上越数学教育研究，第26号，上越教育大学数学教室，2011年，pp.61-70.

高等学校数学の三角比，三角関数の連続性と乖離

－プラクセオロジーの視点を用いた教科書分析から－

角田　直樹
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1．はじめに

高等学校の数学Ⅰ, Ⅱの教科書における「三角比」,「三角関数」には，三角比から三角関数へ拡張するまでに三つの定義が示されている。「鋭角の三角比」,「鈍角の三角比」,「三角関数」のこれらの定義は，それぞれ独立したものではなく，三角比から三角関数へ拡張していく一連の過程に含まれる（長岡，2003，齋藤，2008)。教科書では，鈍角の三角比を定義する際,「これまでは, 直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきた。ここでは，座標を用いて三角比を鈍角にまで拡張することを考えてみよう」（数学Ⅰ，東京書籍，2002）とされており, 三角関数を定義する際は,「数学Ⅰで学んだ正弦，余弦，正接を一般角について定義しよう」（数学Ⅱ，東京書籍，2003）とされている。即ち，鋭角の三角比の定義を用いて「鈍角の三角比」を定義しており，鈍角の三角比を用いて「三角関数」が定義されている。

鋭角の三角比から三角関数へ定義を拡張していく一連の過程の中に，生徒が示す困難性についての報告が幾つかある。柳田（2005）は，鋭角の三角比から鈍角の三角比に拡張する場面に焦点を当てた研究を行い, その中で,「三角比は初めに，鋭角における三角比を直角三角形の辺の比として定義し，次に，鈍角においても三角比を定義できるように，座標を用いて三角比を定義する。しかしながら，教科書の記述では，形式的に座標が導入されており，その導入には飛躍がある。この飛躍に三角比を理解する難しさがある。」と，鋭角の三角比から鈍角の三角比に拡張する際に飛躍があることによる困難性について述べている。

筆者は, 柳田（2005）にあるような飛躍が, 鈍角の三角比から三角関数への学習の際にも存在すると考えた。なぜならば，三角比と三角関数では, 使われている数学概念が異なる。例えば，三角比は辺の比の値として定義されているが，三角関数は，関数の一つとして定義されている。また，三角比では，一般に三角形の辺の長さや，角の大きさを知ることが課題となる。しかし，三角関数では，ある周期で変化する事象についてグラフを示すことや, グラフの周期を求めることが課題となる。さらに,『高等学校学習指導要領解説　数学編数理編』（文部科学省，2006）では，三角比は,「図形と計量」の内容であることから，幾何領域で扱われ, 三角関数は,「いろいろな関数」の内容であることから，関数もしくは解析領域で扱われる。即ち，三角比から三角関数へ定義を拡張する際，扱われる角の大きさが一般角へ拡張されただけではなく，扱われる数学の領域も異なっている。このように, 三角比と三角関数の扱われる領域が異なれば, 課題に応じた問題意識や，目標が異なるのではないだろうか。こうした事柄が，生徒にとって，三角比と三角関数を学習する際の飛躍となり得ると考えた。

そこで，本研究では，三角比単元と三角関数単元における連続性と乖離を明らかにすることにより，飛躍をより明確にしたい。そのため，今回は，教科書分析により，三角比と三角関数それぞれの単元において想定される問題を解決する活動（数学的な営み）を探る。ここから連続性と乖離を明らかにし，三角比と三角関数を学習する上での，生徒にとっての困難性を探る手掛かりとしたい。

２．分析の視点と方法

前章で，想定される数学的な営みを探ると述べた。これは，数学という知の体系が実践面と理論面から構成されるという Chevallard によるプラクセオロジーのモデルにおいて，その実践面を探るということである。以下では，まず，このプラクセオロジーのモデルを概説し，実践的な側面の性格を特徴づけるために利用する Duval によるレジスターの考えについて述べる。そして，教科書分析の方法を示す。

2.1. 数学の知のモデル：プラクセオロジー

プラクセオロジーは，「数学の知」のモデルである（Chevallard, 1999, 2006）。ここで知とは，数学における定義や性質のみならず，数学の課題を解決する活動やそこでのノウハウをも含むものである。つまり，数学の知を実践的な側面を含めて広くとらえる。

プラクセオロジーは，タスクタイプ (T)，テクニック (τ)，テクノロジー (θ)，セオリー (Θ) の四つの要素から構成される。タスクタイプとテクニックは「実践的な側面」であり，テクノロジーとセオリーは「理論的な側面」である。後者は，通常，知識とみなされるものである。

タスクタイプ (T) とは，一つ以上のタスク (t) を含むものであり，タスクとは，課題や問題を意味する。例えば，「階段をのぼる」や，「関数にある値を代入する」などである。テクニック（τ）とは，タスクを解決するためのノウハウである。テクノロジーとは，テクニック (τ) を正当化したり，確かめたりすることができるようにするものである。さらに，このテクニックの説明に理由を与えるものがセオリーである。これらをまとめると，図 1 のようになる。なお，プラクセオロジーについては，宮川 (2009；投稿中) に詳しく述べられている。

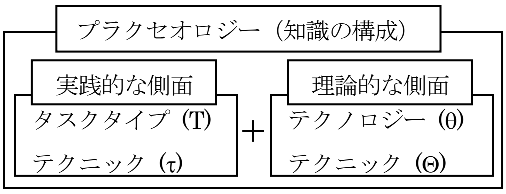


図１　プラクセオロジーの構成

本研究では，教科書に示されている「問い」をタスクとして捉え，三角比と三角関数のプラクセオロジーの実践的な側面（タスクタイプとテクニック）に焦点を当てる。そして，数学の知の実践面にいかなる連続性と乖離が存在するか明らかにする。

2.2. テクニックを分析する視点

プラクセオロジーの視点を用いてタスクタイプとテクニックを同定する。しかし，単に同定しただけでは同定されたものが相互にいかなる関係にあるのか明確ではない。そこで本研究では，テクニックの性格を特徴付ける視点として，Duval (2006) によるレジスターを採用する。レジスターは，記号表現の体系を意味し，記号表現の扱い方から学習者の認知活動を特徴づける分析ツールである。レジスターという概念を利用することにより，三角比と三角関数のそれぞれの領域で，学習者が用いると想定されるテクニックを認知的な側面から特徴づけ，二つの領域の連続性と乖離を明らかにできると期待する。

本研究では特に，代数レジスター，図形レジスター，座標レジスターなどの異なるレジスター（記号体系）と，レジスターにおける「処理」と「転換」に焦点を当てる。後者の記号表現の 2 種類の変換（処理と転換）は，

Duval (2006) で, 非常に異なる認知活動もしくは数学的な活動と捉えられるものであり, テクニックの性格を特徴づける上で重要になるものである。ここで, レジスターにおける「処理」とは,「同じレジスター内で起こる表現の変換」(Duval, 2006, p.111) である。つまり, ある記号表現を同一記号体系内で変換することである。一方,「転換」とは,「示された対象を変えることなしに, レジスターを変えることからなる表現の変換」(Duval, 2006, p.112) である。つまり, ある記号体系の記号表現を別の記号体系の記号表現に変換することである。なお, レジスターについては, 宮川 (2005) や石塚 (2010) に詳しく述べられている。

2.3. 分析の方法

三角比と三角関数の連続性と乖離を明らかにするために, 教科書に見られる問いからタスクタイプとテクニックを分析する。分析には, 数研出版の『改訂版数学 I』,『改訂版数学 II』(川中ほか, 2010) を用いる。三角比の分析の範囲は, 教科書の改訂版数学 I 第 3 章「図形と計量」であり, 三角関数は, 改訂版数学 II 第 4 章「三角関数」である。ただし, 三角比単元の「球の体積と表面積」と「相似と計量」, 三角関数単元の「一般角と弧度法」は, 三角比, 三角関数を用いないため, 分析の範囲から外す。

分析の対象となるものは, 教科書に示されているすべての問い (例, 例題, 問, 演習問題など) である。これらの問いをタスクと捉え, 抽出し, そして, 問いが求めている数学的な対象を基準にタスクタイプに分類する。その際, 各タスクタイプのタスクの数も示す。次に, 同定したタスクタイプのタスクを解決するためのテクニックを明らかにする。テクニックは, 教科書の例題などで与えられているものはそれを利用し, 与えられていない場合は, 教科書の前後の内容から, 筆者が最も一般的であろうと想定したものを利用した。そして、同定したテクニックとレジスターの視点から特徴づけ、三角比単元と三角関数単元の連続性と乖離を探る。

3. 三角比単元の分析

3.1. 三角比単元のタスクタイプ

教科書で扱われている三角比に関するタスクを抽出し, タスクが求める数学的な対象を基準に分類すると, 表 1 のようになった。表中の数は, タスク (大問) の数である。

表 1　三角比単元のタスクタイプと, その数

タスクタイプ	数
($T_{1.1}$) 三角比の値に関するタスクタイプ	40
($T_{1.2}$) 三角形に関するタスクタイプ	39
($T_{1.3}$) 平面図形に関するタスクタイプ	6
($T_{1.4}$) 立体図形に関するタスクタイプ	2
($T_{1.5}$) 等式の証明を行うタスクタイプ	6

ここで, ($T_{1.1}$) は,「三角形の角の大きさが与えられているとき三角比の値を求めるタスク」や「三角形の辺の長さが与えられているとき, 三角比の値を求めるタスク」,「一つの三角比の値が与えられているとき他の三角比の値を求めるタスク」,「三角比の値から角の大きさを求めるタスク」などのタスクを含むものである。これらのタスクの主な問いは, 三角比の値を求めることである。ただし, 三角比の値から角の大きさを求めるタスクもここに含めた。これは, 三角比の値を求めるのではなく, 角の大きさを求めるタスクであるが, 三角形などの図形よりも主に三角比の値を問題とするためである。具体的には, 次節の図 2 である。また, 一つの三角比の値が与えられているとき他の三角比の値を求めるタスクは, 具体的に, 図 3 のタスクである。($T_{1.1}$) のタスクの数は, ($T_{1.2}$) とともに多かった。これは, 三角比の値と角の大きさの対応が三角比の基礎的なものであり, 指導の際に重視されるものだからであろう。

($T_{1.2}$) に含まれるタスクは,「三角形の角の

大きさを求めるタスク」,「三角形の辺の長さを求めるタスク」,「三角形の面積を求めるタスク」である。これらのタスクの主な問いは,三角形の辺や角の大きさ，面積，概形を答えることである。例えば，三角形の角の大きさを求めるタスクは，次節の図 4 である。($T_{1.2}$) に含まれるタスクは，主に「三角形を解くこと」を問いとしている。つまり，ある一意に決定された三角形の辺もしくは角のいくつかの情報から，残りの未知の情報を導くことが課題となる。($T_{1.2}$) に含まれるタスクの数は,($T_{1.1}$) とともに多く，三角比単元において中心的なタスクタイプであることがわかる。

($T_{1.3}$) は,「平面図形の辺の長さを求めるタスク」,「平面図形の面積を求めるタスク」からなる。($T_{1.4}$) は,「立体図形の体積を求めるタスク」からなる。これらのタスクは，平面図形や立体図形について長さや，角度，面積の値を求めるものである。本来であれば，三角形に関するタスクタイプも，平面図形に関するタスクタイプと分類することもできるが,三角比では,三角形が定義で利用されるなど,特別な位置づけにあることから，ここでは区別した。問題数を見ると，平面図形と立体図形に関するタスクタイプは，($T_{1.1}$) と ($T_{1.2}$) と比べると，とても少ない。

最後に，($T_{1.5}$) は「図形から導かれる等式の証明」を行うタスクタイプである。このタスクタイプでは，何らかの値を求めたり，平行や合同などの幾何性質を証明したりするのではなく，ある図形から得られる等式の証明が求められる。平面幾何であれば，一般に,幾何性質の証明が求められることが多いが,三角比単元にそういったタスクはなく，等式の証明問題が多くはないもののいくつか見られた。例えば，次節の図 5 のようなタスクである。これは平面図形に関するタスクタイプともいえるが,等式が問題とされていること,証明が求められていることから，区別した。

三角比単元のタスクタイプを概観すると，分析した教科書の章が「図形と計量」であることもあり，多くが幾何領域，特に平面幾何領域のタスクであることがわかる。また，($T_{1.1}$) のような値を重視するタスクも多かった。これは，三角比が測量や計量に用いられてきたこと，三角比の値と角度が学校教育で三角比の基礎的なものと認識されているためであろう。

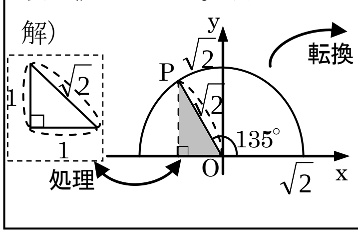
3.2. 三角比単元のテクニック

次に，各タスクタイプにおいて，どのようなテクニックが用いられるか見ていく。

まず, ($T_{1.1}$) のタスクタイプに含まれる「角の大きさが与えられているとき三角比の値を求めるタスク」と,「三角比の値から角の大きさを求めるタスク」には，タスクを解決するテクニックが二つある。一つ目は，三角比の表を利用して値を特定するものであり，二つ目は，図を用いて三角比を求めるために必要な辺や値を特定し，それを定義の式に代入することで解決できる。この具体例を図 2 に示す。図中の破線で囲まれた直角三角形は，筆者が加えたものである。このタスクは，図として，半径$\sqrt{2}$の半円がすでに与えられており,色のついた直角三角形から P の座標を求め,座標を三角比の定義に代入すること解決できる。このテクニックは，与えられた図形レジスターにおいて直角二等辺三角形を認識するといった簡単な処理を行い，そこで得られた辺の長さを代数レジスターへ転換し簡単な処理によって値を求めるものである。

問）下の図を用いて，次の角の正弦，余弦，正接の値を求めよ。(1) 135°

解）



$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = -1$

図 2　問の出展：改訂版数学 I，p.118，練習 15

これらのタスクの解決には多くのレジスタ

一の処理と転換が求められるものではなく，簡潔なものであった。一方，「一つの三角比の値が与えられているとき他の三角比の値を求めるタスク」は図 2 のタスクのテクニックとは，少し異なった処理が求められる。具体例を以下に示す。

問） θ は鋭角とする。$\cos\theta = \frac{4}{5}$ のとき，sin θ と tan θ の値を求めよ。

解）等式 sin² θ +cos² θ =1 から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25}$$

sin θ >0 であるから $\sin\theta = \frac{3}{5}$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

図 3　問の出展：改訂版数学Ⅰ，p.115，例題 3

このタスクは，cos θ の値が与えられている際に，sin θ と tan θ の値を代数処理により求めるものである。このテクニックをレジスターの視点から見ると，与えられた代数レジスターの処理のみからなるものである。即ち，図形の性質を用いることも，図形レジスターでの処理も行なわない。

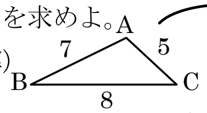
$(T_{1.1})$ の多くのテクニックが図形レジスターでの簡単な処理と，そこから代数レジスターへの転換及び処理により解決するものであった。

$(T_{1.2})$, $(T_{1.3})$, $(T_{1.4})$ については，$(T_{1.2})$ の場合のみを述べる。前節で述べたように，いずれも幾何のタスクタイプである。ここでは，$(T_{1.2})$ の「三角形の角の大きさを求めるタスク」の例を取り上げる。具体例を図 4 に示す。

このタスクは，与えられた三角形の辺の長さから角の大きさを求める問いである。教科書に与えられたテクニックは，余弦定理を用いたものであった。このテクニックをレジスターの視点から見ると，三角形を図形レジスターで表現し，辺の位置関係と辺の長さを代数レジスターに転換している。そして，代数処理により値を求める。

問）△ABC において，a=8，b=5，c=7 のとき，C を求めよ。

解）



転換

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

処理

処理

$$= \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

ゆえに，C=60°

図 4　問の出展：改訂版数学Ⅰ，p.131，例題 11

$(T_{1.2})$, $(T_{1.3})$, $(T_{1.4})$ のタスクを解決するテクニックでは，図 4 のような位置関係を把握するために図形レジスターが利用されることが多かった。しかし，図に補助線を加えるなどの図形レジスターでの処理は少なく，処理は主に代数レジスターにおけるものであった。

次に，$(T_{1.5})$ は，図形から導かれる等式の証明を問いとするタスクタイプであった。具体的には，以下に示した問いである。

問）△ABC の３つの内角∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

証明）A=180° －（B+C）

処理

$$\frac{A}{2} = \frac{180° - (B+C)}{2} = 90° - (\frac{B+C}{2})$$

処理

$$\sin\frac{A}{2} = \sin(90° - (\frac{B+C}{2})) = \cos\frac{B+C}{2}$$

図 5　問の出展：改訂版数学Ⅰ，p.116，問 3

これは，三角形において成り立つ正弦と余弦の関係式の証明を求めるものである。教科書に解答は与えられていなかったが，前後の指導内容から，三角形の内角の和の性質と，90° − θ の三角比の性質を利用するテクニックが主に用いられると判断した。レジスターの視点からすれば，このテクニックは図形レジスターを用いず，代数レジスターにおける処理のみを用いている。確かに，タスクは三角形という平面幾何の対象を扱い，代数処理

においては幾何性質を理論面に利用しているが，代数的な認知活動のみで解決されるタスクといえる。

($T_{1.5}$) の他のタスクでは，図 5 のテクニックのように代数レジスターでの処理が中心になるものが少なくなく，図形レジスターを利用する場合は，($T_{1.2}$), ($T_{1.3}$), ($T_{1.4}$) のタスクを解決するテクニックと同様に，位置関係や値を特定するものが主であった。

3.3. 三角比単元の考察

以上，三角比単元のタスクタイプとテクニックを見てきた。タスクについては，幾何領域のタスクが多かった。これは，当たり前のことだが，三角比が幾何や測量で多く用いられているためと考えられる。さらに，一般の幾何学で問題とされる図形の基本性質（平行や合同など）よりも，図形から導かれる等式についてのタスクが見られた。これは，三角比が辺の長さなど図形の計量的な側面に焦点を当てているからであろう。このようにタスクタイプのみを考えると，次節以降で扱う関数などの解析的な領域とは異なるようである。

一方，テクニックについては，主に，図形レジスターと代数レジスターが用いられた。しかし，前者は，主に位置関係や値を認識するために用いられ，図形を変形させるなどの処理はほとんどなかった。逆に，後者の代数レジスターでは頻繁に処理がなされるテクニックが多かった。ほとんどすべてが幾何領域のタスクであるのにもかかわらず，処理のほとんどが代数的である点は興味深い。

4．三角関数単元の分析

4.1. 三角関数単元のタスクタイプ

三角比単元と同様に，教科書で扱われている三角関数に関するタスクを抽出し，タスクで求められる数学的な対象を基準にそれらを分類した。その結果は表 2 である。

表 2　三角関数単元のタスクタイプと，その数

タスクタイプ	数
($T_{2.1}$) 三角関数の値を求めるタスクタイプ	27
($T_{2.2}$) 式の値を求めるタスクタイプ	10
($T_{2.3}$) 方程式・不等式に関するタスクタイプ	18
($T_{2.4}$) 式変形を行うタスクタイプ	5
($T_{2.5}$) 等式の証明を行うタスクタイプ	8
($T_{2.6}$) 関数の性質に関するタスクタイプ	19
($T_{2.7}$) 解析幾何に関するタスクタイプ	3

ここで ($T_{2.1}$) は，「角の大きさに対する三角関数の値を求めるタスク」と「一つの三角関数の値が既知であるとき，他の三角関数の値を求めるタスク」からなる。このタスクの主な問いは，三角関数の値を求めることである。前者のタスクは，前章の「三角形の角の大きさが与えられているとき三角比の値を求めるタスク」に類似している。後者のタスクも，前章の図 3 のタスクに類似したタスクである。具体的には，次節の図 6 のようなタスクである。($T_{2.1}$) は，他のタスクタイプに比べ最もタスクの数が多かった。

($T_{2.2}$) のタスクタイプは，教科書に「次の式の値を求めよ」と示されていたため,「式の値を求めるタスクタイプ」とした。($T_{2.2}$) に含まれるタスクは，例えば，$\sin\theta + \cos\theta$ の値が与えられているときに，$\sin\theta\cos\theta$ の式の値を求めるタスクである。教科書において，この単元は，三角関数を扱っているため，複数の三角関数からなる関数の値を求めるタスクタイプと換言できる。もっとも，教科書のタスクでは関数の定義域は与えられておらず，関数として捉えにくいものであった。

($T_{2.3}$) は，三角関数を含む方程式や不等式の解を求めるタスクからなる。例えば，方程式の解を求めるタスクであれば，次節の図 7 で示した問いである。このタスクタイプも比較的多かった。

($T_{2.4}$) の「式変形を行うタスクタイプ」は，例えば，$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ という式を三角関数の合成の形（$2\sin(\theta + \pi/3)$）に式を変形するタスクなどを含むものである。

($T_{2.5}$) のタスクタイプは,「等式の証明を行うタスク」からなる。これは，三角比の場合の三角形の図形的な性質や定理の証明とはやや異なり，与えられた三角関数の表現を含む等式を証明するものである。その際，等式は図形性質にかかわるものではない。具体的には，次節の図 8 のようなタスクである。

($T_{2.2}$) ($T_{2.3}$) ($T_{2.4}$) ($T_{2.5}$) については，三角関数が用いられているものの，関数の定義域や振る舞いには触れられないことが多く，代数領域で見られるようなタスクタイプであった。

一方, ($T_{2.6}$) は,「与えられた関数の最大値,最小値を求めるタスク」や「与えられた関数のグラフを座標平面上に表現するタスク」,「グラフの周期を求めるタスク」のタスクであり，より解析領域で見られるタスクタイプである。実際，これら三つのタスクは，関数の振る舞いについての性質を明らかにすることを問いとしている。グラフに関するタスクは次節の図 9 のようなタスクである。

最後に, ($T_{2.7}$) は,「二直線のなす角の大きさを求めるタスク」と「直線と角の大きさからなる直線の方程式を求めるタスク」を含むものである。このタスクの問いは，与えられた 2 直線のなす角度を求めること，直線からある角度動かした直線の方程式を求めることを問いとしている。このタスクタイプは，図形を代数的に解決するものであるため,「解析幾何」とした。2 直線がなす角度を求めるタスクの具体例を次節の図 10 に示す。($T_{2.7}$) は，他のタスクタイプより極端に少なかった。

三角関数単元のタスクタイプを概観すると，さまざまな領域のものが見られる。方程式や不等式の問いといった代数領域でよく見られるタスクもあれば，関数の最大値や最小値のような関数の振る舞いの性質を調べる解析領域で見られるタスク，さらに，直線の方程式などが与えられ幾何を代数的に問うタスクがあった。さらに，三角関数の値に特化したタスクも三角比同様に見られた。この異なる領域のタスクタイプが扱われることは，幾何もしくは測量のタスクが主であった三角比単元と大きな違いであろう。一方，タスクの数からすると，値を問題とするものが最も多い点は，三角比単元と同様である。

4.2. 三角関数単元のテクニック

次に，各タスクタイプにおいて，どのようなテクニックが用いられるか見ていく。

まず，($T_{2.1}$) のある角の大きさに対する三角関数を求めるタスクを考察する。このタスクでは，与えられた角を座標平面上の円に表現し，座標の値を三角関数の定義に代入するテクニックが主に用いられていた。このテクニックは，三角比のところで示した図 2 のテクニックとほぼ同様である。一方，一つの三角関数の値が既知であるとき，他の三角関数の値を求めるタスクでは，座標を用いないテクニックが主であった。具体例を以下に示す。

問） $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ とする。$\sin\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，

$\cos\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

解） $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ であるから，$\cos\theta < 0$

よって，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

処理

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$

図 6　問の出展：改訂版数学Ⅱ， p.108，例題 1

このタスクは，定義域が指定された sin θ のとる値が既知のときに cos θ と tan θ の関数がとる値を求めるものである。教科書で与えられたテクニックは，三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いるものであった。レジスターの視点からすれば，このテクニックは，代数レジスターの処理のみからなる。

($T_{2.1}$) のタスクとテクニックは，いずれも ($T_{1.1}$) で見られたものと非常に類似していた。

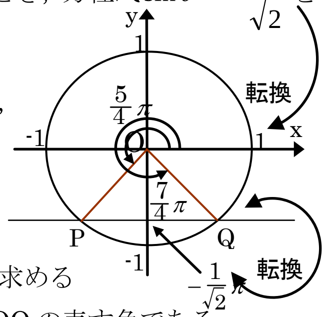
($T_{2.2}$), ($T_{2.3}$), ($T_{2.4}$), ($T_{2.5}$) については，いずれの場合も，必要となるテクニックは，与え

られた式に対する代数処理が中心となっていた。しかし，(T2.3) では代数処理のほかに，座標を用いられることもある。例えば，以下のようなタスクである。

問）$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。

解）単位円周上で，

y 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の 2 点 P，Q で，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。



$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\theta = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

図 7　問の出展：改訂版数学Ⅱ，　p.119，例題 5

このタスクは，一見すると，方程式のタスクのようには見えないが，教科書では，方程式として扱われているものである。当然ながら，これ以外に $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ のような，より方程式らしいものもあったが，座標を必ずしも用いていなかったため，図 7 のタスクを選んだ。このタスクの教科書で与えられていたテクニックは，まず，与えられた方程式の右辺の値を座標平面上の単位円を用いて表し，そして直線 PQ の y 座標の値を正弦の値とする　θ　の値を求めるものであった。レジスターの視点からすれば，このテクニックは，代数レジスターを座標レジスターに転換し，座標レジスターでの処理の後，解を特定するものである。

(T2.5) のタスクは，与えられた等式を証明するものであり，図 8 のようなタスクである。このタスクに対する教科書で与えられていたテクニックは，等式の左辺を三角関数の性質を用いて式変形し，式を整理するものであった。このテクニックは，代数レジスターでの処理のみからなる。一見すると，三角比単元の(T1.5) と同様のタスクのように見える。しかし，(T1.5) が，幾何的性質を証明していることに対し，(T2.5) が図形とは関連のない等式を証明している点で異なる。(T2.5) の他のタスクもこの点は同様であった。

問）等式 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

証明）

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

処理

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

図 8　問の出展：改訂版数学Ⅱ，p.109，例題 2

(T2.6) は，関数の最大値と最小値を求めるもの，三角関数のグラフの特徴を問うものなど，関数の振る舞いを問うタスクが主であった。これらのタスクを解決するテクニックは，座標を利用し，代数処理するものであった。特に，三角関数のグラフについてのタスクでは，与えられた三角関数の正弦曲線を描いてその周期を求めるなど，主に座標レジスターと代数レジスター間の転換とそれぞれでの処理からなるテクニックで解決されるものであった。例えば，図 9 のようなタスクである。

問）関数 $y = \sin(2\theta - \frac{\pi}{3})$ のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

解）$\sin(2\theta - \frac{\pi}{3}) = \sin 2(\theta - \frac{\pi}{6})$ であるから，

処理

$y = \sin(2\theta - \frac{\pi}{3})$ のグラフは，$y = \sin 2\theta$ のグラフを θ 方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動して得られる曲線で，下の図のようになる。また，この関数は，π を周期とする関数である。

転換

処理

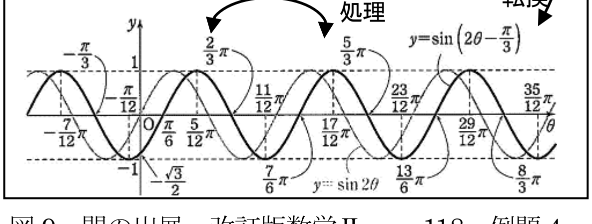


図 9　問の出展：改訂版数学Ⅱ，　p.118，例題 4

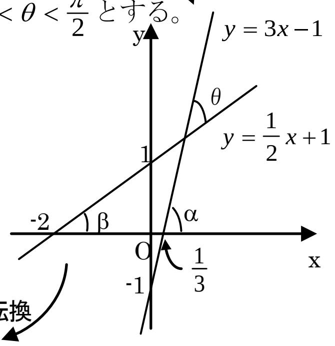
このタスクに対する教科書のテクニックは，

まず，与えられた関数を変形し，y = sin 2θ のグラフを基準として π/6 だけ θ 方向に並行移動したグラフを描くものであった。また，周期については，グラフから読み取る。このテクニックは，最初に代数レジスターでの処理があり，座標レジスターへ転換する。そして，さらに座標レジスター内での処理によってグラフを生成する。さらに周期についても,座標レジスターでの処理で求められる。

最後に，解析幾何的なタスクタイプ（$T_{2.7}$）を見ていく（図 10）。（$T_{2.7}$）で求められるテクニックは，（$T_{2.6}$）と同様，主に代数レジスターと座標レジスターを用いたものであった。

問）２直線 $y = 3x - 1$， $y = \frac{1}{2}x + 1$ のなす角 θ を求めよ。ただし， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

解）右の図のように，２直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は α − β である。



$\tan\alpha = 3, \tan\beta = \frac{1}{2}$ であるから，

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

ゆえに， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から　$\theta = \frac{\pi}{4}$

処理

図 10　問の出展：改訂版数学Ⅱ，p.118，例題 8

教科書で与えられていたテクニックは，次のようなものである。2 直線の方程式を座標上に表現し，2 直線の傾きから，tan α，tan β の値を求める。そして，加法定理を用いた処理により解決している。このテクニックは，レジスターの視点からすれば，代数レジスターから座標レジスターに転換し，座標レジスターの処理を行うことで，座標平面上に 2 直線を表現する。この座標レジスターを，再び代数レジスターに転換し処理していると言える。なお，このテクニックは，三角関数を使わずに，三角比のテクニックでも解決できるものである。

4.3. 三角関数単元の考察

以上，三角関数単元のタスクタイプとそれらを解決するための代表的なテクニックを示した。まず，タスクタイプに関しては，三角比単元同様，三角関数の値を求めるタスクが多い。しかし，三角比単元とは異なり，代数領域のタスクや解析領域のもの，解析幾何領域のものなど幅広い領域のタスクが見られた。この点は，三角比単元と三角関数単元の乖離の一つではないだろうか。実際，タスクが扱われる数学領域が異なることは，タスク自体がもつ問題意識が異なることである。また，三角関数が様々な領域において用いられる理由の一つは，関数が一般にツールとして様々な領域で利用されることであろう。

三角関数単元で用いられるテクニックについては，まず代数レジスターでの処理が多かった。これは三角比単元と共通する点である。一方，三角比単元で見られた図形レジスターの利用は，三角関数単元ではほとんど見られず，代わりに座標レジスターでの処理や転換が見られた。これは，関数が扱われるため当然ではあるが，必要とされるレジスターが異なることは，必要となる認知的な活動が異なることであり，三角比単元と三角関数単元の乖離の一つと言えるだろう。実際，図形レジスターと座標レジスターはどちらも図的である点で共通しているが，その利用のされ方は大きく異なる。三角比単元では図形レジスターが主に辺の位置関係を把握するために利用され，三角関数単元では座標レジスターにおいて三角関数の周期や最大最小などの振る舞いを把握するために利用される。また，三角関数単元のレジスターの処理や転換は，数学 II であることもあり,三角比単元と比べると，より複雑であった。

５．まとめと展望

本研究は，三角比単元と三角関数との連続性と乖離を明らかにすることを目的とし，それぞれの数学の知の実践面を，教科書に見られるタスクタイプとテクニックから分析した。分析の結果をまとめると表３のようになる。

表３　分析の結果

<table>
<tr><th></th><th>三角比</th><th>三角関数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">タスクタイプ</td><td colspan="2">値を求めるタスクが多い</td></tr>
<tr><td>主に幾何領域のタスクタイプ</td><td>様々な領域のタスクタイプ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">テクニック</td><td colspan="2">代数レジスターの処理が多い</td></tr>
<tr><td>図形レジスターの利用(特に位置関係の把握のため)

レジスターの処理と転換は単純</td><td>座標レジスターの利用（特に関数の振る舞いを把握するため）
レジスターの処理と転換が複雑</td></tr>
</table>

こうしたタスクタイプ及びテクニックにおける乖離が引き起こす生徒の学習困難性については，今後の課題である。特に，テクニックの乖離は，生徒にとって大きな困難性を生じさせるのではないかと予想する。また，本稿では，三角比と三角関数のプラクセオロジーの実践面を分析し，理論面は触れなかった。しかし，図５のタスクのように，テクニックは代数レジスターの処理のみであるが，理論面に幾何性質を用いるテクニックもあった。そのため，理論面も考慮に入れ，三角比と三角関数のプラクセオロジーを分析することにより，それらの連続性と乖離をより詳細に示せるのではないかと考える。このことも，今後の課題である。

引用・参考文献

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en theorie antheopologique du didactique. *Recherches en Didactique des mathematics*, Vol.19, No.2, 221-266

Chevallard Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *In Proceedings of the IVth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 22-30).

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103-131.

石塚達也（2010）. 図形と方程式における子どもの困難性～記号表現に焦点を当てて～」.『上越数学教育研究』. 第 25 号，51-62

川中宣明ほか（2010）.『改訂版数学Ⅰ』. 数研出版.

川中宣明ほか（2010）.『改訂版数学Ⅱ』. 数研出版.

齋藤清和（2008）.「三角関数の合成を視覚的に理解させる工夫－数学Ⅱ「三角関数」における情報機器の活用－」. 平成 20 年度　数理教育ステップアップ研修　実践記録. pp.1-8.

長岡耕一（2003）.「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」. 日本数学教育学会『日本数学教育学会誌』第 85 巻　第 9 号, 32-37.

藤田宏ほか（2002）.『数学Ⅰ』. 東京書籍.

藤田宏ほか（2003）.『数学Ⅱ』. 東京書籍.

宮川健（2005).「線対称図形に対する知覚的認知と証明」. 筑波数学教育研究　第 24 号，21-30

宮川健（2009）.「学校数学で扱われている数学を知る～小学校における比例を例に～」.『研究と実践』, 上越数学教育研究会. 2-7

宮川健（2010）.「フランス前期中等教育における証明の生態～平面幾何領域の教科書分析から～」. 日本数学教育学会『第４３回数学教育論文発表会文集』,（295-300）.

宮川健（投稿中).「フランスを起源とする数学教授学～「学」としての数学教育研究をめざして～」. 28 項.

柳田大介（2005）.「理解を重視する高校数学の指導に関する研究（Ⅲ）－鋭角から鈍角への三角比の拡張場面を事例としてー」. 第 38 回数学教育論文発表会論文集. pp.115-120.

文部科学省（2006）.『高等学校学習指導要領解説数学編・数理編』. 実教出版.