

「わかりできる数学」から「考えつくる数学」への発展

ー開平法の歴史に学ぶ数学的活動を事例としてー

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

1. 「わかりできる数学」から「考えつくる数学」へ

《数学はあらゆる現代社会の最も大切な文化的構成要素の一つである》とは、数学者ワイルダー (Wilder, R. L.) が著した『数学の文化人類学』(好田訳, 1980) の冒頭で述べられている言葉である。確かに、数学は、人間の活動から生み出された文化的所産であり、各文化の中でつくられ発展している。数学を学ぶことは、数学的活動を通して自らの中に数学をつくっていくことに他ならない。ところが、これまでの学校数学は、数学や学習を文化的に捉える姿勢に極めて希薄であったと言わざるを得ない。数学は文化とは無縁に既に出来上がった不変不動のものであり、それを習得するのが数学の学習であるという数学観や学習観ではなかったか。授業を知識・技能の習得の場とだけに捉え、自らの中に数学をつくっていく授業を行っていなかったのではないか。数学の情意的学力の向上が喫緊の課題となっている今日、私たち数学教育に関わる者は、これまでの学校数学をよく見直していかなければならない。

「数学的活動」は平成 10 年度学習指導要領から目標に取り上げられたものである。今回の改訂においては、小学校、中学校及び高等学校で一貫して、目標の冒頭に「数学的活動を通して…」が位置付けられ、その充実が

一層強調されている。平成 20 年に公示された中学校学習指導要領の解説(数学編)「数学的活動と学習指導要領改訂の基本的な考え方」には、次のように書かれている。

《教育及び学習指導が、願いや目的を実現するための意図的、計画的な営みであることに配慮すれば、教師のかかわりは必要であり、生徒の自立への誘いである。したがって、教師のかかわりは、時に積極的であり、次第にあるいは状況に応じて個別的、間接的になり、最終的には生徒自身が自力でする営みの機会を設けることが必要である。中教審答申においては、学びとその指導にかかわって、「習得」、「活用」及び「探究」のいずれもが強調されている。その背景には、世の中における「習得型の教育」と「探究型の教育」の間の乖離、すなわち、対立的なとらえ方に危機感を持ち、その意識を改善するねらいがある。「習得」は、大切なことはしっかり教えることを示唆する。「探究」は、習得したことを自在に使いこなす問題を解決することであり、また、その過程で数や図形の性質などを見いだしたり、数学を利用したりすることの必要性に気付く機会が生まれる。そして、それらを説明し伝え合うことで数学的活動の動機付けを強化することとなる。「探究」の過程においては、「習得」した

ことを「活用」できることが必要である。注意しなければならないのは、「習得」、「活用」及び「探究」はこの順番に進むだけではなく、相互に関連しあって展開していくと考えられることである。知識及び技能を「活用」することでその「習得」がより一層深まったり、「探究」の過程で知識及び技能の「習得」やそれを「活用」することについて見直したりすることにも留意しなければならない。》(p. 53) (下線は筆者による)

上の記述には、今回の改訂の背景に「習得型の教育」と「探究型の教育」の間の乖離という問題があるとの認識と共に、「習得」、「活用」及び「探究」を相互に関連させる展開を志向していくというこれからの方向性が明示されている。授業を知識・技能の習得の場とだけに捉えることからの脱却を図り、自らの中に数学をつくっていく授業を行っていくことを目指す、これからの学校数学のあり方を示唆するものとして高く評価できる。ただ、「習得、活用及び探究はこの順番に進むだけではない」と断ってはいるが、「習得したことを活用して探求する」という記述にみられるように、「習得→活用→探求」という順序のある活動が、今回の改訂の基本に据えられている。筆者は更に踏み込んで、これからの学校数学には、「探求の過程で現れる知識を活用して習得する(身に付ける)」,即ち「探求 ⇄

活用 ⇄ 習得」の活動が必要であり、何よりも重視されなければならないと考えている。これからの学校数学は、「わかりできる数学」(習得型)から「考えつくる数学」(探求・習得型)へと発展させていきたいものである。

アーネスト(Ernest, P.)『数学教育学の哲学』は、教師の数学観の重要性を次のように指摘している。教師の数学観とその指導法との間には一貫性が観察される。だから、数学

に対する教師の見方、信念、好みがその教育実践に強く影響するのである。アーネストの言うように、これから目指す学校数学にも、もちろん教師の数学観が大きく深く関わっていく。教師の「文化的数学観」があつてこそ、子どもの「文化的数学観」への意識変容を可能にする、と言えよう。次節では、教師の「文化的数学観」の醸成に供すと共に、子どもの

「探求 ⇄ 活用 ⇄ 習得」の活動を起こす具体例として、文化人類学的視点から作成した「開平法の歴史に学ぶ数学的活動」を提案したい。(なお、本稿は、上越数学教育研究会[2010. 5. 15]講演会資料と、それを基に作成した『高等学校 数学教育の展開』, 高等学校数学教育研究会編, 2011 年, 聖文新社, pp. 198-215. 及び上越数学教育研究会[2011. 11. 1]研究大会冊子『研究と実践』, pp. 2-7. を参考にしており、それらの記述と重なる個所も少なくないことをお断りしておきたい。)

2. 「探求 ⇄ 活用 ⇄ 習得」の活動を起こす

展開例の提案

「開平法の歴史に学ぶ活動」を提案する背景には次のような筆者の課題意識がある。

現在の中学校数学・高校数学の基盤をなす代数表現の学校での取り扱いを振り返ってみるとき、果たして、その代数表現の文化的価値を生かすものになっているのか、などの課題が浮かび上がってくる。例えば、中学3年の内容「平方根」を取り上げよう。扱う数を有理数に限定すると、2次方程式 $x^2 = 2$ には解がない。そこで、2の平方根を考え、それを $\sqrt{2}$ と記号化し、 $\sqrt{2}$ は「2乗して2になる数」だと説明する。しかし、元の2次方程式は、解の表現 $\sqrt{2}$ を求めているのではなく、

2 乗して 2 になる数は何か、と問うているのではないか。このように性急な記号化や公式化は教材の本質を見誤らせる。学校数学の基盤をなす代数表現の意味や意義を、その文化性を捉える視点から検証していく必要がある。

このような課題意識から、本稿では、開平法の歴史に焦点を当てて、「探求 ⇄ 活用 ⇄ 習得」の活動を起こす展開例の一つを提案したいと考えた。

3. 開平法の歴史に学ぶ数学的活動

既に出来上がった数学からの問題ではなく、数学の発生と形成過程を文化人類学的視点から考えることを志向し作成した展開例の一つとして、「開平法の歴史に学ぶ数学的活動」を次に提案する。この節では、「開平法の歴史に学ぶ数学的活動」を、子どもの活動の導入となる「話題提供」、子どもの活動を起こす「問」、「問」の探求の結果現れる「解答例」という流れで記述していくことにする。

3-1. 古代の平方根の計算

平方根は、古代では洋の東西を問わず、ピタゴラスの定理に関連して出てくることが多い。直角三角形の二辺から残りの一辺を求める場合に平方根を求めることが必要になるからであろう。平方根を求める計算は、相当古くから行われていた。西洋では、ギリシア時代に盛んにこれが行われ、東洋では、中国最古の数学書『九章算術』（紀元 1 世紀頃）に既にそれが記載されている。ただ、古代においては、平方根の詳しい値は必要ではなく、粗い近似値で間に合うことが多かったであろう。もっと古く、平方根を求める計算法を知らない時代にも、人々は試行錯誤法によって、平方根を求めることができたのではないかと考えられる。（大矢，1964，pp. 81-83.）

では、次に、平方根の計算に関する具体的な問題で考えていこう。

〔問 1〕 740 の平方根を求めるのに、 $20^2 = 400$ ， $30^2 = 900$ から始めて、 $21^2, 22^2, \dots$ などを作っていく、整数の近似値を見つけよう。次に、この試行錯誤法によって、740 の平方根の近似値を小数第 1 位まで求めてみよう。

<問 1 の解答例>

$20^2=400, 21^2=441, 22^2=484, 23^2=529, 24^2=576, 25^2=625, 26^2=676, 27^2=729, 28^2=784, 29^2=841, 30^2=900$. これより、整数の近似値は 27 である。

次に、 $27.1^2=734.41, 27.2^2=739.84, 27.3^2=745.29$. これより、小数第 1 位までの近似値は、27.2 である。

3-2. 古代の平方根の近似計算の工夫

計算を急ぐ必要のない大昔にあっては、〔問 1〕のような方法で十分であったであろう。しかし、時が進むうち徐々に社会は複雑になり、人々はより詳しい近似値を求めるようになった。その中で、やがて、元の数に平方根の近似値で割ることを考え出した。古代のバビロニアでは、60 進法の小数や逆数表なども存在し、それらを使って割り算などの計算が盛んに行われていた。このバビロニアには、平方根の近似の精度を上げるために元の数に近似値で割るという考えがあったようである。その考えは次のようなものである。もし平方根が正しい値ならば、それで元の数に割った商は、やはり前の平方根そのものである。しかし、平方根が近似値ならば、それで元の数に割ったものは、元の平方根とは少し違ったものになる。そうすると、平方根の正しい値は、それら二つの近似値の間にあるに違いない。そこで、二つの近似値の平均を作ってみると、平方根の相当よい近似値が得られるはずである。（大矢，1964，pp. 81-83.）

〔問 2〕 実際に、この方法で、740 の平方根を求めてみよう。まず、整数の近似値で割

ることから始めて、740 の平方根の近似値を小数第 1 位まで求めてみよう。次に、そこで得られた小数第 1 位までの近似値で割っていき、今度は、740 の平方根の近似値を小数第 4 位まで求めてみよう。

<問 2 の解答例>

$$\frac{740}{27} = 27.4074\cdots$$

$$27 < \sqrt{740} < 27.4074\cdots$$

$$\frac{27 + 27.4074}{2} = 27.20\cdots$$

これより、小数第 1 位までの近似値は 27.2。

$$\text{次に、} \frac{740}{27.2} = 27.20588\cdots$$

$$27.2 < \sqrt{740} < 27.270588\cdots$$

$$\frac{27.2 + 27.20588}{2} = 27.20294\cdots$$

これより、小数第 4 位までの近似値は
27.2029。

(実際、 $\sqrt{740} = 27.2029410\cdots$ であるから、上の方法をわずか 2 回適用するだけで、小数第 5 位までの正確な値を得ていることになる。)

3-3. 古代の平方根の近似公式

上の〔問 2〕のような方法を、今の文字式を使って表すと、次のようになる。

$$\sqrt{a^2 + b} \approx \left(a + \frac{a^2 + b}{a} \right) \div 2 = \left(a + a + \frac{b}{a} \right) \div 2 = a + \frac{b}{2a}$$

(b は a に比べずっと小さい)

バビロニアの数学の記録には、(10 進法に直すと、) $\sqrt{1700} = 41.25$ や $\sqrt{2} = 1.416\cdots$ のような結果がみられ、この数値は上の近似公式によるものと大体一致するものである。

このことから、バビロニアでは、平方根の計算にこの近似公式のもとになる〔問 2〕のような平均の方法が使われていたのではないかと考えられる。(大矢, 1964, pp. 81-83・室井, 2000, pp. 83-88.)

これと同様の方法が、中国でも古くから用いられている。「平方に開く」という平方根を求める計算が行われていて、『九章算術』では、開き切れない場合には、余りはそのまま捨ててしまっている。ところが、後の『孫子算経』(400 年前後)になると、開ききれない場合には、それまでに得られた答えを 2 倍して分母にし、余りを分子にした分数を作り、これを平方に開いて得られた数に書き添えよ、と述べている。今の文字式で書くと、 $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$ となる。(大矢, 1964, pp. 81-83.)

〔問 3〕 50 の平方根の近似値を、まず学校で習ったやり方で求めてみよう。その際、

$\sqrt{2} = 1.414\cdots$ を用いてもよい。次に、50 の平方根の近似値を、今度は上の古代の近似公式を使って求めてみよう。そして、これらの結果を比較してみよう。

<問 3 の解答例>

学校で習ったやり方では、

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5 \times 1.414 = 7.0710 \quad \text{となる。}$$

次に、古代の近似公式を使って求めると

$$\sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1} = 7 + \frac{1}{2 \times 7} = 7 + \frac{1}{14} = 7.0714$$

となり、小数第 3 位までの正確な値を得ていることがわかる。

3-4. 『塵劫記』の開平法

『塵劫記』は江戸時代初期の数学者吉田光由(1598~1672)によって書かれたそろばんの書で、寛永 4 年(1627)に発刊された。光由は

中国のそろばん書『算法統宗』を手本として、この本を書いたもので、そこに扱われている内容は日本の社会に発生する日用諸算である。それが大いに世に受けたため、光由は内容を改めつつ何回も改版した。寛永 18 年(1641)には新しく書き換えた新版を出している。これに刺激されて、その後そろばんの書物が多数出版されることになった。この『塵劫記』の初版本(1627年)では、第25条「開平法」において、開平(平方に開くこと)の記述がある。最初の問題を次に示す。

坪数 一万五千百二十九坪の正方形の一边を求めよ。 答、百二十三 間。

この後、そろばんを4丁縦に並べての計算図と正方形を分割する面積図が順次示され、それとともに「倍商法」と呼ばれる解法が記述されている(吉田光由, 1627, pp. 215-221)。

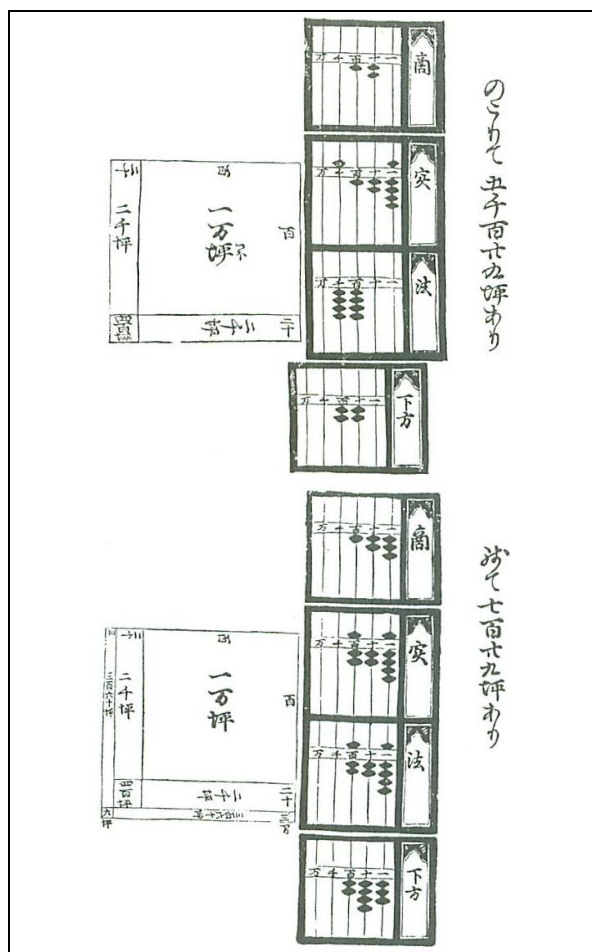


図1:『塵劫記』の開平法説明図
(吉田光由, 1627, p. 216, p. 218)

この図1で説明されている開平の方法は、右の図2で示している筆算による開平計算の方法と同一のものとみることができる。

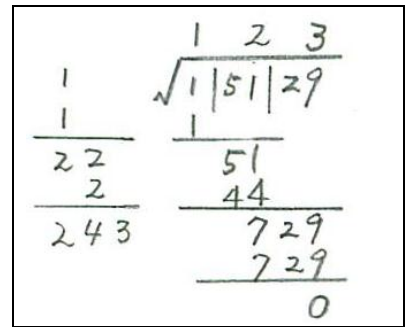
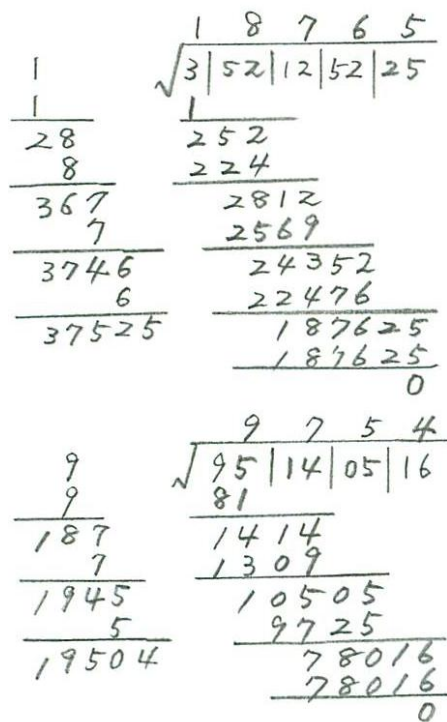


図2: 筆算による開平計算

では、この問題に続いて、「352125225 を開平せよ」と「95140516 を開平せよ」の2つが出題されている。(次の第26条では、「開立法」が述べられている。)

[問4] 15129, 352125225, 95140516 のそれぞれを、筆算によって開平してみよう。

<問4の解答例>



$$\sqrt{15129} = 123 ,$$

$$\sqrt{352125225} = 18765 ,$$

$$\sqrt{95140516} = 9754 .$$

〔問5〕 上の〔問4〕で、今あなたが行った筆算が正しいことを、正方形を分割する面積図によって、説明してみよう。

＜問5の解答例＞

ここでは、上越教育大学の平成 21 年度後期の主には学部 2 年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業で学部 2 年生によって書かれた〔問 5〕の答案で優れたものを、解答例として、次の図 3. に示した。

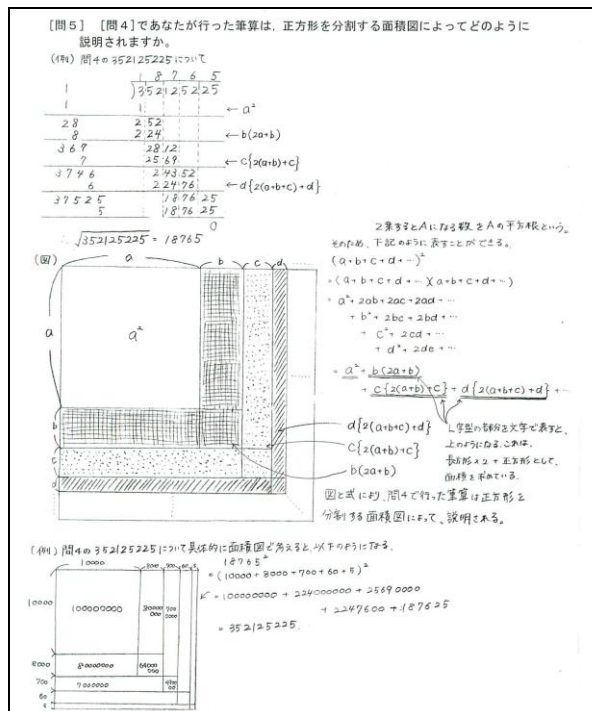


図 3：開平計算の説明（学生答案から）

3-5. 開平法とニュートンの近似公式

ニュートン法は、方程式 $f(x)=0$ の解を求めるのに、近似値 a から出発して微分係数を利用して段々と正確な近似解を求めていく方法である。正の数 A の平方根を求める場合、

$f(x)=x^2-A$ においてニュートン法を適用すると、「ニュートンの近似公式」と呼ばれる $\sqrt{A} \approx a + \frac{A-a^2}{2a}$ が得られる。この近似公式は、 $A=a^2+b$ とおけば、 $\sqrt{A} \approx a + \frac{b}{2a}$ と

なり、3-3. で述べた古代の平方根の近似公式に一致する。基になった考えはそれぞれ異なるにも拘わらず、公式がぴったり一致するという見事な符合である。

〔問6〕 このニュートンの近似公式は、微分係数の基になる次のような簡単な考えを使えば、それを導くことができる。

正の数 A の平方根を求めるには、 $A=(a+d)^2$ ($a>0, d>0$) として a と d を求めればよい。このとき a^2 が A に十分近くなるような数 a を選べば、 d は a より十分小さい数となる。

$(a+d)^2$ を展開し、展開式の項 d^2 を他の項に比べ十分小さいとして捨てる。そうすることによって、ニュートンの近似公式を得ることができる。

上の考えを使って、ニュートンの近似公式を導いてみよう。

＜問6の解答例＞

$$A=(a+d)^2=a^2+2ad+d^2$$

$$A-a^2=2ad+d^2$$

$2ad+d^2$ において、 d^2 は $2ad$ よりかなり小さいから捨てて、 $d \approx \frac{A-a^2}{2a}$ となる。

これより、近似公式 $\sqrt{A} \approx a + \frac{b}{2a}$ を得る。

〔問7〕 ニュートンの近似公式と『塵劫記』の開平法とを、計算方法と得られる結果に着目して比較してみよう。

＜問7の解答例＞

	ニュートンの近似公式	『塵劫記』の開平法
計算方法	簡単な計算式を使う方法である。微小正方形 d^2 を捨てて近似していく。	主計算と副計算を含んだ比較的複雑な計算方法である。微小正方形 d^2 を含めた L 字図形で元の正方形を取り尽くしていく。

	ニュートンの 近似公式	『塵劫記』の 開平法
得られる結果	正確な値に限りなく近付けていくという計算であり、得られる結果は正確な値ではなく近似値である。	10 進数の位毎の L 字図形で取り尽くしていくという計算であり、整数や有限小数になる場合は正確な値が得られる。無限小数になる場合は計算をずっと続けて行うこともできる。

(参考)『塵劫記』の開平法のルーツは、古代の近似公式やニュートンの近似公式とは異なるものと考えられる。それは、中国の『九章算術』にまで遡る必要がある。

『九章算術』は現存する最古の中国の算術書（前1世紀－後2世紀）である。九章から構成され、延べ246個の問題が収められている。問題の後、「答曰く、」で始まる答えと、「術曰く、」で始まる解法が記述されている。演繹的な手法の西洋数学とは異なる、帰納的な手法である。中国の以後の数学書はこの記述方法を採用し、これは日本にも取り入れられ、和算の記述方法にもなった。『九章算術』の第4章「少広」に開方術（開平法）の問題がある。その第12～16問がそれに当たる。第12問の記述を次に示す。

いま面積が五万五千二百二十五平方歩の正方形がある。問う、一辺はいくらか。 答、二百三十五歩。

後、開方術（開平法）が、算盤での算の移動によって記述されている。その方法は、その後の開平の一般的な方法となる「倍商法」の原型と見られる。

算木による開平の記述は、中国の書、『算学啓蒙』（朱世傑著、1299）、さらに『孫子算経』（孫子著、2世紀頃）にもある。そろばんによる「倍商法」での開平の記述は、『塵劫記』（吉田光由、1627）にみられる。これは算木による開平をそのままそろばんに応用したと

思われる。江戸時代末期の『算法新書』（千葉胤秀、1830）では、開平に「倍商法」ではなく「半九九法」が使われている。半九九（平方数の半分の九九）を用いた開平の初見は、『算元記』（藤岡茂元著、1657）であると言われている（吉田稔他編、1989、pp. 52-53）。

4. これからの学校数学

前節3.において、教師の「文化的数学観」

の醸成に供すと共に、子どもの「探求 ⇄ 活

用 ⇄ 習得」の活動を起こす具体例として、

文化人類学的視点から作成した「開平法の歴史に学ぶ数学的活動」の提案を述べた。この提案は、探求・習得型の活動を起こす取組のほんの一例にしか過ぎないが、これからの学校数学を俯瞰するとき、この一取組は学校数学全体を通して探求・習得型の活動を切り拓く可能性を強く示すものと考えてよいであろう。

「数学的経験と学習過程」の授業で学生達を書いたレポートの記述が、それを物語っている。先の図3.に載せた[問5]の答案を書いた学生のレポートの記述から抜粋して、次に示すことにする。

《この授業を通して、今までは答えを導き出す方法だけしか見てこなかったが、その方法をいかにして導き出したのか、ということにとっても興味・関心を持つようになった。例えば、古代の円周率や平方根の近似値の追求等である。私は今まで教科書に書かれた問題を教科書に書かれた方法で解いてきたところがある。この授業で、実際は試行錯誤の繰り返し等、自分が考えもしなかったような方法は沢山あるとわかった。大切なのは、導き出そうとしている問題の本質をいかに詳細かつ正確に把握できているかなのだと思った。この授業をきっかけとして、これまで上辺しか見てこなかった算数・数学を、深く考え見てみよう

と思った。そうすれば数学をもっと好きになれると思うし、教師になったとき子ども達に数学の魅力（不思議さ、楽しさ、面白さ、美しさ等）を伝えることができるような気がする。さらに、数学の起源にもっと迫ってみたいと思った。特に、中国の九章算術や日本の和算に興味を湧き、もっと深めていきたいと思う。このことを教師になったとき、授業に活かせるようにしていきたいと思う。》（学生のレポートから抜粋）

私たち数学教育に関わる者は、これからの学校数学に探求・習得型の活動を切り拓く目的をもって、これまでの学校数学を隅々までよく見直していかなければならない。数学は、先人達が自分の文化の中で試行錯誤を繰り返しつつくり上げ、今も、世界各地、社会の中、教室の中、各個人の中で、そして、各文化の中で、つくられ発展しているものである、という「文化的数学観」「文化的数学学習観」への意識変容を図る方策が、これからの数学教育にとって何より必要となろう。この方策が、本稿のはじめに述べた「わかりできる数学」（習得型）から「考えつくる数学」（探求・習得型）への発展に他ならない。

これからの学校数学は、数学の歴史展開全体をその文化性に着目し捉えるという文化人類学的視点から、数学教育内容を考え、数学を人間の活動や文化との関わりから捉えようとするにより、教材の価値や本質、そして数学を学ぶことの意義を明確にしていくものでありたい。そのような数学教育の創造に向けた取組や実践が各方面において積極的なされることを切に願うと共に、私自身もこれから、「わかりできる数学」（習得型）から「考えつくる数学」（探求・習得型）への発展のための方策を探求し、これに関わる実践をさらに深めていきたいと考えている。

【引用・参考文献】

- Ernest, P. (1991), “The Philosophy of Mathematics Education”, The Falmer Press, p. 138.
- Wilder, R. L. (1968), “Evolution of Mathematical Concepts — An Elementary Study—”, John Wiley & Sons, New York and Toronto. [R. L. ワイルダー／好田順治訳(1980), 「数学の文化人類学」, 海鳴社, pp. 23-41.]
- 大矢真一(1964), 『比較数学史(事項別)』, 富士短期大学出版部.
- 片野善一郎(1964), 『問題形式による数学史』, 富士短期大学出版部.
- 鈴木武雄(2004), 『和算の成立』, 恒星社厚生閣.
- 伊達文治(1993), 『アルキメデスの数学—静力学的な考え方による求積法—』, 森北出版.
- 伊達文治(2008), 「数学教育における文化的価値に関する研究—高校数学の基盤をなす代数表現とその文化性—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第14巻, pp. 51-58.
- 伊達文治(2011), 「文化人類学的視点からみえる数学の歴史展開」, 高等学校数学教育研究会編『高等学校 数学教育の展開』, 聖文新社, pp. 198-215.
- 平田寛監修・吉成薫訳(1985), 『リンド数学パピルス』, 朝倉書店.
- 平山諦(1993), 『和算の誕生』, 恒星社厚生閣.
- 堀口俊二(2008), 「和算における開平法のルーソー・ギリシャから日本まで—」, 『新潟産業大学経済学部紀要 第35号』, pp. 55-70.
- 室井和男(2000), 『バビロニアの数学』, 東京大学出版会.
- 文部科学省(2008), 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.
- 吉田稔他編(1989), 『話題源数学』, 東京法令出版.
- 吉田光由(1627)著, 佐藤健一(2006)訳, 『塵劫記』(初版本), 研成社.