

## 証明学習における思考と表象についての研究

中山 優

上越教育大学大学院修士課程2年

証明学習における子どもの困難性はさまざま挙げられている。その中でも本研究では証明学習における子どもの思考と証明の表記が整合されたものになっていないという問題に着目する。宮崎(2009)によれば、証明学習における推論には2種類ある。それは、仮定から結論へ向かう推論（総合的推論）と結論から過程へと向かう推論（解析的推論）である。証明学習において子どもは、この2種類の推論を用いながら、仮定から結論に至るまでの筋道を見つけようと試みる。この仮定から結論へ至るまでの筋道を発見していながらも、その内容を記述、もしくはその他何かしらの表現を用いて、他者へ伝えることを困難に感じてしまう子ども達がいるのではないかと。松井(2008)はこのことを、教育現場での経験から「生徒は自分なりの言葉で説明はできても、形式的な書記表現を行うことを困難に感じてしまう傾向にある」と述べている。これは、書記表現に限らずとも演繹的に事柄を説明することに関して同様のことが言えるであろう。それではなぜこのように子どもは自身で理解している事柄を証明という形式で表現することを困難に感じてしまうのであろうか。この理由を明らかにするためには、証明学習における思考がどのようにして行われているのか、そして、行われた思考を証明として表現する際には子ども達の中で何が起きているのかを明らかに

する必要がある。そのため本研究では、ヴィゴツキーの心理学理論、特に「内言」の概念に着目する。ヴィゴツキーの心理学理論は我々の思考が内言を含む言語を媒介として行われていることを指摘し、思考がどのようなものであるかを考察したものである。

本稿の目的は、ヴィゴツキーの心理学理論の内言に着目し、思考と証明の表現の間にある隔たりの諸相を明らかにすることである。

### 1. 問題意識の焦点化

自身の問題意識を具体的に説明するために以下のような想定プロトコルを提示する。生徒や教師の前にある番号はプロトコル番号である。

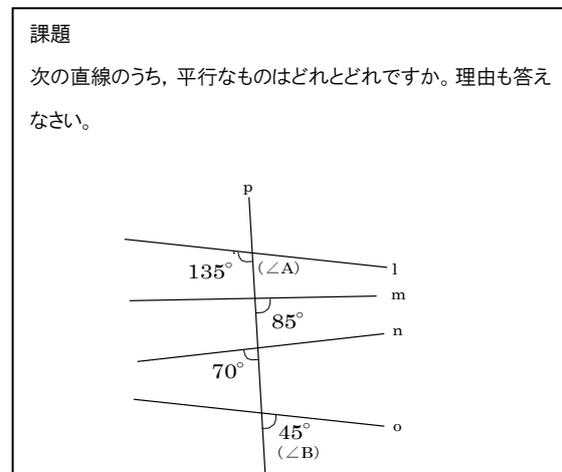


図1：想定プロトコル用課題

(後の説明の都合上角に名前を付けてある。)

- 1001 教師：平行なものはどれとどれ？
- 1002 生徒：m と o が平行かな…。でも角度が違うのが気になるな。
- 1003 生徒：l と o はどうかな。うーん…。これはぴったりだ！
- 1004 教師：どうしてそう思ったのかな？
- 1005 生徒：135+45 が 180 だから。
- 1006 教師：135 と 45 っていうのはどこから出てきた数字なのかな。
- 1007 生徒：これ。(135° , 45° を指して)
- 1008 教師：ではどうして足し算をしたんだろう。
- 1009 生徒：うーん…。
- 1010 教師：この二つの角はこの位置のままで足すことができるのかな？
- 1011 生徒：移せばいいんだ。
- 1012 教師：移すっていうのは何をどこへ移すことなのかな。
- 1013 生徒：(45° を指して) これを (∠A を指して) ここに。
- 1014 生徒：そうするとつじつまが合ってぴったり重なる。
- 1015 教師：なるほど。じゃあそれをきちんと証明してみようか。
- 1016 生徒：え、証明…。証明って事は、なんか言い方があったな。えーっと仮定より…l//o。
- 1017 教師：それは結論でしょ。図をもとに l と o が平行なことを証明するんではしょ。
- 1018 生徒：そうか。…。じゃあ同位角だから、ここ (∠A) =ここ (∠B)。
- 1019 教師：いや、それはいきなりは言えないでしょ。
- 1020 生徒：うーん、どうしたらいいんだ…。

この場面で、生徒は l と o が平行であることを、1003 の「これはぴったりだ」や、

その後の説明から、明らかに頭の中では数学的な意味を伴った理解をしていることがわかる。しかし、このことを表現する段階では 1005 の「135+45=180 だから」という発言や、その後の説明から分かるように、この生徒の自分なりの言葉で表現しており、これらは証明には至っていない。そして、1015 で教師が「証明してみよう」と発言すると、生徒は戸惑い、最終的にどのように表現すればよいのか見当がつかなくなってしまふ。

生徒が考えた内容を整理し、解釈すると次のようである。「135° +45° =180° なので、直線 p と直線 l がなす角は 135° と 45° である。同位角が等しいので l と o が平行である。」このような思考が行われていたにもかかわらず、生徒はこのことをうまく説明できず、1005 の「135+45=180」や、1014 の「つじつまが合ってぴったり重なる」という自身の思考過程を省略した表現をした。このように、子どもは自身で理解している事柄を他者が分かるように、特に証明の形式で表現することを苦手とする場合がある。本研究では、子ども達が証明学習においてなぜこのような自分なりの言葉を用いるのか、そして、なぜ証明をすることを困難に感じてしまうのかをヴィゴツキーの心理学理論からのアプローチにより考察する。

## 2. ヴィゴツキーの心理学における内言

### 2.1 内言の捉え

内言とは、声や文章にされない、頭の中で展開される言葉のことである。人間は複雑な思考を内言によって行っている。それに対して外言とは、音声として現れる言葉である。普段我々がコミュニケーションを行う言葉が外言であり、思考を行う際の中でつぶやく言葉が内言である。このように、内言を含む言語を通して行われる思

考を言語的思考とよぶ。思考は言語を媒介として行われているが、内言は頭の中で行われるひとり言や暗記した文章を思い起こすことだけではない。それは内言が外言から音声を取り除いたものではなく、内言のみに存在する性質を有しているということである。ヴィゴツキー(2001)は内言について次のように述べている：

多分、この用語の最初の意味は、内言を言語的記憶とする理解であっただろう。私は、暗記した詩を暗唱することができる。しかし、私は、記憶の中でのみそれを再生することもできる。言葉は、このように他のあらゆる対象とも同様、それについての表象あるいは記憶の形象によってとりかえられることができる。この場合は、内言は外言から、対象についての表象が実際の対象と区別されるのとまったく同じようにして区別される。(中略) 言語記憶は、内言の本性を決定するモメントの一つである。だが、それは、もちろん、それだけでこの概念をおおいつくすものでないばかりか、この概念と直接的に一致するものでもない。古い学者のあいだでは、言葉の記憶における想起と内言とのあいだに等号をふしているのを常に見出すことができる。だが、実際には、これらは区別されるべき二つの異なる過程なのである。内言の第二の意味はふつう、通常の言語活動の省略と結び付けられる。この場合は、発音されない無音・無言の言葉、すなわち、ミラーの有名な定義に従えば、言葉マイナス音が、内言と呼ばれる。(中略) だがこれも、第一の理解と同様、この概念全体を覆いつくすものでないばかりか、この概念と一致するものでも決してない。(ヴィゴツキー、

2001, 邦訳, p.337)

ヴィゴツキーは内言を「もっともあいまいな、内言をいちじるしく拡大解釈」したものとして、ピアジェの自己中心的言葉から音声が付いたものと位置づけている。子どもは四歳ごろになると、「ひとり言」を言うようになる。一人でいるときだけでなく、友達と遊んでいるときにも隣の子どもに話しかけるのではなく、自分に向かって大きな声で話しかける。これが自己中心的言葉である。言語がはじめは他者に自分の意思を伝えるためだけに使われていたのに対し、発達に伴って言語を思考のための道具として使うようになるのである。この変遷が、「精神間的機能から精神的機能への、すなわち、子どもの社会的集団的活動形式から個人的機能への移行」(ヴィゴツキー、2001, 邦訳, p.383)である。自己中心的言葉は発達に伴って減少し、最終的に消滅することが確認されているが、ヴィゴツキーはこれが、自己中心的言葉の減少ではなく、内言への変化であることを実験によって指摘した。(ヴィゴツキー、2001, 邦訳, pp.386-396) また、ヴィゴツキーは内言の特徴を意味的側面から説明している。

## 2.2 内言の意味論と構文法

内言を考察するにあたって、言葉の「意味」と語義を区別して考える必要がある。辞書に載っているような言葉の意味を語義と呼ぶ。例えば「車」という単語を国語辞典で調べると「車輪の回転によって動く仕掛けのものの総称」(新村出(編), 2008)とでてくる。しかし、これは我々のイメージする車と完全に一致するものではない。我々のイメージする車は個々によって異なるものなのである。例えば車を普段通勤に使用している者にとっての車の意味は「便利で快適な足」であるし、交通事故にあっ

た直後の者にとっては「危険な鉄の塊」となる。言葉が示す意味は個々によって異なるものであり、また文脈によっても異なるものである。このような言葉の意味を本研究では「意味」と表現する。ヴィゴツキーは「意味」についてクルイロフの寓話「とんぼとあり」(日本ではアリとキリギリスとして親しまれている)の結びの言葉「踊る」を例に挙げて説明している。この話の中で、夏の間遊び呆けていたキリギリスが冬になってアリに助けを求めたときに、アリはキリギリスにむかって「踊れ」という。これは踊りを踊れという語義ではなく、「楽しむ」や「滅べ」といった「意味」を示している。言葉は文脈の中において語義よりも「はるかに広い知的・情動的意思を獲得する」(ヴィゴツキー, 2001, 邦訳 p.415)のである。

内言は自己との対話であるから、内言が現れるときの心理状態や、文脈は自己の中では分かっている。そのため他者とコミュニケーションをするための言葉である外言に必要な主語や説明語は内言の中では不要であり、省略される。中村(2004)によれば、「音声消失し、構文も最大限に縮小・省略された内言では、統語論は問題にならず、意味論こそがもっとも中心的な位置を占めているのである」(中村, 2004)。ヴィゴツキーは内言のこの特徴を内言の「述語主義」と呼んでいる。

### 2.3 内言の意味論的特質

ヴィゴツキーは内言の意味論的特質として相互に関係のある三つの特徴を挙げている。一つ目は「内言の中では、単語の意味が単語の意義に優越する」(ヴィゴツキー, 2001, 邦訳, p.414) ことであり、残りの二つは意味論的単位の膠着と、「意味」の作用である。膠着とは、概念の複雑な意味や特殊な意味を表現するために、いくつかの

語句が結合したり合同したりして、ひとつの複合語を作ることである。上述したように「述語主義」である内言のなかでは言葉の語義ではなく「意味」が広がっている。その「意味」は言葉と言葉が結合するように、「意味」を一つの単位として合同・結合する。ヴィゴツキーは語義と語義の結合を意味論的単位の膠着、「意味」と「意味」の合同や結合を「意味」の作用と呼んでいる。

意義と意義の結合と「意味」と「意味」の結合とでは異なった面がある。中村(2004)によれば、前者の場合は、もともと規格化された安定した不変の内容どうしの結合であるため、新しく生まれる複合的な意義も、たとえそれが個人の意識の中で「意味」化されたとしても、その自由度は限られたものである。それに対して、後者の場合には、文脈が異なると容易に変化する内容どうしの結合であるから、新しい複合的な「意味」も文脈と共に自由に変化するのである。

### 2.4 外言として現れる内言

ヴィゴツキー心理学における内言のうち、外言として表出してしまうような一部のひとり言は、述語主義、「意味」の作用の視点から見ると、内言である。証明学習のような複雑な思考を伴った学習の中で、思わず考えていることをつぶやいてしまったという経験は誰にでもあるものであろう。本研究では証明学習中に現れるつぶやきや、ひとり言に相当するものを引き出し、それらを内言と同様に意味論的特質を持つものとして捉え、それらがどのようにして現れるのか、そして思考とどのようにかわるのかを考察する。

## 3. 本研究における証明の捉え

### 3.1 Harel & Sowder(2007)の研究に見る証明の捉え

Harel & Sowder(2007)は証明のスキーマの分類に関する研究を行っている。証明のスキーマとは、個々、もしくはコミュニティ内での証明の概念を表現する心的構成物である。証明のスキーマを考えるに当たり、Harel & Sowder (2007) は次の3つの事柄に留意している。①知識が形成されるときに新たに発生するということはなく、個々の中に存在する知識と関連することによって形成される。この考えを証明の概念の知識形成に適用し、学習者が現在知っている証明を基に新しい証明を形成するということを前提として考える。②証明が歴史を通じて発展したことを考慮し、歴史を通じて理解され研究されてきた証明の概念の規範を保つ。③証明の概念には相手を納得させるという社会的な要因が含まれるので、社会的側面からの証明過程に注意する必要がある。それゆえに、証明のスキーマを考えることは、「認識論的で、数学的で、歴史認識論的で、社会学的」(Harel & Sowder, 2007, p.5) なのである。

証明のスキーマは、主に3つに分類でき、更にそれらは細かく分類されている。それは、外的確信の証明のスキーマ (External conviction proof schemes), 経験的証明のスキーマ(Empirical proof schemes), 演繹的な証明のスキーマ(Deductive proof schemes)である。これらの細かい分類を図2に示す。Harel & Sowder (2007) はこれらについて次のように述べている：

外的確信の証明のスキーマは、(a) 教師や本などの権威、(b)証明の厳密な議論の形式 (c)記号もしくは操作が潜在的に筋が通っていないような記号操作、例えば  $(a+b)/(c+b)=(a+b)/(c+b)=a/c$  などのような目の中の操作に依存しているような証明のスキーマである。経験的証明のスキーマは量を直接計

測した値、具体的な代数の値などの例から与えられた証拠と知覚の両方に依存している。(Harel & Sowder, 2007, p.7)

外的確信の証明のスキーマ (External conviction proof schemes)	権威の証明のスキーマ (Authoritarian proof scheme)
	形式の証明のスキーマ (Ritual proof schemes)
	記号に関係のない証明のスキーマ (Non-referential symbolic proof scheme)
経験的な証明のスキーマ (Empirical proof schemes)	帰納的な証明のスキーマ (Inductive proof scheme)
	知覚による証明のスキーマ (perceptual proof scheme)
演繹的な証明のスキーマ (Deductive proof schemes)	変形の証明のスキーマ (Transformational proof scheme)
	公理の証明のスキーマ (Axiomatic proof scheme)

図2 証明のスキーマの分類

本研究においては、Harel & Sowder (2007)における演繹的な証明のスキーマを獲得することを証明ができるようになることとして捉え、目標と設定するが、後に述べるように、演繹的な証明のスキーマを獲得している者でも推論を行う際にはそれ以外の証明のスキーマを働かせているものとも考える。

ここで、演繹的な証明のスキーマの獲得、つまり証明ができるようになるという状態はどのようなものであるかについて考える。変形の証明のスキーマの特徴は3つある。それは、普遍性(generality)、操作的思考(operational thought)、論理的推論(logical

inference)である。これら3つの特徴について Harel & Sowder (2007)は、以下のよ  
うに述べている：

普遍性は万人にとって正しいと認められることであり、孤立し、例外とならないことである。操作的思考は個人が何かしらの目標に到達しようとするときにその結果を予想、証拠付ける過程での試みが外から見て分かるということである。最後に、数学において個人が何かを正当化しようとするときに、最終的には論理的な推論のもとに成り立っていないなければならない。論理的な推論の特徴が使われる。(Harel & Sowder,2007,pp.7-8)

結果を予想、証拠付ける過程での試みが外から見て分かるということは、証明の記述の中における順序の中で、後に来る結果を正確に予想し、その根拠となる過程を示すことである。このような思考が表現されているとき、操作的思考が行われたということができる。このことを第1節の想定プロトコルを例にあげれば、 $\angle A$ と $\angle B$ が等しければ同位角が等しいので $l$ と $o$ が平行になるという、後に来る結果を先に予想し、 $\angle A$ が $45^\circ$ であることを先に述べることでできたとき、操作的思考が行われたということができる。この思考を行うことが子どもにとって困難であることは上述したとおりであるが、それがなぜ困難であるのかを本稿では内言の性質から説明する。

#### 4. 自分なりの言葉や表現と証明

##### 4.1 自分なりの言葉や表現の発生

証明学習における思考も内言を媒介として行われている。ここでは証明学習の中で現れる内言や、ひとり言、自分なりの言葉に相当するものがどのようにして生じるの

かについて、また証明学習におけるそれらの役割について考察する。上に示した想定プロトコル 1003 の「これはぴったりだ」や、1005 の「 $135+45=180$ 」、1011 の「移せばいいんだ」、1014 の「つじつまが合ってぴったり重なる」は外言であるが、その述語主義、「意味」の作用の視点から見て、内言同様の性質があるひとり言、もしくは自分なりの言葉であるといえる。1003 の「これはぴったりだ」は、第1節で述べたような思考過程を言葉によって表現したものである。つまり、この生徒は自身の思考の中で行われたことをこの一言の言葉で表現している。また、この生徒のその他の自分なりの言葉は、教師へ自分の考えを説明するために用いている表現であるが、主語や、角の場所を説明する語句が省略され、「意味」の作用が起きた結果このような言葉となっている。このように、証明学習における思考の中ではさまざまな言葉が省略されたり、膠着したりしながら、「意味」の作用が起き、その結果、自分なりの表現が行われる。自分なりの言葉や表現の背景には、さまざまな思考が存在するが、その「意味」を完全に把握することができるのは自分自身のみである。この生徒は自分なりの言葉を他者へ説明するための言葉へと一般化することができなかつた。このようにして自分なりの言葉や表現がなされる。

証明を行う際には、述語主義である内言や、自分なりの言葉の省略された語句を補い、Harel & Sowder (2007) が変形の証明のスキーマについて述べているように、「普遍性」、「操作的思考」、「論理的推論」の条件を満たすように、後に来る結果を予想し言葉を並び替える。子どもにとって、この二重の壁が証明を難しくしているのである。

##### 4.2 事例に見る自分なりの言葉や表現

次のプロトコルは、プレ調査を行った際のものの一部である。プレ調査では、図 3 に示す課題を使用し、図形問題を考える際に自分なりの言葉や表現がどのように現れるかを調査した。被験者は、数学コースの大学院生であり、この大学院生を M と呼ぶ。M には解法を考える際に思考を逐一言葉にするように要求した。I は聞き手で、筆者である。

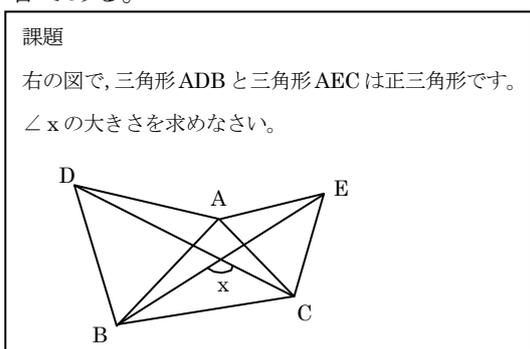


図 3 プレ調査用課題

M は三角形 ADC と三角形 ABE が合同であって欲しいと述べ、少し考えた後に、それらが二辺挟角が等しいので合同であることを I に説明した。

2001I : 更に突っ込むんだけど、二辺挟角が、ぱっと見て分かったんじゃないくて、なんか二辺挟角になりそうだなっていう予想を立ててから、二辺挟角を言い当てるまでに、どういいうプロセスがあったというか、

2002M : プロセス？

2003I : これさ、一瞬で二辺挟角を見抜いたんじゃないくて、思い出してほしいんだけど、

2004M : あー、二辺挟角の、だなど思ったのは、

2005 I : 思ったのは、

2006M : 辺が、おんなじ、ここと (AC) ここ (AE) がおんなじっていうのと、ここ (DA) とここ (AB) がおんなじだっていうのをを使って、

2007 M : なんかつちょうちょが見えたんです

よ。

2008I : ほう、ちょうちょが見えた。どのちょうちょが見えた？

2009M : この、AEB と、この ACD のちょうちょがみえたんですよ。

2010I : この、星のいっこ欠けた形ね。

2011M : そうです。ちょうちょが見えて、そしたら羽の長さがおなじだったっていう。なので、この三角形はきっと合同。

2012M : で、よく見たらこの角度 ( $\angle DAC$  と  $\angle BAE$ ) が同じだっていうのがロジックで言えるなど・・・。

2013M : シュって。(手と手を重ねてスライドさせる動作をする。)

2014I : シュって。ね。

2015M : で、( $\angle DAB$  をさして)  $60^\circ$  , ( $\angle EAC$  をさして)  $60^\circ$  と ( $\angle BAC$  が) 共通だからできそうだなって展開していったんです。

この場面では、M は  $AD=AB, AE=AC$  を手がかりに、2011 の発言で「きっと合同」と述べていることから、図の見た目から  $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$  であると見当を付けたことを説明している。ここでは、Harel & Sowder (2007) による、知覚による証明のスキーマ (perceptual proof scheme) が強く働いている状態であると言える。2011 の「ちょうちょ、羽」は  $\triangle ADC \triangle ABE$  が重なり合っただけでできたこの図形とその辺を表現するこの学生の自分なりの言葉である。この図形や辺を口頭で説明するとき、明らかに「 $\triangle ADC \triangle ABE$  が重なってできた図形」や、「AC と AE, AB と AD」などと一般化された言葉によって説明するよりも内言に近い、自分なりの言葉を用いる方が抵抗が少ない。2013 の「シュ」という発言と、ジェスチャーは、 $\angle DAC = \angle BAE = 60^\circ + \angle BAC$  であることを説明する自分なりの言葉と表現である。この説明ではでは証明

には至っていないが、2015の発言は、明らかに証明に近い構造となっている。

図形問題を解決する際には、知覚の証明のスキーマが働く状況から、自分なりの言葉や表現を経て、演繹的な証明のスキーマが働く状態へと変化していつている。この事例では図の見た目から $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$ の予想を立て、それが数学的に成り立つことをいったん自分なりの言葉や表現を用いて説明し、さらにそれを細かく説明する際に演繹的な証明に近い構造の説明をしている。

## 5. まとめと今後の課題

本稿では、内言を用いて行われる思考を、他者が理解できるようにし、変形の証明のスキーマの条件を満たすように整理することが子どもにとって困難であることを述べ、子ども達の証明学習における自分なりの言葉や表現がどのようにして生じるかについて考察した。また、図形問題の解決過程の中で、知覚に依存した問題解決から、自分なりの言葉や表現を用いる状況を経て、演繹的な証明に近い構造に変化していく様子を述べた。

4.2節の事例の中では、自分なりの言葉や表現が表出する様子を述べたが、この自分なりの言葉や表現が、知覚による推論を演繹的な証明へと向かって導いているように捉えることもできる。自分なりの言葉や表現が証明学習における思考においてどのように働いているかについては今後、さらなる研究が必要であろう。

## 引用・参考文献

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching*

*and Learning, National Council of Teachers of Mathematics*, 805-842.

ヴィゴツキー, 柴田義松訳 (2001). 思考と言語. 新読書社.

中村和夫 (2004). ヴィゴツキーの内言理論における「意味」の存在形態について. 心理学第24巻第2号.

新村出(編) (2008). 広辞苑第六版. 岩波書店

松井守(2008). 議論のある活動における中学生の証明する過程について. 上越教育大学修士論文.

宮崎樹夫 (2009). 学校数学における証明の基礎的学習の諸相を整理する枠組みの構築—証明の構造, 証明する活動, 証明の機能に焦点をあてて—. 第42回数学教育論文発表会論文集.