上越数学教育研究，第27号，上越教育大学数学教室，2012年，pp.67-76.

高等学校数学の三角比・三角関数における困難性について

－連続性と乖離に焦点を当てて－

角田　直樹
上越教育大学大学院修士課程３年

１．はじめに

高校数学で学習する三角比・三角関数は，実生活に密着した数学であるが，高校生にとっては，困難性を生じやすい単元でもある。実際，三角比・三角関数単元における困難性を指摘する報告は少なくない。片山 (1988) は，三角比や三角関数における困難性について，「定義が導入の段階から変化していくこと」や「関数としての認識が作りにくいこと」，「用語・記号がとっつきにくいこと」，「扱う角が限られるための不自然な問題が多くなること」と，４つの困難性の要因を挙げている。また，山口 (2008) は，三角関数単元は，「生徒の躓きが多く，改善を要するところである」と指摘し，グラフを描くことの困難性を報告している。また，三角比から三角関数への学習は一連の過程と捉えられることが多い (長岡，2003) 。その一方で，柳田 (2005) は，鋭角の三角比から鈍角の三角比へ拡張する場面に焦点を当て，定義に用いる平面が異なることによる飛躍を指摘している。

これらの先行研究から，三角比・三角関数における困難性は多岐にわたることが想定される。さらに，柳田 (2005) による，鋭角の三角比から鈍角の三角比へ拡張する際における飛躍という指摘にも見られるように，三角比から三角関数への拡張は，必ずしもスムーズではないであろう。特に筆者は，三角比から三角関数への拡張場面には，それらの「連続性」と「乖離」が三角比・三角関数を学習する生徒にとっての困難性となっているのではないかと考えた。

こうしたことから，筆者は，高等学校数学の三角比・三角関数における困難性と，その根元となる要因を，「連続性」と「乖離」の視点から明らかにしたいと考え，このことを修士論文の研究目的とした。そして，この目的を達成するため，教科書を分析するとともに，生徒（実際には大学生）が三角比・三角関数の問題を解決する活動を調査し，そこで得られたデータを分析してきた (拙稿，2012)。教科書分析については，拙稿 (2011a) で報告し，調査の分析の一部は拙稿 (2011b) で報告した。そこで，本稿では，調査の結果から拙稿 (2011b) で明らかにされなかった困難性をも報告するとともに，困難性の根元となる要因をさらに深める。そして，その結果と教科書分析で得られた結果とを関連づけた考察を行い，三角比と三角関数の困難性とその要因を検討する。

本稿は次のように構成される。第２節で調査の概要と得られたデータの分析を示し，第３節で拙稿 (2011a) にて報告した教科書の分析結果の概要を示す。そして，第４節で調査結果と教科書分析の結果とを関連づけ，三角比と三角関数の連続性と乖離の視点から困難性とその要因について考察する。

２．困難性の調査の方法

2.1. 調査の目的

前述のように，三角比・三角関数単元の困難性は多岐にわたると想定される。そこで，実際にいかなる困難性があるのかを，学習者の実際の問題解決過程から明らかにするとともに，この困難性の根元となる要因を検討するためのデータ収集を目的に，以下に述べる調査を実施した。

2.2. 調査の対象

困難性の調査は，高校で数学Ⅰと数学Ⅱを履修した国立教員養成系大学1年生16名を対象に行った。大学１年生を対象とした理由は，高校数学の学習からあまり時間がたっておらず，三角比と三角関数の内容を忘れていないと考えたためである。なお，被験者は，調査時のアンケート結果より, 文系の学生が多く，数学は苦手と答えた学生が多かった。

2.3. 調査の方法

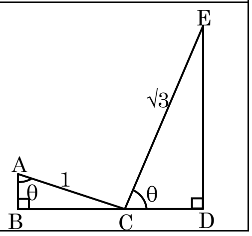
調査時期は，大学１年次の早い時期である2011 年 7 月 25 日から 8 月 5 日にかけてである。調査では，二人一組のペアで相談しながら協力して調査問題に解答してもらった。問題解決時の会話には制限を設けず，活発な話合いをするように求めた。活発な話合いを求めた理由は，被験者が問題を解決する際に考えていることを顕在化し観察可能にするためである。解答の作成には，調査者（筆者）が被験者それぞれにボールペンを渡し，これを利用して二人で解答を作成するよう伝えた。調査に用いた問題は４題である。問題兼解答用紙１枚につき１題を出題し，１題ずつ問題を与え，１題が終了したらその都度用紙を回収した。調査時間は１時間から１時間半とした。

ペアの問題解決の様子と会話をビデオデータとして得るとともに，被験者の筆記記録である解答用紙をデータとして収集した。

2.4. 調査問題

調査では，表１に示した４つの問題を用いた。問題１は三角比に関するもの，問題３は三角関数に関するもの，問題２と問題４は三角比と三角関数の両領域にまたがるものである。三角比の問題や両領域にまたがる問題を含めた理由は，三角関数が三角比から拡張される際の困難性とその要因を検討するためである。

表１．　調査問題

問題１　$AB = 2\sqrt{5}$，$BC = 8$，$\tan\angle ABC = 1/2$ となる△ABC について，線分 AC の長さと，△ABC の面積を求めよ。
問題２　$AB = AC = 2$，$\angle ABC = \theta$ の△ABC について，面積が$\sqrt{3}$ より大きくなるときの θ の範囲を求めよ。
問題３　ある観覧車は半径 50 m で１周に３６分かかる。この観覧車は，ガイドブックで「地上 75 m 以上の見晴らしがすばらしい」と紹介されている。 (1) 太郎君は，観覧車からの景色を写真に撮りたいと思い，この観覧車に乗った。太郎君は，観覧車に乗ってから何分以内にカメラを用意しなければならないか。また，写真は何分間撮ることができるか。 (2) 観覧車の高度が上昇する速度が最も大きいのは，何分の時点か？理由も一緒に述べなさい。
問題 4　右図のように斜辺が定まっている△ABC と△CDE を頂点BCDが一直線状になるように並べる。$\angle CAB = \angle ECD = \theta$ とするとき，線分 BD が最大となる θ の値を求めよ。 

問題１は，平成 17 年度センター試験数学Ⅰ（本試験）の問題を改変したものである。三角比単元において学習する定理を用いて解決できるが，図形的に三角形の高さを求め解決することもできる。この問題を用いた理由は，三角比の問題を解決する際に，どの程度代数計算に頼るのか，どの程度図形的なものを参照するのかを見るためである。

問題３は，観覧車のゴンドラの高さから時間を求める問題とゴンドラの上昇する速度の変化を問う問題である。観覧車の話題は三角関数の教材としてしばしば用いられる（例えば，市川，1994；岩本，2010 など）。この問題を用いた理由は, 三角関数と円運動の関係，そして関数の変化をどれだけ捉えられるかを見るためである。また，一部のペアに対し，

４題の解答終了後，問題３の観覧車の時間に対するゴンドラの高さの関数のグラフを示してもらった。

問題２と問題４は図形の面積や線分の長さの変化と角の大きさの範囲や最大値を問う問題である。この問題を用いた理由は図形として示されている対象の変化を関数としてどのように捉えるか，どの程度図形的なものが参照されるのかを見るためである。

2.5. 分析の方法

調査で得られたデータは，次のように分析を進める。まず正解に辿り着けなかったペアの解答用紙の筆記記録から被験者の困難性を同定する。次に，同定された困難性がいかなる要因から生じたものであるかを検討する。困難性の要因については，Duval (2006) による記号表現のレジスターを分析ツールとして用いる。この分析ツールを選択した理由は主に二つある。第一に，記号表現のレジスターが，記号表現の体系を意味し，記号表現の扱い方から学習者の認知活動を特徴づけることを可能にすることである。第二に，レジスターを用いることにより，代数計算の手続きにおいて図形的な意味とのつながりの詳細な分析を可能にすることである。実際，三角比と三角関数の問題を解決する際は，代数計算に偏ることが多いため，図形的な意味が欠落することが少なくない。

また困難性の要因の分析では，被験者の問題解決の過程における，記号体系における２種類の変換（処理と転換）に焦点を当てる。記号表現のレジスターにおける「処理」とは，ある記号表現を同一記号体系内で変換することであり(cf. Duval，2006，p.111)，「転換」とは，ある記号体系の記号表現を別の記号体系の記号表現に変換することである (cf. Duval，2006，p.112)。したがってこの分析では，記号表現のレジスターにおける操作（変換）を通して被験者のもつ困難性を特徴付け，その要因を明らかにしようとするものである。

３．調査の結果とその分析

3.1. 被験者の解答：困難性の同定

調査では，全ペアが４題すべての問題に取り組んだ。多くのペアは正解に辿り着いたが，正解に辿り着かないペアも見られた。以下，各問題に対する被験者の解決結果を示し，正解にたどり着けなかった解答から三角比・三角関数の困難性を同定する。

問題１では，多くのペアが正解に辿り着いた。正解に辿り着かなかったペアは，公式を忘れていたために計算間違いをしていた。問題を解決する活動の主なものは，問題で与えられている三角形を描き，辺の長さや角の大きさを余弦定理などの代数式に代入し，代数計算により辺 AC の長さを求めたものである。また，面積を求める際は，辺 AC の長さを求める際に導出した $\cos\theta = 2 / \sqrt{5}$ を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の式に代入し，$\sin\theta = 1 / \sqrt{5}$ と面積の公式（$S = 1/2 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\theta$）を利用することで面積の値を導出した。描かれた図形は，辺や角の認識のみに利用され，図形上の操作で三角比の値を出しているペアはいなかった。

問題２では，多くのペアが，問題として問われている三角形が二等辺三角形であることを問題文から読み取った。ここから，$\angle ABC = \angle BCA = \theta$ であることや，$\angle BAC = 180° - 2\theta$ であることを用いて代数計算を行った。角の大きさの範囲を求める際には，単位円を参照することで解を求めた。正解に辿り着けなかったペアの問題解決過程に

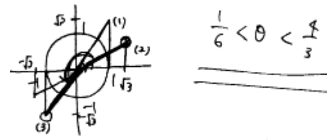


図１． 単位円において角の大きさの範囲を認識できないペアの記述（誤答）

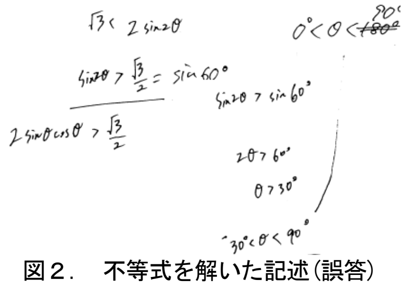


図２． 不等式を解いた記述（誤答）

は二通りのものが見られた。一つ目は，単位円を参照する場面で，三角形の角の範囲を考慮せず，単位円における範囲のみを用いたことによる誤答があった（図１）。二つ目は，不等式 sin2θ > √3 / 2 を sin2 θ > sin60°と変形し，そこから 2 θ > 60° という不等式に至り, その解を求めた誤答である（図２）。これは，両辺の係数比較による解答である。このペアは，図形や単位円を描いたが図を参照することはほとんどなかった。

問題３ (1) では，全ペアが観覧車の模式図を描き，問題として問われている 75m 地点を図から特定した。多くのペアは図から斜辺の長さが 50m, 高さが 25m となる直角三角形を考え，角の大きさを求めた。この問題では代数計算より，図への書き込みが主であった。これとは異なる解決過程から誤答に辿り着いたペアもあった。あるペアは，観覧車が 1/4 回転するために必要な時間を 9 分と求めた。そして，75m 地点が 50m 地点と 25m 地点の半分であることから 9 + 4.5 = 13.5 と解答した。

問題３ (2) では，ゴンドラの動きにおける垂直成分と水平成分の変化から解答を行っているペアが見られた。直観的に正解を導き出したペアも少なくなかった。多くのペアが問題を解く際に図を参照しながら考え，代数計算を用いたペアは多くなかった。

観覧車の動きをグラフに表す問題では，ほとんどのペアが，サイクロイド曲線のようなグラフを描いた（図３）。また，単位円のようなグラフを描いたペアもあった (図４)。

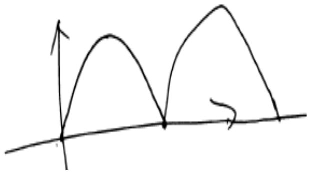


図３．　半円状のグラフ

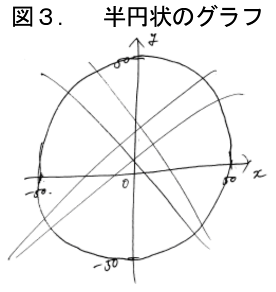


図４．　円状のグラフ

問題４では, 多くのペアが辺 BC と辺 CD の和を求める際に, 三角関数の合成の公式に数値を代入し代数計算により求めた。三角関数の合成の公式を覚えておらず，座標軸と直角三角形を描いて，三角関数の合成を考えたペアもあった。あるペアは，辺 BD を求める際の計算において，BD = sin θ + √3sin (90° - θ)としたが，代数計算において，sin (90° - θ) = sin θ と変形したことにより正解に辿り着くことができなかった（図５）。

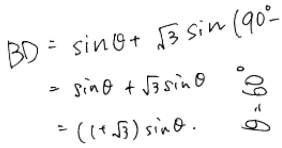


図５．　三角比の計算（誤答）

さらに，このペアは，BD= (1 + √3) sin θへと変形し，sin θの最大値を求めるために単位円を用いた。結果として, sin θ < 1 より, θの値を「マックス 89°」との発言が見られた。なお，単位円を用いてからは，元の図は参照されなかった。

これらの調査の結果より，次の６つの三角比・三角関数の困難性を同定した（図６）。

① $\sin(90° - \theta) \Rightarrow \sin\theta$ とすること
② $\sin 2\theta > \sin 60° \Rightarrow 2\theta > 60°$ とすること
③ $2\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 90°$ とすること
④ 三角形の角の大きさの範囲を単位円において考えること
⑤ 円運動と三角関数とを関連させること
⑥ 三角形と三角比とを関連させること

図６．　同定された困難性

困難性 ② ③ は, 代数操作における困難性であり, 困難性 ① ④ ⑤ ⑥ は, 図との対応関係に関する困難性である。

3.2. 困難性の要因の考察

次に，困難性を同定した筆記記録を，今度は記号表現のレジスターという視点から分析し，困難性の要因を検討する。

困難性 ① は，前述の図５の解答から同定したものである。被験者のペアは，辺 BD の長さを求める際に, BD = sin θ + √3 sin (θ - 90°) という式を立式した。この式中の √3 sin (θ -

90°) を，次式にて √3 sinθ としている。

レジスターの視点からすれば，本来，図形レジスターで角や辺の位置を認識し，代数レジスターの記号表現である sin θ や cos θ へ転換する。しかし，このペアは代数レジスターでの処理を行なう際に，計算に用いている記号表現に対応する図形レジスターの記号表現を参照せず，代数レジスターでのみ sin (θ - 90°) から sin θ へ処理している。つまり，図形レジスターの角や辺の認識と代数レジスターの記号表現の認識との対応関係が希薄であることがこの困難性の要因となっていると言える。また，sin θ が対辺の長さ，cos θ が底辺の長さ（もちろん斜辺が 1 のとき）といった代数レジスターと図形レジスター間の対応関係があれば，sin θ と sin (θ - 90°)を同一視することや，対辺を cos θ などと捉えることはなく，このような誤答は生じないであろう。このことからも，この困難性の要因が図形レジスターの角や辺と代数レジスターの記号表現（sin θ, cos θ など）との希薄な対応関係にあると考えられる（困難性の要因$\boxed{1}$）。

困難性 ② は，問題２における図１の解答から同定したものである。被験者のペアは，sin 2θ > sin 60° を 2θ > 60° と式変形した。この解答は両辺の係数比較による解答である。また，sin θ という数学記号の意味を考慮に入れず，不等式の両辺の sin の記号を約分しているとも言える。これらは，代数的な操作のみに偏ったために，記号の意味との関係が軽薄となっているために生じたと考えられる。

レジスターの視点からすれば, このペアは, 代数レジスターにおける処理のみで式変形し, 通常，座標や単位円といったレジスターで認識される正弦関数の変化，つまり，ある三角関数の値を取りうる θ が複数存在することを考慮していない。つまり，代数レジスターと他のレジスターとの間に対応関係ができていないことがこの困難性の要因の一つとなっている。これは，先の困難性の要因$\boxed{1}$と，ほぼ同様の要因であると考えられる。

困難性③は，問題４における図７の解答から同定したものである。被験者のペアは，辺 BD の長さを求めるために，△ABC の辺 BC と，△CDE の辺 CD の長さの和を三角比の記号を用いて表現し，三角関数の合成公式を用いて最大値を求める。彼らは, BD = 2sin (θ + π/3) の最大値を求めるために, 単位円を利用して 2 sin (θ + π/3) = 90° という方程式を立式している。

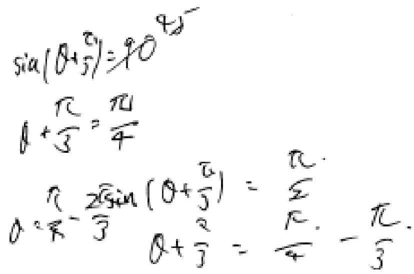


図７． 困難性③を同定した記述

この困難性は三角関数の値域と定義域の誤った認識により生じたものであると考えられる。レジスターの視点からすれば，このペアは, 三角関数の合成を行うことで， BD = 2sin (θ + π/3) という代数レジスターの記号表現を生成した。そして，最大値を求めるためにこの記号表現を座標（単位円）レジスターの記号表現へ転換し，θ が 90° の時に最大となることを得た。この最大値を取る値を, 再度, 代数レジスターへ転換し，2 sin (θ + π/3) = 90° という方程式を生成した。この方程式の右辺は，通常，f(θ) = 2 sin (θ + π/3) で表される関数の値域の値でなくてはならない。しかし, 彼らは関数の定義域の値を用いている。このことから，座標（単位円）レジスターの記号表現から代数レジスターへの転換において, 関数の定義域が取る値が何であり，値域の取る値が何であるかといった情報が転換されていないことが要因となっていると考えられる（困難性の要因$\boxed{2}$）。

困難性④は，問題２における図１の解答から同定したものである。被験者のペアは，問題文に示された情報から，二等辺三角形を解答用紙に描き，問いで問われているθ の値を

求めるために，余弦定理と面積公式を利用し，4sin θ cos θ < √3 を導き出した。そして，θ の範囲を 0° から 360° の範囲にあるとし，単位円からθ の範囲を得た。

これは，三角形の角の範囲を考慮せず，単位円における範囲のみを考慮したことにより生じた誤答である。レジスターの視点からすれば，本来，図形レジスターで三角形の性質としてθ の取りうる範囲を認識し，それを座標レジスターに転換することで関数の定義域を得る。しかし，このペアは，解答用紙に生成された二等辺三角形という図形レジスターの記号表現から座標（単位円）レジスターの記号表現へ転換する際に，角の大きさが取りうる値の範囲を転換していない。さらに，図形レジスターにおいては三角形の角の変化の一部を認識しているが，θ の変化の全体像を認識していなかった。つまり，図形レジスターにおいて，角の大きさの変化の全体像が把握されていない。これは，図形レジスターにおける記号表現が静的なものであるため，変化という動的なものを図形レジスターでは表現できないことが要因となっている。通常，こうした動的な変化をうまく表現できるのは座標（グラフ）レジスターである（困難性の要因$\boxed{3}$）。

さらに，解答用紙上に図としての角の記号表現は残っていることから，問題文に示されている角とは異なる角を認識したと考えられる（図８）。即ち，図形レジスターで認識された範囲と座標（単位円）レジスターでの関数の定義域との対応関係が希薄であったことも，この困難性の要因となっていると考えられる（困難性の要因$\boxed{4}$）。

困難性⑤は，調査問題３の観覧車の動きをグラフ化する問題の解答用紙から同定した「円運動と三角関数とを関連させることにおける困難性」である。被験者の誤答は大きく２種類に分けることができる。一つ目は，座標平面上に原点を中心とする円を描いたもの

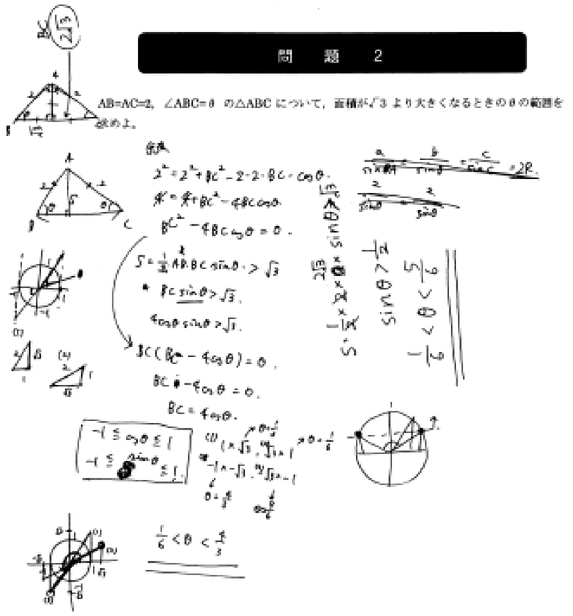


図８．　被験者の解答用紙

である（図４）。二つ目は，半円または，サイクロイド曲線状のグラフを描いたものである（図３）。レジスターの視点からすれば，本来，時間に対する観覧車の高さを表わす関数のグラフは，観覧車を図形レジスターもしくは座標（単位円）レジスターの記号表現として生成し，この記号表現をさらに座標レジスターへ転換することで三角関数のグラフが得られる。そのため，この２種類のグラフいずれかを解答として与えるということは，図形レジスターから座標（グラフ）レジスターへの転換がうまくいっていないのである。この点をもう少し詳しく分析していく。

まず，図４の解答を行ったペアである。このペアは，観覧車の模式図という図形レジスターの記号表現を座標レジスターへ転換することで円状のグラフを得た。通常，観覧車の動きをグラフ化する際は，観覧車の動きの“何が変化しているか”に着目する。しかし，このペアは，何が変数かほとんど考えずに観覧車の動きを，そのままグラフにしたと考えられる。つまり，観覧車の動きには，角度，x 座標，y 座標の３つの変数があり，それらすべてが考慮されている。これは，図形レジスターにおいて，必要な変数を抽出できていな

いのである（困難性の要因$\boxed{5}$）。

次に，図３の解答を行ったペアである。このペアは，観覧車の動きをグラフ化する際，“高さの変数”と“角度の変数”の２つの変数を図形レジスターの記号表現から抽出し，グラフを図示している。したがって，上述の変数抽出の問題はクリアしている。しかし，得られたグラフは，サイクロイド曲線のようなグラフとなっている。このグラフの問題点は，関数の変化の仕方が考慮されていないところである。実際，変化の仕方というものは，図形レジスターもしくは座標（単位円）レジスターでは表現されにくい。そしてその表現されにくいものが考慮されずに座標レジスター（グラフ）へ転換されている。即ち，図形レジスターもしくは座標（単位円）レジスターにおいて，横軸に対する縦軸の変化が認識されていないことが困難性の要因となっている（困難性の要因$\boxed{6}$）。

困難性⑥は，問題４における図９の解答から同定したものである。調査の結果，２ペアの被験者が同様の記述をした。被験者は，

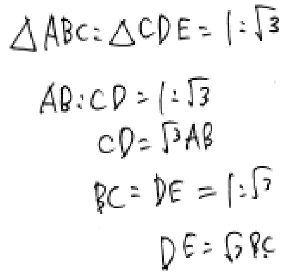


図９．　困難性⑥を同定した記述

与えられた図形（△ABC と△CDE）の辺 BC と辺 CD の長さを三角比の記号を用いず，△ABC と△CDE が相似であることに着目した。これにより，辺 BC：辺 CD＝1：√3 であることを求めているが，三角形の辺の長さを三角比を用いて表現できず，解決に至っていない。

この困難性は，三角形の辺の長さと，三角比の記号の対応関係が希薄であることにより生じたと考えられる（困難性の要因$\boxed{7}$）。通常，三角形の辺の長さを表現するためには，三角比が辺の長さを表現すると捉え三角比の記号表現をそのまま利用するもの（対辺の長さは a sin θ，底辺の長さは a cos θ，a は斜辺

$\boxed{1}$ 図形レジスターの角や辺と代数レジスターの記号表現との対応関係が希薄であること
$\boxed{2}$ 座標（単位円）レジスターの記号表現から代数レジスターへの転換において，関数の定義域が取る値が何であり，値域の取る値が何であるかといった情報が転換されていないこと
$\boxed{3}$ 図形レジスターにおける記号表現が静的なものであるため，変化という動的なものを表現できないこと
$\boxed{4}$ 図形レジスターで認識された範囲と座標（単位円）レジスターでの関数の定義域との対応関係が希薄であること
$\boxed{5}$ 図形レジスターにおいて，必要な変数を抽出できていない
$\boxed{6}$ 横軸に対する縦軸の変化が認識されていないこと
$\boxed{7}$ 図形レジスターの処理において，三角比の記号表現を用いて辺の長さを表現できないこと

図１０．　困難性の要因

の長さ）と，辺の比に着目して三角比の値を得てから辺の長さを代数レジスターの処理によって求めるもの（cos θ = x/a，x = a cos θ，a は斜辺の長さ）がある。レジスターの視点からすれば，いずれの場合も図形レジスターにおける処理が問題となる。

これらの分析結果をまとめると図１０のようになる。この結果を概観すると，要因の中で，代数レジスターの処理に関するものは１つのみであり，他のものは，すべてあるレジスターから別のレジスターへの転換に関わるものであった。特に，図形レジスター，代数レジスター，座標（単位円）レジスターの三者の対応関係（転換）が希薄であることが困難性の大きな要因となっていると言える。さらに，レジスターにより表現できるものとできないものが存在するという性質そのものが困難性の要因となることも明らかとなった。これは，困難性の要因$\boxed{3}$に代表される。

４．教科書分析の概要と結果

困難性の調査の分析結果と教科書分析で得られた結果とを関連づけた考察を行うため，ここでは，拙稿 (2011a) で報告した教科書の分析結果の概要を示す。

教科書分析は，三角比から三角関数へ拡張する場面における連続性と乖離を明らかにし，困難性となりうる飛躍を特定することを目的とした。分析は,「教科書の定義の分析」と「教科書に示されている問いの分析」の２つからなる。前者では，三角比・三角関数単元に示されている「鋭角の三角比」「鈍角の三角比」「三角関数」の３つの定義が，数学的にどのような意味や性質をもつのか分析した。後者の分析では，教科書の三角比と三角関数それぞれの単元で与えられているすべての問いについて想定されている解決方法を探ることにより，そこで問題となる数学（正確にはプラクセオロジー）がいかなるものか検討した。分析には,『改訂版数学Ⅰ』 (数研出版，2010) および,『改訂版数学Ⅱ』(数研出版, 2010) の教科書を用いた。また，教科書で想定されている解決方法を知るために,『改訂版数学Ⅰ 教授資料』 (数研出版) および,『改訂版数学Ⅱ 教授資料』 (数研出版) も利用した。

定義の分析の結果，先行研究でもしばしば指摘されているように，角の大きさの表し方が度数法から弧度法になること，定義域の範囲が順次拡張されていることに伴い，三角関数の値域も拡張され, 負の値まで考慮する必要が生じていることなどが確認された。この結果から教科書内において扱われる問いも定義に合わせて変化しているのではないかと予想された。

教科書の問いの分析の結果をまとめると表２のようになった。ここでは，プラクセオロジーの概念が分析ツールとして用いられており,「タスクタイプ」は問いの種類,「テクニック」はそのタスクタイプを解決する方法,「テクノロジー」はテクニックの背後にあり，その正当性を示す理論的なもの,「セオリー」はテクノロジーの正当性を示す理論体系のようなものである。詳細は宮川 (2011) 等を参照のこと。分析の結果，いくつかの連続性と乖離が見られた。連続性については，大きく２点が特定できた。１つ目は，三角比・三角関数の値を求める問いの存在である。三角比･三角関数両単元の問いに「次の角の正弦, 余弦，正接の値を求めよ」（改訂版数学Ⅰ, p.108, 練習 15）や「θ が次の値のとき, sin θ, cos θ，tan θの値を求めよ」（改訂版数学Ⅱ, p.107，練習５(1)）があり，定義域こそ異なるがタスクの文言はほぼ等しく，テクニックもほぼ同様である。２つ目は，代数的な処理による問題解決が多く見られたことである。これは，共通する問題解決のテクニックが存在していると換言できる（ex : 改訂版数学Ⅰ, p.115，例題 3 ; 改訂版数学Ⅱ，p.108，例題１)。また，これらのテクニックは，図的なものを参照せずに，代数計算のみで解決されるものがほとんどであった。

一方，乖離については，両単元における問

表２．　教科書分析の結果

	三角比	三角関数
タスクタイプ	値を求めるタスクタイプが多い	
	主に幾何領域のタスクタイプ	さまざまな領域のタスクタイプ
テクニック	代数レジスターの処理が多い	
	図形レジスターの利用 **・特に，位置関係の把握のため** レジスターの処理と転換は単純	座標レジスターの利用 **・特に，関数の振る舞いを把握するため** レジスターの処理と転換が複雑
テクノロジー	共通するテクノロジーの存在	
	幾何に関するテクノロジー 特に三角形に関するテクノロジー	さまざまな数学のテクノロジー 幾何に関するテクノロジーはない
セオリー	三角形や三角比に関する数学領域 **・特に，三角形に関する数学**	三角関数（関数）領域 **・三角関数の値を求めるテクノロジーを多く含む**

いが存在する領域の違いが見られた。三角比単元の問いは，主に幾何領域の問いであるのに対し，三角関数単元の問いは，解析領域を始めとする様々な領域の問いであった。特に，三角関数単元において，三角形などの幾何図形の問いがみられないことが大きな乖離であった。さらに，問いの乖離に付随して，タスクを解決するためのテクニックが異なることや，三角比と三角関数の背後に存在する数学（つまり，テクノロジーとセオリー）が異なることが明らかとなった。

以上のような教科書の分析の結果から，三角比・三角関数の様々な連続性と乖離による困難性が想定された。次節では，教科書分析で見られた乖離と調査で見られた困難性との関連を検討する。

５．連続性と乖離の視点から

調査で見られたそれぞれの困難性が，教科書分析での連続性と乖離のいずれと関連するか検討した．本稿を終えるにあたって，最後にこの検討結果の主たるものを報告する。

まず，教科書の分析結果と調査の分析結果には，いくつかの関連がみられた。その多くが三角比の角の大きさの範囲と三角関数の定義域の範囲における乖離や，座標レジスターを用いることによるテクニックの乖離に対応していた。例えば，困難性②で示した $\sin 2\theta > \sin 60°$ を $2\theta > 60°$ とした困難性は，教科書分析における「三角比で扱うことのできる角の大きさの範囲と三角関数の定義域の範囲における乖離」に対応していると考えられる。なぜなら，この問いにおける角の大きさの範囲を鋭角の三角比の定義で示されている角の大きさの範囲に限れば，この処理は正しいが，三角関数の定義域の範囲では解が一つとは限らないことから誤りとなるためである。

また，観覧車の動きをグラフに図示する際の困難性の要因として図形レジスターと座標（グラフ）レジスターの対応関係がないことがあげられた。これは教科書分析で見られた「座標レジスターを用いることにおけるテクニックの乖離」と対応している。なぜなら，三角関数のグラフを描くためには，三角比単元にはみられない代数レジスターや座標（単位円）レジスターから座標（グラフ）レジスターへの転換において必要な変数を抽出する操作が必要となるためである。このことから，テクニックの乖離は，三角関数の学習において，生徒に困難性を生じさせる大きな要因となると言えよう。レジスターの視点からすれば，三角比と三角関数では，問いを解決する際に用いられる記号表現が異なり，さらにレジスター間で転換される記号表現も異なるのである。

以上，簡単にだが，教科書の分析結果と長の分析結果を関連させ，連続性と乖離の視点から三角比・三角関数の困難性の要を検討した。ここで取り上げたものは，三角比・三角関数の困難性の一部である。今後は，さらに包括的な研究が求められる。

引用・参考文献

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103-131.

市川徹 (1994) .「三角関数の応用　円運動にともなう直線運動の解析およびサイクロイドについて」.『教育科学／数学教育』1994年 10 月号．明治図書．71-78.

岩本敏彦 (2010) .「三角比から三角関数への拡張の指導について」.『日本数学教育学会誌　臨時増刊　第 92 回総会特集号』. 390.

大島利雄ほか .『改訂版　数学Ⅰ　〔数学Ⅰ 030〕　教授資料』. 数研出版.

大島利雄ほか .『改訂版　数学Ⅱ　〔数学Ⅱ 030〕　教授資料』. 数研出版.

片山英樹 (1988) .「三角関数を見通した「数学Ⅰ・三角比」の指導」.『日本数学教育学

会誌　臨時増刊　第七十回総会特集号』. 401.
川中宣明ほか (2010) .『改訂版数学Ⅰ』. 数研出版.
川中宣明ほか (2010) .『改訂版数学Ⅱ』. 数研出版.
角田直樹 (2011a) .「高等学校数学の三角比, 三角関数の連続性と乖離ープラクセオロジーの視点を用いた教科書分析からー」. 上越数学教育研究 第 26 号, 61-70.
角田直樹 (2011b) .「高等学校数学の三角関数の困難性についてー大学生に対する調査の分析結果よりー」. 日本数学教育学会『第44 回数学教育論文発表会論文集』. 603-608.
角田直樹 (2012) .「高等学校数学の三角比・三角関数における困難性ー連続性と乖離に焦点を当ててー」. 上越教育大学修士論文.
長岡耕一 (2003) .「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」. 日本数学教育学会『日本数学教育学会誌』第 85 巻 第9 号, 32-37.
宮川健 (2011) .「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』. Vol. 94, 37-68.
柳田大介 (2005) .「理解を重視する高校数学の指導に関する研究 (Ⅲ) ー鋭角から鈍角への三角比の拡張場面を事例としてー」. 日本数学教育学会『第 38 回数学教育論文発表会論文集』. 115-120.
山口直美 (2008) .「高等学校のグラフ力育成における数学的モデル化過程を意識した授業効果の研究～観覧車の動きを題材とした三角関数の学習～」. 第 41 回数学教育論文発表会論文集. 459-464.