上越数学教育研究，第26号，上越教育大学数学教室，2011年，pp.103-112.

証明学習において中学生の示す正当化に関する素地的研究

笹原　佑介
上越教育大学大学院修士課程１年

筆者が今まで出会った中学生で，数学が苦手，あるいは嫌いな生徒はもちろん，数学が得意，あるいは好きという生徒でも証明に対して苦手意識を持つ生徒は少なくない。

証明の学習において，教師から「このように記述するものだ」という型を与えられ，それに倣って言葉を当てはめていくような授業に参加している生徒は，証明を教師から与えられた形式的な記述方法として捉えるかもしれない。実際，なぜ証明が苦手なのか尋ねると，「どう書いていいのかわからない」と応える生徒は多い。しかし，証明は単なる記述様式ではないはずである。

現在の日本のカリキュラムでは，生徒は，中学校２年生の時に初めて証明を学ぶ。東京書籍の教科書，「新しい数学 2」(杉山吉茂他, 2008)では，「三角形の内角の和＝180°」をその直前に学ぶ平行線の性質によって証明する活動を最初に挙げている。実際，証明学習に入る時にこの教材を用いている場合が多いのではないだろうか。その後，三角形の合同条件に繋げるという流れは筆者も学習者として経験してきたことである。

一方，生徒にとって「三角形の内角の和＝180°」は，小学校で実験・実測によって事実として認識されている。しかし，証明の学習が始まると突然それを否定されるかのように他の方法でそれが正しいことを説明することを求められるのである。それは，新しい正当化を生徒が要求されることである。

学級においては，正当化とそれに対する同意や質問・論駁が繰り返し行われるような活動を意図することで，相手を納得させたり論駁したりする上で自身と相手の両者にとってより確かな正当化が必要になってくることに生徒が気付くことが期待される。その気付きを何度も経験させることで，証明は，生徒にとっての正当化の手段の１つとして捉えられ，その後の証明学習を円滑に進める支えとなるのではないか。

本研究の目的は，証明を自身の考えを正当化する手段の１つと捉え，生徒の正当化が学級における討論によっていかに証明する過程を支えていくかを分析するための枠組みを構成することである。

１．証明に関する先行研究

1.1.　Bell(1976)の研究から

Bell(1976)は，証明に対する捉えについて以下のように指摘している：

> 証明は，生徒にとっては，彼に確信をもたらすものであると言った教師がいた。これは，形式的な儀式であるというよりは，生徒にとって意味をもつ学級の説明に対する必要性へ注意を向けるという点で価値のある見解であるにもかかわらず，証明の真の本性(real nature of proof)の考察を避けるという点でおそらく危険である。(p.24)

Bell(1976)は，証明が“確信をもたらすもの”としての機能を果たすことを認めつつも，それだけでは“証明の真の本性”を捉え得ないと指摘している。Bell (1976)の言う“証明の真の本性”は，次の記述に見られる：

> 証明は，内面的に，想像上の存在し得る懐疑者に対して行われるかもしれないにもかかわらず，確信の達成を得ようとする本質的に公の活動(public activity)である。(p.24)

“本質的に公の活動”という記述から，証明は，共同体において自身の考えで他者を納得得させる，つまり正当化の手段として利用されるべきであり，“確信の達成を得ようとする”という記述から，証明の妥当性の判断は，他者との討論によるという考えがうかがえる。

また，Bell(1976)は，証明の意義(meaning)を，命題が真であることを示す立証(verification)，あるいは正当化(justification)；命題がなぜ真であるかについて洞察を与える明示(illumination)；そして，公理や定理を演繹的な体系に位置づける体系化(systematisation)；の 3 つの意味(sense)にまとめた。

Bell(1976)は，正当化を証明しようとしている命題が真であるかに関係するものとして位置付けているが，本研究では，正当化は，Bell(1976)の言う証明の 3 つの観念のそれぞれと関係し，証明する過程に重要な影響を与えるものとして捉える。

1.2. Stylianides(2007)の研究から

Stylianides(2007)は，学校数学の最初の段階においても適応し得る証明の意義を概念化するために次のような証明の定義を発達させた：

> 証明は，次の特徴を持った数学の議論，数学の要求に賛成あるいは反対する主張の関係付けられた系列，である：
> 1. それは，学級共同体に受け入れられた，真であり，それ以上の正当化なしに利用できる陳述(受け入れられた陳述の組)である。
> 2. それは，学級共同体に妥当で，知られている，あるいは概念の範囲内にある推論の形(議論の様式)を利用する。
> 3. それは，学級共同体に適切で，知られている，あるいは概念の範囲内にある表現の形(議論表象の様式)で伝達される。(p.291)

このように Stylianides(2007)は，証明が学級共同体における活動であることを強調し，証明の妥当性の判断が学級での討論に委ねられると考えている。このことは，Bell(1976)が，挙げている“証明の真の本性”である“公の活動”と合致している。また，“賛成あるいは反対する主張の関係付けられた系列”という表現から，Stylianides(2007)は，証明が学級での討論における一連の流れによって発展されるという考えがうかがえる。よって，この 3 つの定義は，生徒の正当化を証明とみなしてよいかどうかを判断する基準ともなり得る。

ここで，Stylianides(2007)の言う学級共同体は，主に生徒が構成員となっているものであり，共同体における教師は，数学の学問の代表者であり，生徒と生徒を結び付ける役割を持つ特別な地位を持っている。つまり，証明は主に生徒同士の討論によって発展され，教師は，その討論を円滑に進める司会者のような役割と生徒の正当化を証明とみなしてよいかどうかを判断する権威者としての役割を持っている。

1.3. Bieda(2010)の研究から

Bieda(2010)は，Stylianides(2007)が発展させた証明の定義を支持する立場から次のように述べている：

もし，A.J.Stylianides によって定義された証明が，全ての場合についての推測を正当化するように要求されることについての教師と生徒の討論の結果として現れ，どのように多様な議論の形式が正当化の証明の可能性に影響するか明らかになれば，生徒は証明が自身を納得させたり学級共同体内の友達を納得させたりすることを越えて、学級共同体のより広い聞き手を納得させなければならないということを学ぶ。さらに言えば，証明は学級共同体の構成員によって発展させられ，通用する数学的な知識の蓄えを定義させるための媒体にもなる。(pp.354-355)

Bieda(2010)は，証明は，学級共同体によって認められるものであり，どのような議論の形式を用いた正当化が証明として機能し得るかが明らかになることで，生徒が証明を相手を納得させる手段として捉えることができるとしている。また，証明は学級共同体によって発展され得るものであり，数学的な知識を定義することに役立つとしている。

さらに Bieda(2010)は，次のように述べる：

どのように学級共同体が証明活動に従事するか理解するために、結果として正当化、あるいは証明を生じさせる記述された証明関係の課題の軌跡を辿る教師と生徒の行動、あるいは会話における多様な変化に注意を向けなければならない。(p.355)

Bieda(2010)もまた，生徒がどのように証明を学んでいくかを理解するには，学級における教師と生徒の討論における正当化や論駁に注意を向ける必要があると述べている。

1.4. 関口(1992)の研究より

関口(1992)は，論証指導の改善の為の基礎的材料の提供を目指し，次の 3 つの問題を設定した：

1. 教室における社会的営みとしての証明はどのようなものであるか。
2. 教室における社会的営みとしての論駁はどのようなものであるか。
3. 教室という社会的場において証明と論駁はどのような関係をもっているか。(p.31)

関口(1992)の言う“教室という社会的場”は，生徒たちが探求的，批判的活動を共同で行いながら数学を学習していく場であり，本研究で焦点としている学級での討論もそのうちの 1 つと言える。また，関口(1992)は，“論駁”を教室の構成員(生徒と教師)の間で生ずる意見の不一致，反論，拒否等の行為を包括するよう定めている。本研究でも“論駁”を関口(1992)と同様に包括的に捉えていることを断わっておく。

関口(1992)は，問題 2 に応えるものとして教室における論駁の事例の分析から論駁の方法を 7 つ―権威法，条件法，実験法，反例法，矛盾法，改枠法，規則法―にまとめた。

また，関口(1992)は，論駁について次のように述べている：

数学の過程において論駁の生起は，証明の不成功に結びついており，証明とは表裏の関係にある活動と考えられる。(p.32)

ここで言う“数学の過程”とは，数学者が数学を作っていく過程のことであり，関口(1992)は，教室では，このような明確な関係は必ずしも維持されないと述べている。このことは，関口(1992)が授業観察の結果から，教室における論駁が教師の教授の一部，生徒の理解活動の一部，そして教師と生徒の間のコミュニケーション活動やネゴシエーション活動の一部として機能することを明らかにし

たことからも言える。教室での論駁は，生徒の理解活動を助ける教師の介入の方法の１つであり，論駁された主張は，必ずしも棄却されるのではなく，論駁された内容を修正することでより確かな正当性をもつ主張を示すきっかけとなる。つまり，正当化の発達が論駁によって支えられているのである。

先に述べたように，関口(1992)の言う教室は，本研究で言う学級での討論を含むと考えられるので，学級での討論における論駁も同様な機能を担い得ると期待される。

２．正当化に関する先行研究

2.1.　熊谷(1998)の研究から

熊谷(1998)は，正当化の過程を社会的過程と捉え，社会的相互作用論の立場から小学生の示す正当化を分析している。ここで，熊谷(1998)の言う正当化は，教師と子ども，あるいは子ども同士の間で共同して行われている理由付けの行為であり，本研究で言う正当化は，個々の子どもが合理性や正しさを主張しようとする行為であるので，熊谷(1988)で言う正当化の試みである。

また，熊谷(1988)は，授業における正当化について考える時，どのような質の正当化がなされているのかという側面を“結果としての正当化”，適切な正当化の試みが構成される側面を“過程としての正当化”と呼び，双方に着目する必要性があるとしている。

熊谷(1988)は，意味の修正がなされる相互行為をネゴシエーションと呼び，上記の２つの側面から授業で構成される正当化を解明するために着目すべき活動としている。特にその意味が理由付けに関係している場合，それは，本研究で言う学級での討論とみなすことができる。

３．　本研究における証明と正当化の捉え

以上の先行研究から本研究では，生徒は，学校数学において証明を次のように捉えていくと想定する：

1. 証明は，自身の考えで相手を納得させる正当化の手段の一つである。
2. 証明は，学級での討論によって発達し得る。
3. 証明は，学級によって受け入れられた正当化である。

生徒は，教師から与えられた問題に対して自身の主張を示す。主張を示した相手から，「なぜその主張が正しいと言えるのか」と尋ねられた場合に初めて正当化する必要性が生まれる。そして，示された正当化に対しても相手から何らかの反応が示される。正当化に対して納得できなければ質問や反論が示されるのである。質問や論駁をされた正当化は十分に主張の正当性を示したとはみなされず，修正された新たな正当化が必要とされる。

このように，主張に対する正当化が相手を納得させるに値するまで，討論が繰り返されていき，そのサイクルの中で，相手の反応によって正当化するのに必要な条件が少しずつ浮き彫りになってくる，つまり，正当化は修正され，発達していく。そして，その正当化が相手に受け入れられた時，それは，両者，あるいは共同体において証明とみなされるのである。

４．　正当化の発達過程

4.1.　Stylianides(2007)の研究から

Stylianides(2007)は，討論の初めに示された正当化を基本の議論(base argument)，教師によるいくらかの介入を受けた後に再び示された正当化を続いて起る議論(ensuing argument)とし、生徒の正当化が教師からの介入を受けていかに変化し得るかを分析した。図 1 はその結果得た正当化の発達過程の枠組みを表している。

最初の段階は，教師による分析であり，活

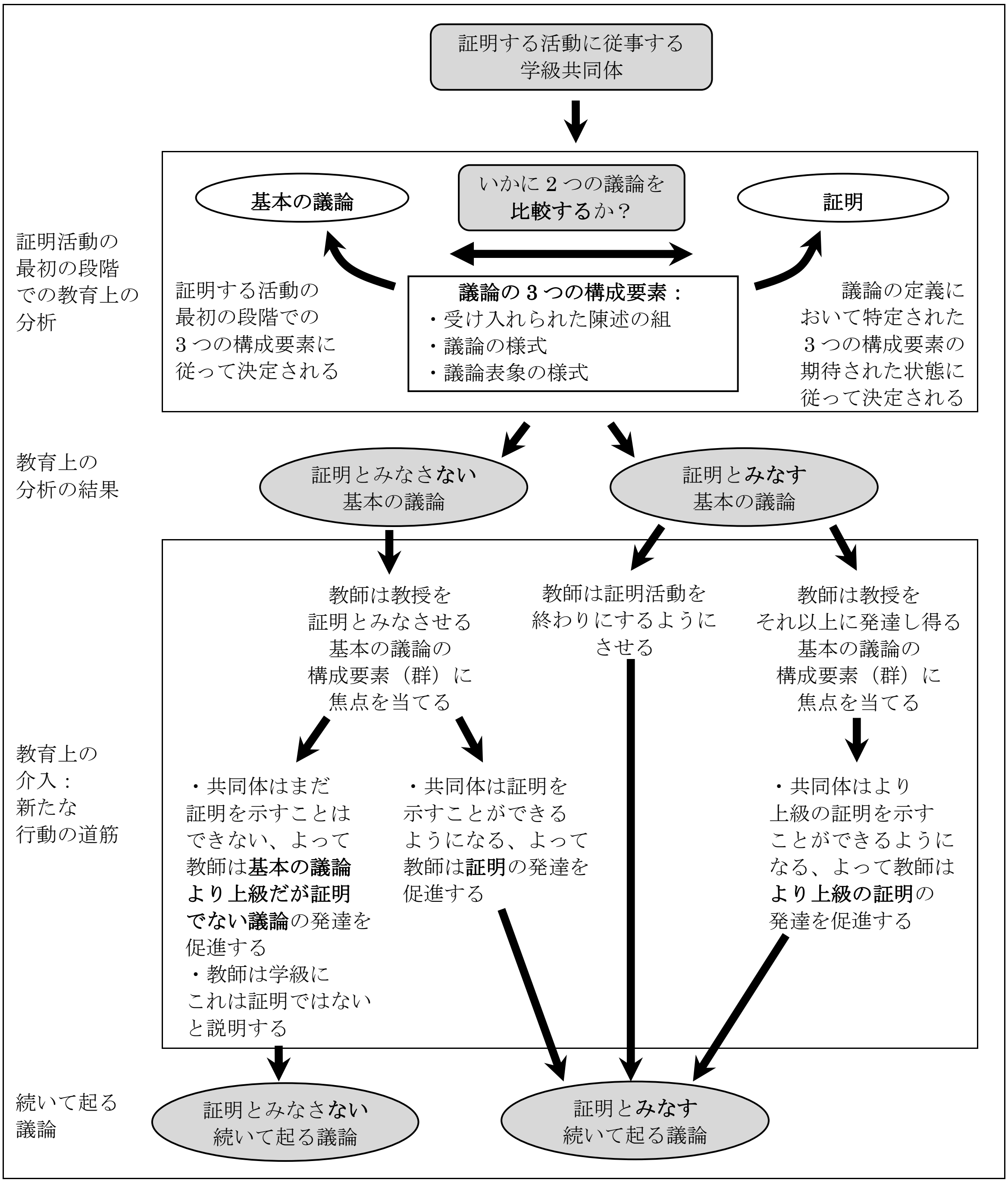


図 1.　学校数学において証明と証明することを洗練する教育上の習慣についての枠組み

(Stylianides,A.J.，2007，p.317)

動の最初に生徒が主張に対して示した正当化，つまり基本の議論が，Stylianides (2007)の証明の定義の 3 つの要素—受け入れられた陳述の組，議論の様式，議論表象の様式—を満たすかどうか教師が分析し，証明とみなすかどうかを判断する過程である。この時，判断の基準は，教師によって異なることに注意しておきたい。例えば，ある教師は，生徒の示す正当化が証明の定義の 3 つの要素のうち少なくとも 1 つに一般性をもった議論が含まれて

いれば証明とみなすかもしれない。ただし，証明は，学級によって発達されるものであるため，この証明とみなされた基本の議論もまた，さらに発達される可能性を含んでいる。

次の段階は，教師による介入である。ここで教師は，最初の段階で判断した基本の議論の 3 つの構成要素の状態を踏まえて，それ以上に発達し得る構成要素に討論の焦点を当てる。それによって，生徒は，前の正当化を修正して新たな正当化を示す。

例えば，“2 つの奇数の和は，常に偶数になる”という主張に対して，生徒が次のような正当化を行ったとする：

01. S：奇数－1＝偶数
02. S：偶数＋偶数＝偶数
03. S：1＋1＝2 で，2 は偶数
04. S：だから，奇数＋奇数＝偶数
05. S：例えば 5＋7 だったら…

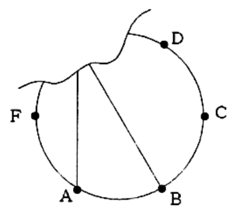
この正当化が基本の議論であったとすると，生徒は，01 から 03 ではそれぞれ足し算と引き算に関する，学級の生徒に受け入れられた陳述の組を用いていて，これらは，一般性を持っている。しかしながら，05 で出した事例は，5＋7 という特殊な事例であり議論表象の様式については，まだ発達の余地があると判断できる。そこで教師は，“もっといろんな場合を一気に説明できる表し方はないだろうか？”などと質問することで，生徒が文字式を用いた議論表象の様式を示すことを期待する。その結果示された続いて起る議論を再び教師が分析し，証明とみなせるか否かを判断するのがこの 2 つ目の段階である。

4.2. 想定プロトコルとその分析

ここで，次のような問題に取り組む中学校第 3 学年の学級での討論を例にして，正当化の種類，すなわち質がどのように現れ，発達し得るかについての想定プロトコルを示し，Stylianides (2007)の枠組みを参考にした分析を施す。

問題は，円周角の定理を知らない生徒がこの問題を通して円周角の定理を発見するよう意図されている。Q,R,S は生徒，T は教師を指し，C は，学級全体の様子を指す。なお，分析中のかっこ内の数字は，プロトコルの番号である。

【問題】　円周上に 6 つの点 A,B,C,D,E,F が等間隔に並んでいます。ところが，点 E がある部分だけ破れてしまっています。



この時，∠AEB の大きさを求める方法を考えてください。ただし，破れた部分には一切書き込むことはできません。（金山，1997，筆者が一部変更）

1. T：何か良い方法はないかな？
2. Q：全部(∠AEB と)同じになるんでしょ？
3. T：全部って何が？
4. Q：これ(∠ADB を描く)とかこれ(∠AFB を描く)とか。
5. R：そっち(∠AFB を指して)は全然一緒に見えないよ。
6. Q：でも，教科書に書いてあるよ。
7. S：まだ習ってないじゃん。
8. T：そうね，Q は，この 2 つが(∠AEB と ∠AFB を指して)どうして一緒になるのか説明できる？
9. Q：ええと…。

まず，Q は，同じ弧に対する円周角の大きさが全て等しくなるという主張(2，4)を教科書に載っているからという理由で正当化した(6)。この正当化は，R の質問(5) によって起った。しかし，この知識は，学級に受け入れられた陳述の組にはなかったため，生徒に受

け入れられなかった。したがって，T は，この正当化を証明とみなさない基本の議論と判断し， Q になぜ∠AEB＝∠AFB が言えるか説明を求めた(8)。Q は，説明することができなかったが， T が続いて Q が示したもう 1 つの角の組(∠AEB と∠ADB)に討論の焦点を移した(10)ことで，Q の主張についての討論は続いた：

10. T：∠AEB と∠ADB はどう？
11. R：そっちの方は一緒っぽい。
12. S：これって線対称な図形だよね。
13. T：これって？
14. S：円。真ん中で縦に割れば，左右が対象になるから，それ(∠AEB と∠ADB)は一緒だと思います。
15. T：なるほど。みんな S の意見わかった？
16. C：(数人が頷く)
17. R：どうして円が線対称だとそれが等しくなるの？

ここで，S は，円が線対称な図形であることに注目している。そして，∠AEB と∠ADB の位置関係が線対称の位置になっていることを“真ん中で縦に割れば，左右が対象”と表現し，∠AEB＝∠ADB であることを正当化した(12，14)。この正当化は，教師にとっては証明とみなす続いて起る議論であった。なぜなら，円が線対称であることと線対称な図形では対応する角の大きさが等しいことは，第 1 学年で学ぶ知識であるため，学級の受け入れられた陳述の組に含まれていて， S の“真ん中で縦に割れば，左右が対象”という主張は，数学的に厳密ではないが学級の概念の範囲内にあると思われる議論表象の様式を用いているからである。

しかし，T が学級に確認する(15)と，数人が頷くに留まった(16)。これは，R の質問(17)に見られるように，生徒の多くは，円が線対称であることと，∠AEB と∠ADB が線対称の位置にあることがすぐに結びつかないためである。そこで T は，厳密な，より多くの学級のメンバーが納得できる議論表象の様式を引き出すために，線対称な図形の性質に討論の焦点を当てた：

18. T：納得できない人がいるみたいだね。線対称な図形ってどんな図形？ S？
19. S：真ん中で折るとぴったり重なる。
20. T：(しばらく生徒の様子を見て，問題がないことを確認する)ぴったり重なる。じゃあ，この問題だとどれとどれが重なるの？
21. S：∠AEB と∠ADB が重なります。
22. R：それがわかんない。 円が線対称なのはわかるけど…
23. Q：えっと，∠AEB と∠ADB が重なるから， D と E が重なる！
24. T：点 D と E が重なるだけでいいの？ぴったりってつまりはどういうこと？
25. C：…
26. S：あ，合同！

ここでは，未だ R の質問(17)の解決には至っていないものの，正当化の発達が見られる。S は，教師の質問(18) に対して“ぴったり重なる”という表現を用いる(19)。これは，前の表現よりも数学的な厳密さを欠いているが，生徒にとってはむしろわかりやすい表現であったかもしれない。T は，“ぴったり重なる”という表現が，学級によって受け入れられていることを確認して，対称な図形の組に討論の焦点を移した(20)。

S は，T の質問(20)に対して再び∠AEB と ADB が線対象の位置にあることを主張した(21)が，R の質問(22)によってそれ以上の説明を求められた。それに対して Q が正当化を試みるものの，Q の主張は，結果から要因を導くようなものであり，妥当な議論の様式ではなかった。そこで T は，“ぴったり重なる”

ことに討論の焦点を戻した(24)ところ，S が対称な三角形が合同であることに気付いた。

ここで，続いて起る議論であった“真ん中で縦に割れば，左右が対象”が新たな基本の議論となり,討論によって“ぴったり重なる”,あるいは“合同”という，続いて起る議論が示されていることがわかる。

T は，合同な図形見つけることに焦点を移し討論を続けた：

27. T : ぴったり重なるってことはつまり合同なんだね？(学級の様子を確認して)じゃあ，どれとどれが合同なの？
28. S : AEB と AD…じゃなくて，BDA。三角形AEBと三角形BDAが合同だから，対応する角は等しくて∠AEB＝∠BDA。
29. Q : あれ，線対称の話じゃないの？
30. S : うん。円が線対称だから，円の中心を通るように縦にまっすぐ線を引くと…
31. Q : そっか。その線を中心にみればAとB，CとF，DとEがそれぞれ等距離にあるんだね。
32. T : その中心の線は何て言うんだっけ？
33. R : 対称軸！
34. T : そうだね。その対称軸に関して左右に3つずつ対称な位置に点があると。それで，対称な点を結んでできた 2 つの三角形，これ(三角形 AEB を指して)とこれ(三角形 ADB を指して)が線対称な位置にあると。
35. S : 線対称な位置にあるってことは，対応する辺や角が同じはずだから(三角形AEB と三角形 BDA は)合同だと思います。
36. T : ということですが，これでみんな納得できたかな？
37. C : (ほとんどの生徒が同意を示す)
38. T : じゃあ，∠AEB と∠ADB が等しいってことでいいね。そしたらこの問題は，解決できたね。
39. Q : ∠ADB の大きさを代わりに求めればいいんだ。

ここで，学級としての問題に対する答えが出たこととなる。

∠AEB と∠BDA については，三角形 AEB と三角形 BDA が線対称な位置にあることを言えれば，線対称な図形の性質，つまり対応する辺の長さと角の大きさが等しいことから∠AEB＝∠BDA が言える。しかし S は，線対称な図形の性質から三角形 AEB と三角形 BDA が合同であることにまで言及した(28)。2 つの三角形が合同になることは厳密には証明されたわけではないが，ここでは，学級によって受け入れられた。

このことによって，後に，∠AEB をなす 3 点 A，B，E と同じ位置関係にある 3 点の組を取れば合同な三角形になり，∠BDA 以外にも∠AEB と大きさの等しい角があることを確認した。このことは，生徒に弧(弦)の長さに着目させるきっかけになることが期待される。弧(弦)の長さに着目することができれば，Q が最初に示したもう一方の角の組(∠AEB と∠AFB)に討論の焦点を移すことができ，円周角の定理の発見に近づくことができる。また，∠AFB については，∠AEB との対称性が見られないため他の方法での正当化が必要となり，場合分けの必要性を気付かせることもできるのではないか。

4.3. 正当化の発達過程

まず，Stylianides(2007)の枠組みと前項で示した想定プロトコルに現れている正当化の発達過程とを比較する。

Stylianides (2007)の枠組みでは，正当化の発達過程が基本の議論と続いて起る議論の 2 段階であり，いくらかの教師の介入の後に示された続いて起る議論が基本の議論よりも数学的に厳密であることを前提にしている。しかし，想定プロトコルのように，教師が

Stylianides(2007)の示した3つの構成要素―受け入れられた陳述の組，議論の様式，議論表象の様式―の状態を判断し，発達する余地のある構成要素に関係する部分に討論の焦点を移すことで，続いて起る議論が新たな基本の議論となり，さらに発達する機会が繰り返し現れることで，時には厳密さを増すことがない場合もある(14 から 19 へ)が，正当化は修正され発達していくと言える。

また，Stylianides (2007)のまとめた枠組みは，主に教師と生徒との討論を分析しているが，前項で示した想定プロトコルのように，学級での討論においては，正当化の発達を促すきっかけが教師の介入のみによらず，生徒同士の質問や論駁(5, 17)によっても起ると言える。ただし，教師が生徒の反応を見つつ生徒の示した正当化の妥当性を判断し，確認している場面(15，34)が見られるように，正当化や証明の妥当性を最終的に判断しているのは教師であると言える。教師が学級での討論する場を設定することで，生徒たちがあたかも正当化の妥当性が学級によって判断されたかのように捉えることが期待される。

以上を踏まえて，本研究では，正当化の発達過程を図2のようにまとめる。

学級は，生徒と教師によって成り立っており，生徒の示した正当化は学級での討論によって妥当性を判断される。学級での討論では，教師の介入に加えて生徒同士の相互行為が影響し，正当化の発達が促されている。学級での討論において，生徒同士の中で妥当と判断されない場合は，そこで正当化の修正が求められ得る。想定プロトコルでは，例えば，6でQが示した正当化は，Sによって論駁され，その後修正を求められた。それに対して，12, 14でSが示した正当化は，学級で数人からだが同意を得た。この時の教師は，生徒の示した正当化の妥当性を判断しつつも，討論を円滑に進める司会者としての役割が大きい。例えば，Tは，6でQが示した主張に対して，5

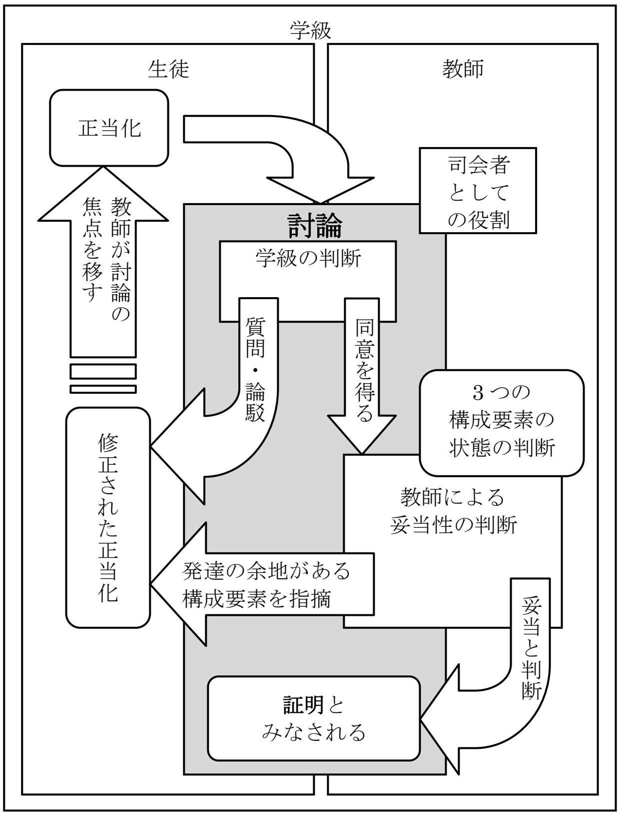


図2.　正当化の発達過程

でRが示した論駁を基に1組の角に焦点を当てて，Qに新たな正当化を求めている（8)。

学級での討論において生徒からの同意が得られた場合，教師はそれを認めつつ，まだ発達の余地がある要素を指摘し，正当化がさらに数学的な厳密さを増すように修正されることを要求する。例えば，12，14でSが示した正当化は，学級の数人から同意を得ていて，17でRが質問をしていることを踏まえ，Tは議論表象の様式に問題が残ると判断し，線対称な図形を説明する表現の仕方の修正を期待してSに質問している(18)。

このように，教師の介入による影響が非常に強いものの，正当化は証明とみなされるまで学級での討論において繰り返し修正され発達していくと言える。

6.　まとめと今後の課題

本研究では，中学校数学において証明はど

のように捉えられ得るか，そして，正当化の発達が証明する過程をどのように支えているかについて考察し，それぞれ第３節，および第４節の３項にその結果得た枠組みをまとめた。

今後は，本研究で得た枠組みを用いて実際の授業の分析を行い，その分析結果から，中学校数学の学級で生徒の正当化が発達していく討論の場を繰り返し経験していく生徒が，どのように証明を捉えていくか，その変化を明らかにしていくことが課題である。

【引用・参考文献】

Kristen N. Bieda. (2010). Enacting Proof-Related Task in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 41, No. 4*, 351-382.

Andreas J. Stylianides. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.38, No.3*, 289-321.

A. W. Bell. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situation. *Educational Studies in Mathematics, Vol.7*, 23-40.

金山光宏．(1997). 生徒の証明の捉え方の変容を促す証明指導の研究―学級の合意作りとしての証明を目指して―，上越教育大学大学院研修報告書

熊谷光一．(1998). 小学校5年生の算数の授業における正当化に関する研究―社会的相互作用論の立場から―．日本数学教育学会，数学教育学論究，Vol.70, 3-37.

杉山吉茂他．(2008). 新しい数学2．東京書籍．

関口靖広．(1992). 数学の教室における証明と論駁の探求．日本数学教育学会，数学教育学論究, 58, 31-35.