

資料の活用単元におけるグラフ電卓を使用した 中学生の数学的モデリングに関する考察

下平 将揮

上越教育大学大学院修士課程 2年

中学校数学に資料の活用が新設された。現在, 統計教材が豊富ではない実状と活用という言葉がいかなることを指すのか, 漠とした状況があるのではないだろうか。

今日, 高度情報化社会の発展とともに多様・多量の情報が溢れ, コンピュータ利用も一般的となりつつある。また, 最近の報道から「口蹄疫問題」や「異常気象」, 「鳥インフルエンザ感染」など, 統計的な判断が必要な社会問題も多い(下平, 2010b)。このような社会環境の中では, 身近に溢れる統計情報を正しく受け止め, 自身の意志決定に活用できる市民の育成が求められる(渡辺, 2007)。この研究では, 子どもが統計を用いる場面や活動の様態を緻密に検討する。

本研究の目的は, 中学校1学年で学習する資料の活用単元において, 統計的モデリングを行う単元設計のための基礎的理論を構築し, グラフ電卓を使用した子どもの統計的モデリング過程の特徴を明らかにすることである。

1. 先行研究について

1.1. テクノロジーに関連する先行研究

湊(1992)は, 教材提示方法において, 教師のテクノロジーの扱いによって, 教材のもつ基本的性格が等閑視されることがあってはならないと述べている。

Zbiek(1998)は, テクノロジーによる学習過程の影響の調査の中で, テクノロジーの

有効性の他に, 被験者がテクノロジーを用いない場合も見出している。

これらの研究に共通する特徴は, テクノロジーによる教材に応じた限界を考慮した上で, 授業でのテクノロジー利用に踏み込まなければならないということである。

1.2. 統計教育に関する先行研究

統計的リテラシーを中心とする研究を行った青山(2005)は, 統計を用いたモデルの再構築, 仮説立ては, 統計的リテラシーのねらい(Gal & Garfield, 1997)を鑑みても有意義であるとの知見を得ている。

青山(2007)は, PISA(2003)の不確実性領域において, 主張に対する根拠の脆弱性を見抜く二事例から, 批判的な洞察は統計的リテラシーの要であり, 不確実性を支える方法論として重視すべきと述べている。

新井(2009)は, 課題に応じた自己の目的を果たすため, 単一的な分析で終わるのではなく, 新たな疑問や課題などについて解決を試みる過程で, サイクリックな学習活動が期待できる PPDAC サイクル(Problem → Plan → Data → Analysis → Conclusion)のプロセスを重視して教材化を図り, 授業を行うことが重要であると述べている。

渡辺(2007)は, PPDAC サイクルの最初の課題に対する結論の場面で, 分析から客観的にわかったことと, そこからデータの背景に戻って推論したことをはっきり言葉

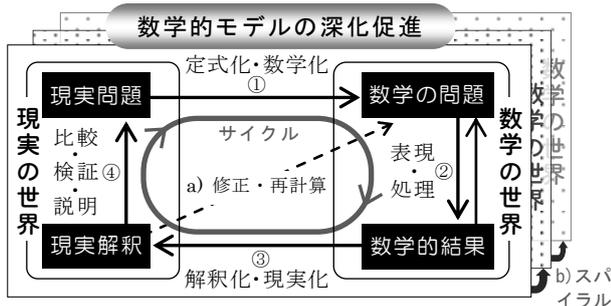
で区別して表現させ、伝えることが大切なことであると述べている。

2. 統計的モデリングと教材配列

2.1. 本研究で規定した数学的モデリング

三輪(1983)は、数学的モデリング過程を三つのサイクルとして図式化し、そのサイクルに作業、評価、一層の改良を含めている。池田(1999)や西村(2001)のモデリングは四サイクルで示され、池田(1999)は、修正の繰り返しに力点を置いている。川上(2007)は、数学的表現の深化と生徒の問題理解の深化に着目し、モデル枠組みを設定している。

三輪(1983)、池田(1999)、西村(2001)、川上(2007)らの見解を基に数学的モデリングの整理を行い、本研究における数学的モデリングを規定して、図式化した(図1)。



- ①【定式化・数学化】その事象を目的に合った数学的な問題場面につくり替える。
 - ②【表現・処理】数学的な問題から数学的結果を得る。
 - ③【解釈化・現実化】数学的結果を現実問題の言葉に翻訳する。
 - ④【比較・検証・説明】そのモデルを現実の状態と比較し、有効性を検証する。また、他者にその根拠や理由を説明する。
- a) [修正・再計算] モデルと現実的な結果との間に適切な関係がなく、不都合が生じた場合、再度モデルの仮設に立ち戻り、修正を施す。
- b) [数学的モデルの深化] 必要に応じて、①～④のスパイラルを図ったり、モデル過程を段階的に積み重ねたりすることで、数学的モデルを洗練させる。

図1 本研究で規定した数学的モデリング

ここで図1に示した数学的モデリング過程を層にしたのは、教材に応じたモデリングのサイクルの発展が起こり得るものという

視点からである。考慮すべきことは、現実問題を扱うすべての場面で、そのモデル化がこの過程の段階を順次踏むということではないということである。場合によっては、④の現実解釈から現実問題への移行が実際にはやや不透明となったり、課題や授業場面によって方向性が逆になったりする場合も考えられる。

2.2. 古典統計的モデリングの定義と枠組み

統計の知識を用いる場面では、多量のデータから予想し、適切に処理して整理を行い、集団の傾向や性質、規則性を知る記述統計(descriptive Statistics)と、一部の得られたデータ(標本)から調べたい全体(母集団)の傾向や性質、特性値を推定する推測統計(Inferential Statistics)とに大きく区分される(二宮, 2004)。中学校1学年で扱うのは記述統計である(文部科学省, 2008a, 2008b)。

統計学は確率論に基付き数学として体系化、確立化されている。しかし、初歩の記述統計に限定すると、数学的処理を経ているものの、一般に完全にそうなりと言い切れないような厳密ではなく曖昧な要素を含んでおり、現実事象における現象の課題と近似する一面をもっている。これが一般的に用いられる数学的モデリングとの決定的な差異とすることができる(下平, 2010a)。加えて、統計的リテラシーや統計的思考力の礎をこれから築いていく段階である中学1年生にとって、経験や判断材料が乏しく、現象の本質までを見極めることは容易なことではない。

一方、現実場面における資料の分析において、統計的モデルに当てはめて検証する場合、平均値の差の検定を行い、モデルの妥当性を検証する場合がある。即ち、平均値と標準偏差を用いて分析する。

先述のように、記述統計は、多量のデータによって集団の状態を数量的に記述する。し

かし、記述統計の中で扱うデータが考察の対象とされる母集団全体を指すのか、母集団の中のごく限られた標本を指すのかについては、明確に区別されてはいないだろう。中学校1学年までは、検定等を必要としない統計学の中でも極めて素朴で古典的な場合である。そこで、授業で用いることとなる教材データに柔軟さを利かすため、本研究では広義的には、記述統計とほぼ大きな差異はないのかも知れないが、検定を行わない場合を、古典統計 (Classics Statistics) という語を用いて言い表すこととする。

本研究では、古典統計的モデリングを、現実事象から収集した資料を散らばりと代表値で捉え、そこから抽出した数学的關係である、と捉え、統計全般におけるモデリングの階層と段階及び、比較を図2のように位置付けた。

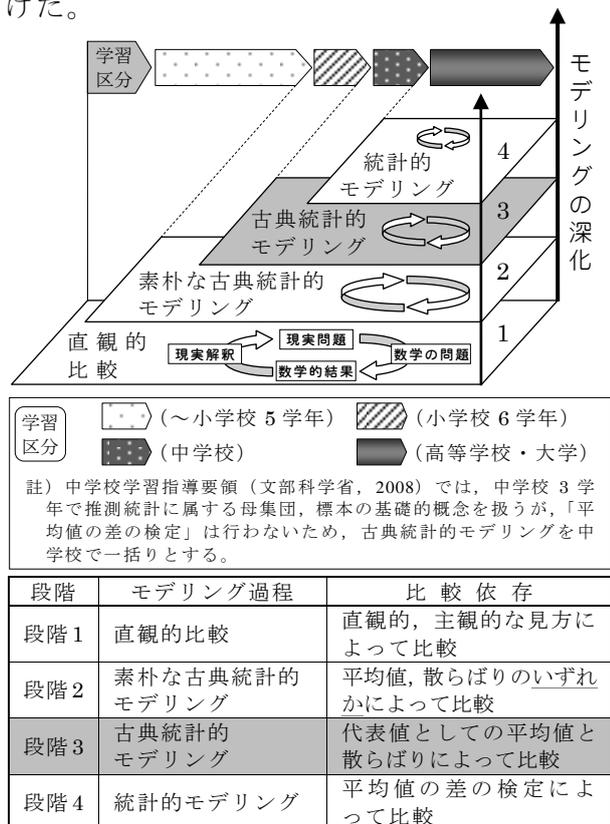


図2 統計全般におけるモデリングの階層と段階、比較

これは、現実場面における資料の分析において、統計的モデルに当てはめて検定や棄却

をする場合があることや統計的リテラシーや統計的思考力の構築段階である中学校1学年を考慮したことによる。古典統計的モデリングは、平均値の差の検定などの統計的モデリングの素朴な場合であり、その下に、素朴な古典統計的モデリングと直観的比較を位置付けた。

2.3. 教材配列とねらい

単元を通して行う教材配列とねらい、及び時数を、散らばりと代表値、グラフ電卓の利用、Watson et al. (2000) による統計的リテラシーの初期段階などに配慮して、以下の表1のように設定した。

表1 資料の活用単元における教材配列とねらい(下部), 及び時数

時	項・用語	題材
1 ・ 2	代表値と散らばり ・平均値(総和)	オリンピックの採点からどちらの国が金メダルかを判断する学習
統計的リテラシー		
3 ~ 6	度数分布 ・度数分布表 ・ヒストグラム ・度数分布多角形	縄跳びの跳躍記録から嵐さんは得意な方であるか、度数分布表やヒストグラム、度数分布多角形から判断する学習
統計的リテラシー / 素朴な古典統計的モデリング		
7 ・ 8	度数分布 ・相対度数	学級集団と学年集団とを比較するための方法を考える学習
統計的リテラシー / 素朴な古典統計的モデリング		
9	代表値と散らばり ・最頻値	物の特性とニーズとを照らし合わせながら代表値について理解を深める学習
統計的リテラシー		
10 ~ 12	代表値と散らばり ・中央値	2社のCD-R製品の録音時間(標本数:各20枚)から互いに資料の活用
統計的リテラシー / 古典統計的モデリング		
13 ・ 14	資料の活用	心拍数に関する疑問から仮説を立て、データ収集し、代表値や散らばりを基に検証する学習
古典統計的モデリング		

註) グラフ電卓のSTAT機能は主に、第10時~14時で使用する。ただし、RUN機能の使用については、それ以外の時間でも追究に応じて適宜に認める。

統計用語の理解やグラフ化は統計的リテラシーとして初期段階に位置付けられるため (Watson et al., 2000), すべての授業で古典統計的モデリングを行うのではない。この研究では、テクノロジーとしてグラフ電卓(カシオ製: CFX-9850GB PLUS)を使用した。

3. 教授実験について

3.1. 教授実験の方法

教授実験は、平成 22 年 2 月 22 日から 3 月 5 日にかけて、長野県公立 H 中学校 1 学年 1 学級 31 名を対象に、筆者が授業者となり、計 14 時間実施した。毎時間の授業は、授業全体の流れを把握するためのビデオカメラ 1 台、各々の活動を記録するためのビデオカメラ 4 台によって記録した。なお、教授実験では、TT (チームティーチング) など、複数の授業者が行う形態をとっておらず、授業者は筆者一人である。本稿では、発話や表記が多いという特徴をもつ Arisa と Arisa と関わる生徒の活動を中心に、本研究で規定した統計的モデリング、グラフ電卓の二つの視点から考察する。なお、本論文中の人名はすべてニックネームである。

3.2. 授業構想

基本的な学習の流れとして、対象、他者、自分自身とのかかわりを考慮して、問題(課題)把握、個人追究、全体追究、まとめ・確認、の四つの場を設け、授業を展開した。また、相互作用の場をより多く保障するために、数学的な見方や考え方、表現のよさを互いに共有する活動形態を、図 3 のように大きく三つに分類し、位置付けた。

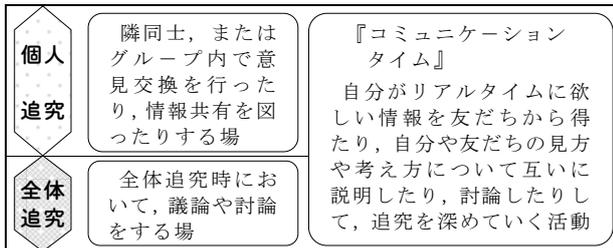


図 3 コミュニケーションタイムの活動と位置付け

コミュニケーションタイムは、自分がリアルタイムに欲しい情報を友だちから得たり、互いの見方や考え方を説明したり、討論したりして追究を深めていく活動で、教師が生徒の活動状態を見極めながら場を適宜設定する。ただし、特に必要としない生

徒は個人で追究を進めてもよいものとした。

4. Arisa の活動の実際と解釈

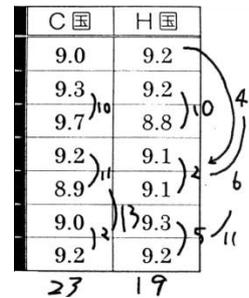
4.1. 金メダルを判断する学習(第 1 時)

信州オリンピック 2010 の団体決勝は、C 国 vs H 国の組み合わせになりました。この競技は、A 国から G 国までの 7 カ国の審判の採点により勝敗が決まります。各国の審判員の採点は右表のようになりました。果たして、金メダルは C 国と H 国のどちらのチームになったのでしょうか。

【各国審判員の採点表】

審判	C 国	H 国
①	9.0	9.2
②	9.3	9.2
③	9.7	8.8
④	9.2	9.1
⑤	8.9	9.1
⑥	9.0	9.3
⑦	9.2	9.2

Arisa は、各国の審判員の採点表を見渡し、C 国と H 国の整数部分を比較した。小数第一位の総和を暗算で求め C 国 23、H 国 19 と記して、C 国が金メダルであると予想を立てた(図 4)。これは、平均値の比較につながる総和の考えであることから素朴な古典統計的モデリングである。



C国の方が点数が多い

9の数と8の数は同じ数だけあから計算しない?、小数第一位のところが?調べる。

図 4 Arisa の追究①

全体追究後、教師は「しまった! 審判員がどこの国の審判員なのかという大事な情報を伝え忘れてしまった」と言い、拡大得点表の左部分(表 2)を剥がして審判員の国名を提示した。Arisa は大声で「え〜、有利すぎるよ、こんなの」と発し、感じたことをワークシートに記述した(図 5)。

表 2 審判員の国名

【各国審判員の採点表】

審判	C 国	H 国
A 国	9.0	9.2
B 国	9.3	9.2
C 国	9.7	8.8
D 国	9.2	9.1
E 国	8.9	9.1
F 国	9.0	9.3
G 国	9.2	9.2

○C国の審判は自分たちの国を勝たせようと点数を高くしたように見えるのでC国とH国以外の審判をつかた方がいいと思う。

A 国	9.0	9.2
B 国	9.3	9.2
C 国	9.7	8.8
D 国	9.2	9.1
E 国	8.9	9.1

図 5 Arisa の追究②

これはデータのもつ背景の捉え方に着目した統計的リテラシーの表れである。この

後 Arisa は、C 国の審判員を除いた六つの得点の総和を算出し、H 国が金メダルであると判断した。

4.2. 度数分布表から判断する学習(第4時)

1年A組の縄跳びの跳躍データ 階級別度数分布表					
-階級幅 20-		-階級幅 5-		-階級幅 2-	
跳躍回数(回)	度数(人)	跳躍回数(回)	度数(人)	跳躍回数(回)	度数(人)
以上 未満		以上 未満		以上 未満	
30 ~ 50	13	35 ~ 40	2	36 ~ 38	1
50 ~ 70	22	40 ~ 45	4	38 ~ 40	1
計	35	45 ~ 50	7	40 ~ 42	1
		50 ~ 55	11	42 ~ 44	2
		55 ~ 60	6	44 ~ 46	2
		60 ~ 65	4	46 ~ 48	1
		65 ~ 70	1	48 ~ 50	5
		計	35	50 ~ 52	5
				52 ~ 54	4
				54 ~ 56	3
				56 ~ 58	3
				58 ~ 60	2
				60 ~ 62	2
				62 ~ 64	1
				64 ~ 66	1
				66 ~ 68	1
				計	35

Arisa は、嵐さんの跳躍回数 54 回から、嵐さんは縄跳びが不得意ではないという見方をもった。この理由は、嵐さんが階級幅 20 の度数分布表では上から 1 番目に属し、階級幅 10 は上から 2 番目に属することによる。Arisa は、真ん中という判断基準から、直観的比較を行い、階級幅 2 の度数分布表を除いた。また、その判断には、嵐さんという名前だから不得意ではよくない” という心情が混在していた可能性も否めない。

4.3. ヒストグラムから判断する学習(第5・6時)

Arisa は、図 6・7 に示す自分で描いた二つの柱状グラフの全体的な概観から、階級幅 2 のグラフの方が適していると判断した。その理由は、一人ひとりの記録が見やすい

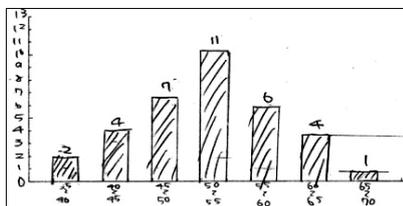


図 6 Arisa の柱状グラフ(階級幅 5)

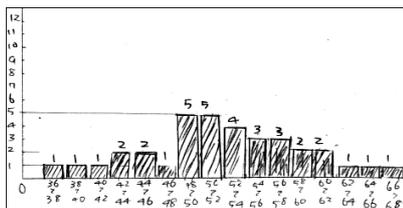


図 7 Arisa の柱状グラフ(階級幅 2)

からである。ここでは散らばりへの着目は見られず直観的比較であった。

第 6 時で Arisa は、階級 46~48 の度数が 1 である事実から「この情報はあまり重要ではない」と発言した。これは、Arisa が情報が読み手側に与える解釈に影響することに気付いたものであり、統計的リテラシーの表出である。さらに、Arisa のグラフの概念に、より元データに近い詳細なグラフ、柱の数に加えて、全体の散らばり具合を見るという古典統計的モデリングへ発展させるための素地が芽生え始めている。

4.4. CD-R 製品を選択する学習(第 10~12 時)

【学習問題】

パシューム娘たちは、自分たちの音楽を録音するために CD-R (70 分録音用) を購入しようと考えている。しかし、実際には正確に 70 分録音できるというわけではなく、商品によってまちまちである。そこで、A 社製 CD-R と B 社製 CD-R をそれぞれ 20 枚ずつ購入し、実際の録音時間を調べた結果が下の表である。

あなたなら A 社製と B 社製、どちらの商品 (CD-R) を購入しますか。判断する基準を明確にして、説明しなさい。

《A 社製 CD-R》(分)

70.5, 68.0, 69.2, 72.8, 67.0, 70.9, 68.0, 69.0, 71.9, 76.2, 70.6, 69.2, 66.1, 69.1, 72.8, 71.4, 68.2, 70.3, 67.1, 71.7

《B 社製 CD-R》(分)

70.3, 69.2, 68.4, 67.6, 69.7, 71.1, 70.7, 68.7, 69.9, 72.5, 66.2, 69.5, 70.5, 69.8, 68.3, 67.5, 68.9, 71.4, 69.3, 70.8

Arisa は 70.0 分を基準とし、各々の製品の総和を算出した(図 8)。

$$\begin{aligned}
 & 0.5 \times (-2) + (-0.8) + 2.8 + (-3) + 0.9 + (-2) + (-1) + 1.9 + 6.2 + 0.4 + (-0.8) + (-3.9) + (-0.9) \\
 & + 2.8 + 1.4 + (-1.8) + 0.3 + (-2.9) + 1.7 \\
 & = 0 \\
 & 0.3 + (-0.8) + (-1.6) + (-2.4) + (-0.3) + 1.1 + 0.7 + (-1.3) + (-0.1) + 2.5 + (-3.8) \\
 & + (-0.5) + 0.5 + (-0.2) + (-1.7) + (-2.5) + (1.1) + 1.4 + (-0.7) + 0.8 \\
 & = -9.7 \\
 & A: A社の方が良さそう。B社は -9.7分は少なくていい。
 \end{aligned}$$

図 8 Arisa の 70.0 分を基準とした考え

図 8 に示すものは Arisa による偏差(分散度)の考えを適用した素朴な古典統計的モデリングである。次に、グラフ電卓の操作方法が理解できた Arisa は、List1 に A 社製品のデータを、List2 に B 社製品のデータを入力した。Arisa はヒストグラムの設定画面で(開始値 66, 階級幅 1.14)と自

動設定されている数値を(66.1, 5)→(66.1, 2)→(66.1, 1)→(66.1, 1.5)と階級幅を任意に変更した。次に、階級幅 1.5 のそれぞれのヒストグラムを描き写し、度数分布多角形を重ねて手描きして、図 9 のように Arisa は記述した。これは散らばりの考えに基づく素朴な

グラフから。
 ○ A社のほうがB社よりも多いのがわかる。
 ○ 度数分布多角形にしてみれば A社のほうが多いと見える。

古典統計的モデリングである。図 9 Arisa の CD-R 問題に対する考察。また、教師が提示したヒストグラムとの相違から開始値によってもグラフの外形が変わってくることを自身で気付くことができた。この気付きは瞬時に分布の様相の違いを確認できるというグラフ電卓の利点によるところが大きい。

4.5. 心拍数に関する学習(第 13・14 時)

ドキドキする♥数学 — 最終話 —

Q. 先生の心臓に関する素朴な疑問？

その巻 人によって心拍数は違うのか？
 その式 男性と女性によって心拍数は違うのか？
 その巻 日頃運動している人とそうでない人とは、心拍数は違うのか？

Arisa のクラスの心拍数データ (回/分)

66	76	77	64	63	69	81
67	45	71	53	69	79	72
63	71	73	40	71	74	72
64	64		62	69	82	67
			70	62	58	70

・記載順はランダム
 ・ゴシック体は女子生徒の記録
 ・**数**(囲いあり)は運動部、囲いなしは文化部、もしくは普段運動をあまりしていない生徒

仮設立での場面で Arisa は、その巻の疑問に対して、同じ、であると予想し、その理由として、「そんなにみんなと変わらないと思うから」と記述した。その式の疑問に対して、違う、と判断し、「男性と女性では体力や体つきが違うから」と理由付けした。その巻に対する疑問には、違う、と予想したが理由は書けなかった(図 10)。

その巻: (違う・同じ・わからない)
 (理由) そんなにみんなとかわらないと思うから
 その式: (違う・同じ・わからない)
 (理由) 男性と女性では体つきが違うから
 その巻: (違う・同じ・わからない)
 (理由)

図 10 Arisa の仮設

その巻の追究で Arisa は、ヒストグラム

を作成せず、度数分布表のみを手描きで作成し、「だいたい同じ。でも、60~75 回に心拍数が集中していることがわかった」と記述した。ある程度 Arisa 自身の仮設通りの結果として受け止めてはいるものの、「でも」という言葉から曖昧さも残っている。これは、散らばりに着目していることから素朴な古典統計的モデリングである。

その式の追究ではグラフ電卓を活用し、階級幅を 5, 10, 2 と順に設定してヒストグラムに表示させた。その結果、階級幅 5 を選択し、ワークシートに記録した。次に一変数統計計算結果から平均値を記した。Arisa は「平均値はどちらも同じような値であった」と言い、さらに「違う。女子は 70~75 だが、男子は 60~65 だから⇒女子の方が心拍数が高い」と書いた。これは Arisa が初めて行った古典統計的モデリングである。

図 11 は、その巻における母集団をクラス内全員としたときの統計結果、及び階級幅 5 のヒストグラムである。

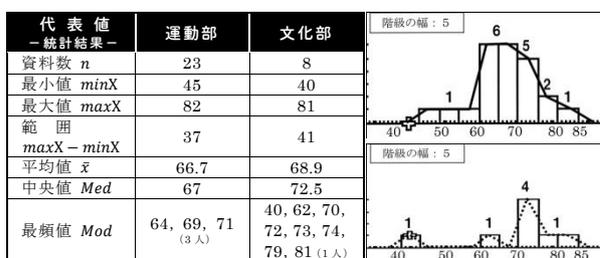


図 11 心拍数(その巻)の統計結果とヒストグラム

多数の子どもはこの中の代表値やグラフから判断し、理由や根拠として用いていたが、Arisa は男子は全員運動部であったことから、女子のみを母集団として捉え、平均値を求めて「文化系の方が心拍数が多い」と判断した。これは素朴な古典統計的モデリングへの依存である。

また、全体追究時、グラフ電卓をツールとして授業を展開した結果から、クラス内の相互作用が湧き起こり、Arisa はその中で自分の考えを主張していった。プロトコ

ルの一部を図 12 に示す。

T	ほう、医学的に説明してくれましたね。で、結論はどうする？
Arisa	文化部の方が心拍数が多い。
Hazuki	このクラスの運動していない人の心拍数がたまたま、偶然だったかもしれない。
Arisa	えっ、でも、今この授業でやっているのはこのクラスのことだから。これでもいいんじゃないのかなと思います。 (元データを眺めている)
Yuka	みんな同じ状況というか、みんなパルスオキシメーター（心拍測定器）で測定するとか、風邪ひいている場合とひいていない場合とか、そういうのも全部合わせないとわからない。
Takeo	そんなの無理だよ。
生徒多数	無理じゃないの、無理だよ。

図 12 全体追究時における授業プロトコルの一部

図 12 のプロトコルから、データの信憑性を疑問視する Hazuki の発言に対し、Arisa は否定的な発言をしている。これは、与えられたデータを基に資料全体について記述、説明するという点で、古典統計に強く直結するものであり、Arisa は素朴な古典統計モデリングの状況から発展していることが伺える。

5. Arisa の活動と統計的モデリングとの総括的な考察

Arisa の活動と統計的モデリングとを検証すると、単元前半では、第 1・2 時のオリンピックの問題を除き、統計的モデリングは行われなかった。その理由として、単元前半は、統計的リテラシーや統計的な見方や思考力を養っていくことをねらいとした題材の連続であったことに加え、経験や判断材料が乏しいことも要因として挙げられる。特に、ただ漠然と「見やすい」「わかりやすい」「大胆すぎる」といった表現では、到底現実問題には帰結しないことも Arisa の活動の具体と統計的モデリングとを照合させる視点で明らかとなった。

Arisa の状態を移行させるきっかけとな

ったことの一つに、第 6 時における Takeo の「階級幅 2 のグラフは単なる上がって下がっているグラフではなく、途中の変化が表れている」という発言がある。それまでの Arisa は、大胆という表現から、柱状の個数に執着し、グラフの判断を委ねていた。しかし、Takeo の発言が Arisa にとって初めて一つ一つの度数がグラフ全体に及ぼす印象や影響に目を向けさせることにつながった。さらに、嵐さんの階級付近ではないところでの急激な変化であったことから、嵐さんの跳躍回数の判断には意味がない、重要ではないと認識し、跳躍回数が 46～48 回の度数について「その情報はあんまり重要ではない」という判断に至ったと解釈した。即ち、Arisa のグラフの概念に、全体の散らばり具合を見るという古典統計的モデリングへ発展させるための大事な視点を与えるとともに、授業終末時に促した教師の判断理由が、単元後半における Arisa のモデリング形成への助長となった。第 6 時の Arisa の活動と統計的モデリングを図 13 に示す。

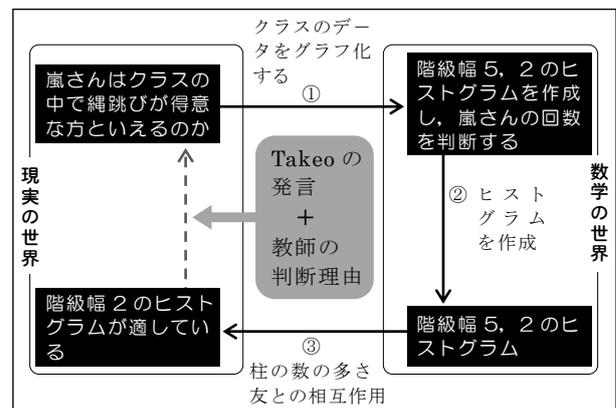


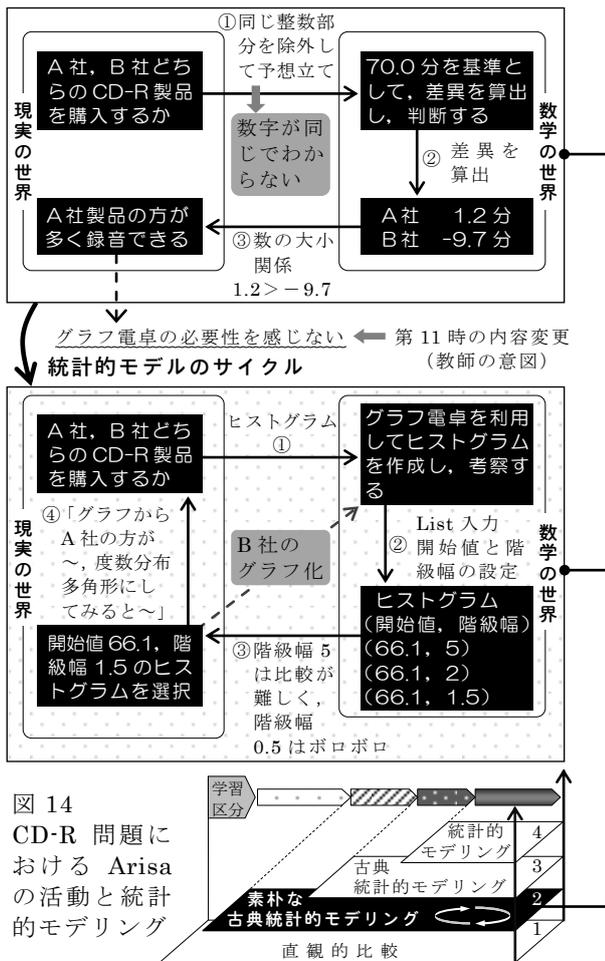
図 13 第 6 時における Arisa の活動と統計的モデリング

数値データやグラフをただ眺めていたのでは、役に立つ良質の情報を引き出すことは難しく、データに価値を感じない。Arisa のように、全体の散らばり具合を意識しながら、データのもつ何らかの特徴や傾向に気付かせる機会を授業場面で多く設けるこ

とが、実際の問題において、現実事象と対比して問題解決していく力を養うことにつながっていくと考える。だからこそ、学校教育において統計的モデリングが必要なのである。

単元後半の Arisa の活動では、統計的モデリングが行われていた。これは、Watson et al. (2000) の統計的リテラシーの初期段階を理解しながら、生活経験が生かされる題材や実データ、仮設とその検証を行う活動を積極的に取り入れた成果である。

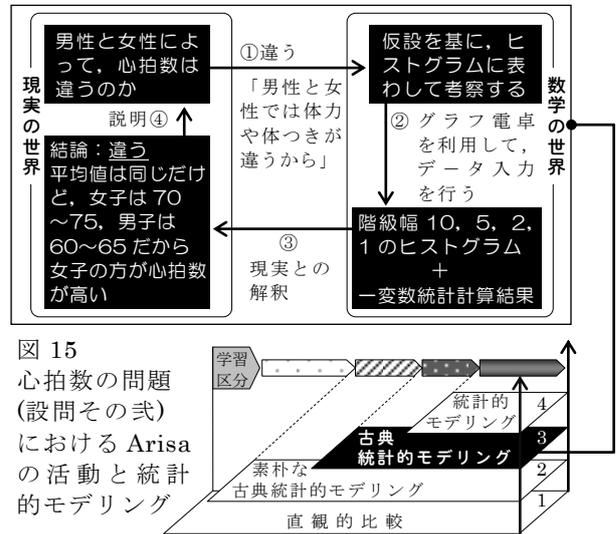
第 10～12 時で扱った CD-R の学習における Arisa のモデルは、教師による意図的な内容変更の介入もあったが、図 14 に示すように同一題材内でサイクルされ、偏差とグラフの双方の散らばりを経験している。



この CD-R の問題は Arisa にとって、素朴な古典統計的モデルを強固に構築し、深

化を促すことができた問題となった。

第 13・14 時で扱った心拍数の問題のその式での Arisa の活動を、図 15 の統計的モデリングの段階に沿って説明する。



Arisa は、数学の問題を仮設に基づいて、ヒストグラムに表わして考察する、とした。これは CD-R の問題の追究を反映し、比較対象が二つあるためであると推察する。数学的結果は、階級幅 10, 5, 2, 1 のヒストグラム及び、一変数統計計算結果、であり、ヒストグラムと代表値の中から平均値を選択して現実解釈を行い、説明付けた。また、コミュニケーションタイムでの友との会話から、「ヒストグラムを見れば、一番飛び抜けている柱が左と右に全然バラバラだから」として、最頻値にも着目している。このことから、代表値としての平均値、最頻値を比較材料としている点に加え、平均値を意識しながら散らばり具合を表現し、さらにヒストグラムの階級幅を決定する際、資料全体に着眼している点を総括的に解釈すると、古典統計的モデリングへの発展が顕著に表れている。さらに、本時に至るまで繰り返し行われてきた統計的モデリングによって、素朴な古典統計的モデリングの状態を脱却し、収集したデータを分析、考察するという古典統計モデリングの本質に

まで気付いている。

しかし、心拍数の問題のその参での Arisa のモデリングは、代表値としての平均値を適用していることから、素朴な古典統計的モデリングであった(図 16)。

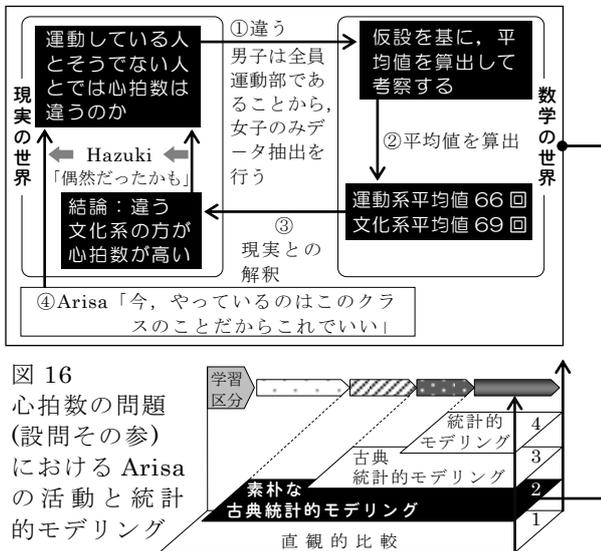


図 16
心拍数の問題
(設問その参)
における Arisa
の活動と統計
的モデリング

Arisa が敢えてグラフ化を行わず、平均値のみで判断した理由は次のようであると解釈する。これまで、Arisa が総和、平均値の考えを適用した場面は、第 1・2 時と本時のみであり、それ以外はグラフに依存している。この相違はデータ数である。Arisa は、ある程度のデータ量があって、グラフ化して散らばりを見るという視点を学習してきていると推察する。したがって、この問題が古典統計的モデリングを形成できなかった要因は、問題に含まれるデータ数が極端に少なく偏っていたためであると解釈できる。逆に、データ数が多ければ、ヒストグラムを作成し、散らばりの検証が行われ、古典統計的モデリングへの発展がこの問題においても見られたのかもしれない。第 14 時までの踏襲された教材が Arisa のツール選択に活かされていたのである。

一方、Arisa の活動から見られたモデリングの発展には、グラフ電卓が有効に作用したことも関与している。第 10 時での Arisa は、グラフ電卓におけるごく一部の

操作方法を理解していたに過ぎず、手操作も不慣れな状況である。しかし、グラフ電卓は、Arisa によって入力された階級幅や開始値に対してフラッシュ的にヒストグラムを表示させ、Arisa のグラフ選択の拡張と判断に役立っている。同時に、資料の平均値や最頻値、中央値がその都度求められ、代表値への意識付けが行われていた。この繰り返し行われていた一連の過程が心拍数の問題の追究に生かされ、散らばりと代表値としての平均値との関連付けがグラフ電卓上で行われていた。この過程に至るまでには、グラフ電卓の操作方法や各々のグラフ電卓を使って求めた結果の比較を友だち同士で行っている活動が頻繁に見られた。このような相互作用の中にグラフ電卓が一つの道具として介在している。

6. 結語

本研究における結論は次の二点である。第一に、実データや生活経験を取り入れた題材は、仮設とその検証を行う活動に有効である。統計的モデリングのサイクルによって、子どもは、数学的結果の解釈と現実的な解釈とを明確に区別し、伝達することができるようになる。モデリングのサイクルの繰り返しは、素朴な古典統計的モデリングから古典統計的モデリングへの発展を可能とする。ただし、教師は、扱うデータ数や比較する対象について古典統計的モデリングに当てはめ、十分検討、配慮した上で、教材開発していかなければならない。

第二に、資料の活用においてグラフ電卓を使用することは、一括的なデータへの変換により、階級幅を任意に変更させながらヒストグラムを利用したり、中央値や平均値で比較したりする過程で機能を発揮し、子どもの古典統計的モデルをつくることに有効に作用する。その際、個人内での対話よりも、グラフ電卓を介した友との相互作

用がある方がより効果大きい。

引用・参考文献

青山和裕. (2005). 統計的リテラシーの階層をとらえる方法論についての一考察：統計データからの仮説設定やモデル構築に注目して. 筑波数学教育研究, 24, 39-46.

青山和裕. (2007). 日本の統計教育改善の方向性についての検討. 日本統計学会誌, 36(2), 263-277.

新井仁. (2009). 「資料の活用」領域における教材の開発に関する研究：PPDAC を重視した授業実践を通して. 日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集, 403-408.

Burghes, D. & Borrie, M. (1992). 微分方程式で数学モデルを作ろう. 日本評論社, 2-14.

飯高茂, 松本幸夫, 岡部恒治. (2007). 数学英和小辞典. 講談社.

池田敏和. (1990). 数学的モデリングとその課題提示に関する事例的研究. 日本数学教育学会第23回数学教育論文発表会論文集, 393-398.

池田敏和, 山崎浩二. (1993). 数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究. 日本数学教育学会, 日本数学教育学会誌数学教育, 第75 巻, 第1号, 26-32.

池田敏和. (1999). 数学的モデリングを促進する考え方に関する研究. 日本数学教育学会誌：数学教育学論究, 71・72, 3-18.

川上貴. (2007). 数学的モデルの深化過程の特徴：中学生によるモデリングを分析して. 日本科学教育学会研究会研究報告, 22(3).

湊三郎. (1992). “円周角の不変性”の提示方法の認識論的視点からの評価. 日本数学教育学会誌, 74(3), 76-81.

三輪辰郎. (1983). 数学教育におけるモデ

ル化についての一考察. 筑波数学教育研究, 2, 117-125.

文部科学省. (2008a). 中学校学習指導要領. 東山書房.

文部科学省. (2008b). 中学校学習指導要領解説 数学編. 教育出版.

新村出編. (2008). 広辞苑, 第六版. 岩波書店.

二宮裕之. (2004). 統計教育の歴史：現在・今後の課題. 愛媛大学教育学部紀要, 教育科学, 第 50 巻, 123-130.

西村圭一. (2001). 数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究. 日本数学教育学会誌, 第 83 巻, 第 11 号, 2-12.

岡本和夫他. (2009). 未来へひろがる数学：平成 21 年度用補助教材. 新興出版社啓林館, 18-36.

下平将揮. (2010a). グラフ電卓を用いた資料の活用における単元設計の基礎的理論. 上越数学教育研究, 25, 87-102.

下平将揮. (2010b). 資料の活用単元におけるグラフ電卓を使用した数学的モデリング過程. 日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会論文集, 247-252.

渡辺美智子. (2007). 統計教育の新しい枠組み：新しい学習指導要領で求められているもの. 数学教育学会論文誌第 48 巻, 3・4 号, 39-51.

Watson, J. & Moritz, J. (2000). Developing Concepts of Sampling, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 44-70.

Watson, J. & Collingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct, *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 184-201.