確信した（立証／確信）。生徒 B は視覚的に 3 つの角は直線を成していると判断し、 180° であることを心理的な満足を得た（説明）。

このことから、既習事項による強い確信はなぜそれが真であるかの十分な説明を行わなくても、心理的な満足感を与えると考えられる。

(ii) 特定の図形による説明

(3)正三角形の性質を用いた説明

図 5 及び 7, 9 は個々人で考えた説明をクラス全体に説明する場面である。図 6 及び 8, 10 の説明を行った生徒 C, E, F は、

小学校の学習から特定の図形の角度を用いて説明を行っている。しかしこの説明は、説明すべき対象を説明に用いているため、適切な説明とはいえない。この矛盾に他の生徒が気づくことで、生徒 C, E, F は自身の説明が不十分であることを理解する。

生徒 C：僕はあれ（3 つの角を一カ所に集めると一直線上に並ぶこと）がどうしても 180° に見えなくて、少し折れ線になっているんじゃないかと思ったので、一回転させちゃえば、 360° になるので、こういうふうな感じにしました。でも、上手く利用できなかったのによく分かんないです。それを上手く計算できれば、三角形の内角の和は 180° になると思いました。

生徒 D：でも 1 つの三角形でよくない？

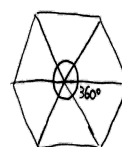
生徒 B：なんで 6 個集めるの？

生徒 C：（気づいた様子）

生徒 D：角度が分かっているのに、6 個も集める必要ないよ。

生徒 C：しまったー。

図 5. 生徒 C の説明に対するクラスの反応



正三角形を 6 個集めると真ん中の角が 360° になるので計算すると、
三角形の内角の和は 180° です。

図 6：生徒 C の説明

以上から、生徒 C は正三角形を一回転させると 360° になることから、 180° であると考え、図を描き内角は 180° であることを確かめ、確信した（立証／確信）。すると 3 つの内角を集めることができ、内角の和は 180° である（説明）ことを得た。しかしな

がら、生徒 B や生徒 D の指摘（発見，コミュニケーション）の通り，正三角形の性質を利用しているため，この説明は求められている説明ではない。この指摘から生徒 C も自身の説明が十分でないことに気づく（発見）。したがって，生徒 C の説明では内角の和は 180° であると言えないことがクラス全体で理解された（体系化）。

(4) 長方形の性質を用いた説明

生徒 E：（使用した紙が）方眼紙だから，方眼紙を四角形の部分を三角形に斜めに切って 90° と 45° が 2 つで足して 180° になりました。

図 7. 生徒 E の口答による説明

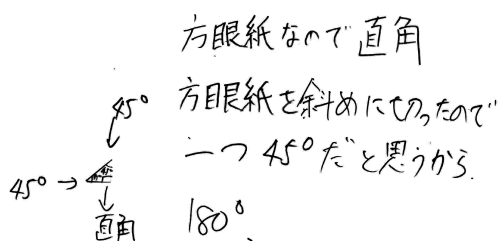


図 8：生徒 E の説明

生徒 F：三角形を半分に切って，繋げると長方形になりました。もとの三角形の内角は， $90^\circ \times 2 = 180^\circ$ です。

図 9. 生徒 F の口答による説明

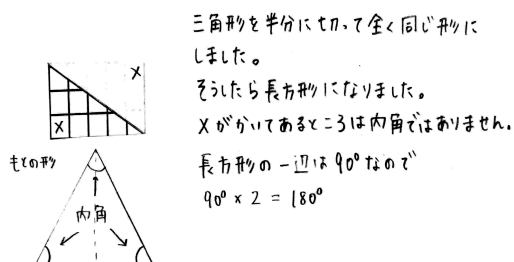


図 10：生徒 F の説明

図 7, 8, 9, 10 は生徒 E と生徒 F の考

え方も生徒 C と同様の考えである。まず，生徒 E の考えであるが，与えられた方眼紙から 1 マスは正方形であることがわかる（発見）。したがって 4 つの内角はそれぞれ 90° であり，正方形から 2 の直角三角形を作れば，直角ではない 2 つの内角はそれぞれ 45° になることがわかる（発見）。以上から，直角三角形の内角の和をとると 180° になり（立証／確信），内角の和は 180° である（説明）を得た。

次に生徒 F の考えであるが，これらの考え方は説明に「三角形の内角の和は 180° である」という証明すべき事柄が使われている。生徒 C においては，すなわち，長方形の内角の和は三角形の内角の和を利用して基にし，求められたものである。したがって，これらの説明は結論が仮定に含まれているため，求められている説明でなく，生徒たちも生徒 C の解答から理解できる。

図 5 から図 10 より，クラスという社会集団の中でおこる濾過（コミュニケーション）から，自己の説明の妥当性や正当性を判断（体系化）することができ，さらになぜ十分な説明といえないのかの理由についても理解する（発見）ことができると考えられる。

(iii) 「だいたい $180^\circ = 180^\circ$ 」である考え

図 11 は生徒 G の説明に対するクラスの反応である。このクラス全体のコミュニケーションでは，生徒 G の説明から，実測による説明に対する考え方にクラス全体が不十分さを感じ始める場面である。

教師：分度器を使って内角を測り，和を取ると，ぴったり 180° にはならなかったけど，みんなだいたい 180° になりましたね。この理由から内角の和は 180° だといえますか？

生徒 G：いえと思います。

教師：それはなぜですか？

生徒 G：何度もやったらだいたい 180°
だから…

教師：うん。

生徒 G：たぶん何度やってもだいたい
 180° で、 180° くらいになると思
います。

教師：何回もやったら、だいたい 180°
だから、 180° だと思った。

生徒 G：はい。

生徒 A：そしたら先生、その『「三角形の
内角の和は 180° である」の説明
を考えよう』が、『「三角形の内
角の和はだいたい 180° である」
の説明を考えよう』と一緒にす
か？

教師：そのようになりますね。

生徒 B：え？どういうこと？

生徒 A：だいたい 180° を 180° って認め
るんでしょ？そうしたら 180°
って決めなくても、だいたい
 180° でいいんじゃない。だいた
い 180° っていえる説明を考え
れば。

教師：だいたい 180° だから 180° という
ことは、式で表わすと「だいたい
 $180^\circ = 180^\circ$ 」ということになりま
すね。

生徒 D：だいたい 180° とぴったり 180°
は違うと思います。

生徒 G：先生、分かんなくなってきた。

図 11. 生徒 G の説明に対する
クラスの反応

図 12 は生徒 G の説明である。この図か
ら、生徒 G は実測による説明に強い確信を
持っているため、下記のように帰納的な説
明を導いていると考えられる。

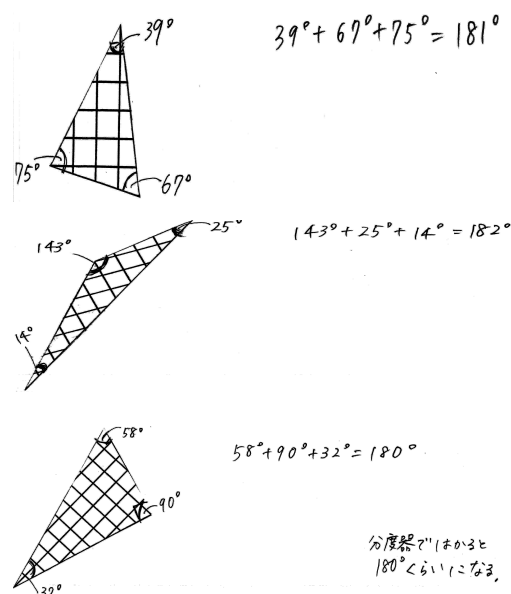


図 11. 生徒 G の説明

生徒 G は小学校で学習した、分度器での
測定値から「内角の和は 180° である」を示
す方法の印象が強く、その強い確信から立
証している（立証／確信）。何度測定して
も 180° にはならなかったけれど、その全て
が 180° に近い値であったため、やはり 180°
になる（説明）という結論に至った。

しかしながらこの結論は、 180° であるこ
とが既知の事柄であるからこそその結論であ
り、未知の事柄であれば 180° であるといえ
るかは判断できない。また、生徒 A が発言
したように、だいたい 180° であるからとい
って 180° であるという結論に至るとい
うことは、内角の和は 180° でなくてもよいと
いうことになり、命題に矛盾する。

このことから、生徒 G や生徒 B は生徒 A
や生徒 D に指摘（発見、コミュニケーション）
から、実測による説明及び帰納的に行
った結果から得た説明に対して十分な説明
ではないのではないかと考えるが芽生え
始めている（発見、体系化）と考えられる。

(iv) 以上の説明で一般性は示せるか

図 13 は異なる考えをもった生徒で構成

されたグループの会話である。初め、生徒 B と生徒 C は実測・実験による説明で、内角の和は 180° であると説明できている。しかし、生徒 C は教師の問いかけにある、「どのような三角形についても」を三角形の数と捉え、実測・実験による説明に不十分さを感じ始める。生徒 B は生徒 C の説明を聞き、考えに変化が現れる。

教師：これらの説明でどのような三角形についても内角の和は 180° であることを示すことはできますか？

教師：三角形はたくさんあるけれど、そのどの三角形についても 2 つ（実測・実験）の説明で…

生徒 C：いけると思う。

教師：いけると思う？

生徒 C：でも無限にあるんだもんね。どうしよう。測りきれない。

生徒 B：測りきれない？ 一個一個でも測ればいえるんじゃないの？ だって、これはどう？ って言って聞かれたら測れるんだから、聞いてくれれば測れるんじゃない？

生徒 H：それで 180° って。

生徒 C：全部一回一回測ってたら日が暮れちゃうよ。

生徒 B：そっか。いや、でもみんなでやればいいじゃない。あ、そっか。全部って同時に言えたらいいの？

生徒 C：全部同時に 180° って言えたらいいのか。

生徒 B：でも測るんだからそんなことできないくない？

生徒 C：測らないでやるんじゃない？ 全部一緒に測れないから、測らないで言いましょうって。

生徒 B：ああ、そういうこと。

生徒 H：見ただけでわかる？

生徒 C：たくさん三角形が出されたときに、

測ればいいってしたら、全部測れないし、その説明は違うって言われちゃうから、測らないでもいいえし、全部同時に言える説明があればいいのか。

図 13. グループの会話

生徒たちはグループ内でのいろいろな説明に触れることから（コミュニケーション）、先にも述べたように実測・実験による説明において疑問を持ち始めている（体系化）。分度器で測定する説明を行うならば、全ての三角形一つ一つに対して測定を行わなければならないと考える（発見）。そして、それは 3 つの角を集める実験による説明に対してもいえることである（発見）。これらの方法を行うことに限界を感じると共に、全ての三角形に対して同時に行える説明が求められているのではないかと考える（発見）。実測でも実験でもない、そのような方法とすることで、内角の和は 180° であることを示せるのではないかと考える（立証／確信）と考える。

このことから、一人一人で説明を考えている中（コミュニケーション）や、他者の説明を聞いている中（コミュニケーション）、様々な説明に対する意見を考える中（コミュニケーション）で得られた考え（体系化）である。したがって、証明は一人一人のコミュニケーション（自己内対話）とその後の他者とのコミュニケーションにより完成されており、コミュニケーションの機能が証明学習に重要な役割を果たしていると考えられる。

以上のことから、自己の考えと他者の意見（立証／確信、説明）、自己の意見と他者の意見（説明、発見、体系化）を濾過すること（コミュニケーション）で、皆が心理的にも十分納得することができる陳述が為

され（説明），証明を完成させていくこと（体系化）がわかる。また，完成された証明を見直すことで，新たなことが発見されることもある（発見）と考えられる。

5. まとめと今後の課題

証明の流れと証明の機能の関係性を考察することで，証明を考える際には強い確信の基に立証を行い，なぜ真になるのか説明する必要があることがわかった。また，コミュニケーションには，個々人の心で行う自己内対話と，集団の中で自己の考える説明を伝え合う対話があるため，説明を考える際には一人一人で考える場合にも，二人以上の者で考える場合にもコミュニケーションを行っていると考えられる。

さらに，de Villiers (1990) の視点を基に行った実践授業における証明学習の考察では，個々人で証明を考えることは必要であるが，二人以上で証明を考えることにより，一人では生じなかった問が生じ，再び考えることで証明の質が高まり，それが証明学習の理解の深まりに繋がっていくと考えられる。そしてその際には，自己内対話と説明を伝え合う対話が相互に係わり合うことが明らかになった。

以上のことから，生徒にとって証明学習を意義ある学習とするためには，授業を展開する上で，コミュニケーションの機能をどのように活用していくべきかを深く考えることが重要であると考えられる。しかし，本稿で考察した5つの機能の関連性には実際の中学生に対して行ったものではないため，把握しきれなかった点も少なくはない。

これを踏まえ，今後の課題は本稿で構成した証明の学習活動をみる視点を基に，実際に現在の学校現場の授業展開とその問題点を浮き彫りにすることである。その上で，どのような指導や支援を行うことが必要であるかを明らかにしていきたい。

【引用・参考文献】

- Michael de Villiers (1990), *The role and function of proof in mathematics, Pythagoras*, 17-24
- 文部科学省 (2008), 中学校学習指導要領, 東山書房
- 文部科学省 (2008), 中学校学習指導要領 解説数学編, 教育出版
- 梅川貢司 (2001), 数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究—中学3年生を対象にした調査を手がかりにして—, 上越教育大学大学院修士論文
- 五十嵐真 (2005), 中学校図形領域における証明の意義の指導について, 上越教育大学大学院修士論文
- 灰野仁 (2005), 中学校数学における証明の正当化に関する研究—, 上越教育大学大学院修士論文
- 吉田稔ら (2001), 新版 中学校数学 2, 大日本図書