上越数学教育研究，第27号，上越教育大学数学教室，2012年，pp.199-210.

スパイラル学習を意図した教材の一提案

－授業デザインのための理論構築を目指して－

角田　直樹*
吉井　貴寿†
下平　将揮‡

1．はじめに

社会情勢の変化や学習指導要領の改訂を受け，算数・数学教育は過渡期に差し掛かった。たとえば，中学校では，「算数・数学的活動の充実」が強調されるとともに，新たに資料の活用が領域として位置付き単元にも加わった。授業時間数や配分も，所謂「ゆとり教育」実施後と比較して，大幅に増加している。この改訂のねらいとして「算数・数学的活動の重視」の他に，「学び直し・反復・スパイラルの推奨」「社会・生活への活用」が具体例をそえて随所に盛り込まれている。即ち，これらが今後の日本の算数・数学教育に求められている根幹であり，これらを積極的かつ連続的に促す教材研究や開発を推進していくことが大切であると考える。

しかし，学会や研究授業会等で教材研究が進められ，提案がなされている中で，上述したキーワードを全て満たすような授業や教材と出会うことは稀で，どれか一つに絞り，研究の焦点として実践している事例が一般的といえよう。また，授業場面において，主だった根拠や理由もなく単調に生徒の活動を促す授業を仕組むことが，「算数・数学的活動」と誤認識し捉えられている風潮がある。報告の多くは，「満足のいく活動を観ることができた」「生徒の興味・関心を刺激することができた」等，教師側の自己満足で終息しており，数学教育にとって最も大切な「生徒は，教師の伝えたい数学知識を獲得できたのか」「生徒の活動による変容はいかなるものか」「授業を通して，課題は達成されたのか」等についてはあまり報告されていない。

さらに，「算数・数学的活動の充実」に重点を置き過ぎるあまり，授業の中核を担う素材研究が疎かになり，本来の授業の目標と表裏している感も否めない。

そこで，本研究では，上述した三つのキーワードに「学習項目の学習に寄与する」を付加した教材研究及び，授業実践を提案する。一見すると「学習項目の学習に寄与する」授業研究・教材研究は，恰も当然であるかの様に感じられる。しかし，学習指導要領 (2008) 告示以降，「算数・数学的活動」が「課題学習」という新たな内容に範囲を拡張し，これに付随して，「算数・数学のどのような知識を，どのような教材で，如何に生徒に伝えるか」という根本的な視点が曖昧になってしまうのではないかと危惧される。そして，先の「生徒が何を学習したのか」「活動の変容はいかなるものか」という疑問は，これまでの「算数・数学的

*　上越教育大学大学院修士課程３年
†　早稲田大学大学院修士課程２年
‡　上越教育大学大学院　平成 22 年度修了生，現長野県松本市立鎌田中学校数学科教諭

活動」に重点をおいた研究において，非科学的な分析が行われていたことによるために生じたと考える。ここでは，児童・生徒の学習・知識状態を明らかにするために科学的な理論を用いる。これにより，単調的な生徒の活動としての「算数・数学的活動」ではなく，「学習項目の学習に寄与したか」を十分検討・考察することが可能となると考えた。

本稿では，教材研究および授業実践のための授業デザインを理論的な枠組みを用いて構築することを目的とする。授業デザインでは近年多く取り上げられている「スパイラル型学習」に着目する。

２．スパイラル型学習

学習指導要領 (2008) において，「算数・数学的活動」とほぼ同等な位置付けがされているトピックに「反復（スパイラル）による教育課程」がある。

「反復（スパイラル）による教育課程」は発達段階や学年の段階に応じて算数・数学の内容に系統性を持たせ，内容の一部を重複させるような教育課程の編成を目指す文言として用いられている。これを本稿では，「スパイラル型学習」と呼ぶ。

スパイラル型学習は，近年になって注目されたものではなく，ブルーナーが『教育の過程』 (1984，pp.66 - 69) の中で「ラセン形教育課程」として提唱している。さらに, 自然科学教育において同一の題材を「あとの学年でも一度，二度繰り返し展開されなければならない」 (ibid，p.68) とスパイラル型学習の重要性を述べている。そして，このスパイラル型学習の考え方は，我が国の 1970 年改訂された学習指導要領に強く影響を与えた (cf．佐々木，1974，p.9) 。以降，学習指導要領の算数科の基本は，長い間スパイラル状に学習を深化させることにあった (森川，2006，p.52) 。スパイラル型学習は，現代化の衰退とともに理論が姿を消したかのように見えたが，学習指導要領 (2008) では「反復（スパイラル）」の重視がより一層強調された (cf. 杉野，2008，pp.418 - 419) 。

学習指導要領 (2008) に示されている「反復（スパイラル）」について，渡邊 (2010) は，「数学の広がりを実感させるためにも，同じ問題（教材）を小・中・高で扱うということもあってよい。繰り返しではなくスパイラルで上がっていく。」(ibid，p.52) と述べている。このように，同一の教材を用いた算数・数学的活動により，児童・生徒は，数学の知を広げていくことが可能となるのではないか。淡川 (2008) では，同一教材を単元間，学年間，学校段階間で繰り返し利用することの可能性を示唆している。その理由として,「単元の導入がよりスムーズにできる利点があり，前回の学習内容の復習も自然とできる利点」 (ibid，p.886) を挙げている。

これらの先行研究から，スパイラル型学習による活動により，数学の多くの知の体系を関連付ける算数・数学的活動を取り入れた授業の可能性が想定される。

３．素材と教材の価値

日常事象に潜む素材から教材化にいくことを前提として，次のような事例を紹介する。素材は私たちがよく目にするコーラ瓶を用い，教材化を図っていくとする。本研究で用いるコーラ瓶は，外見は合同であるが内容量の異なる２種類のコーラ瓶（コカコーラ・コカコーラ Zero）である（図１）。図１の左瓶が通常販売されている瓶入りコカコーラ（以下，C_R）であり，内容量は190mL である。右瓶は，同社から一部地域のみ販売されている瓶入りコカコーラ Zero（以下，C_0）であり，内容量は，245mL である。この二つのコーラ瓶は，販売時の

図１　２種類のコーラ瓶と販売時の水面

図２　コーラ瓶からコーラ Zero 瓶へ水を移す

水面の高さは同じ位置にある。しかし, C_R 瓶に満水の水を C_0 瓶に移すと水位が下がる（図２）。これは，左右の瓶のガラスの厚さによるものである。

　このように，水位が変化する現象を目の当たりにした児童・生徒に対し，興味・関心をもちつつ，疑問を抱き，この疑問から数学的に解決する際の活動により算数・数学の知を獲得していくと推察される。

　本研究で用いる教材は，当然であるが，何か特定の学習項目を学ぶために考案されたものではない。筆者らが日常生活の中で，不思議だ, 面白いと感じたものを取り上げ，あらゆる角度から数学的に考察することで教材化を図っている。このことから，本教材は社会や日常事象に依存している。それ故に，学習過程には驚きや迷いが生じ，喜びや落胆も生まれることを期待する。即ち，学習指導要領 (2008) に示されている「算数・数学的活動」を促し，教材を通して「社会・生活への活用」が可能になる。さらには，あらゆる角度から数学的に考察することで，「学び直し・反復・スパイラル」学習の実現に向けて大きく近づくことができるのではないだろうか。特に本研究では，スパイラル型学習指導を強く意識していく。

　たとえば，コーラ瓶教材を軸として小学校段階では，第１学年の「量の大きさの比較」から第２学年の「量の単位と測定」，第３学年の「計器による測定」へと学習・算数的な知の深化が想定される。さらに，「量の単位と測定」「計器による測定」から中学校第１学年「比例と反比例」，第２学年「一次関数」へと深化させることも可能となる。また，「量の単位と測定」から中学校第１学年「空間図形」，高等学校数学Ⅲ「微分積分法」や高等学校数学 C「式と曲線」までの深化も期待できる。これをさらに大学数学における「ルベーグ積分」や「フーリエ級数」へと発展させることも勿論不可能ではない。

　このような教材を用いることで，生徒が現実場面における課題を数学の世界におい

て試行錯誤し，解決して，現実場面での考察を行うことが可能となるのではないか。さらに，各学年や学習領域において広く数学の学習における興味関心を引き出し，スパイラル型学習指導が可能となるのではないかと考えた。

４．授業デザインのための理論

本研究では，先の算数・数学的活動に焦点を当て，授業を構築，分析するための二つの枠組みを示す。

4.1. 数学的モデリング

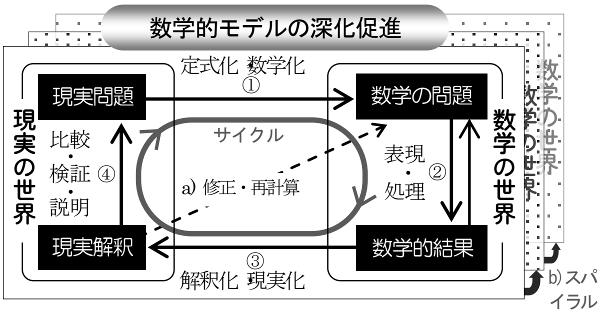
学習指導要領 (2008) に示されている「学び直し・反復・スパイラル」という三つのことばを本稿では，ブルーナーの「大サイクル」,「小サイクル」という概念 (cf. 広岡，1972) と同義であると捉えた。この概念を基に，本研究の枠組みの構築を目指す。ブルーナーの「大サイクル」とは,「幼児が成人していく長期的な巨視的場合」(ibid, p.69) に成り立つものであるとしている。そして，この大サイクルの一部（微視的場面）において小サイクルが成り立つとされている (ibid，p.70) 。そして,「小サイクルが継起的に集まって，大サイクルができるといえよう」(ibid，p.70) 。つまり，近年注目されている数学的モデリング（数学的モデル化）とほぼ同様の概念であると解釈できる。本稿では，数学的モデリングの先行研究を参照し，本研究で規定した枠組みを示す。

数学的モデリングは,「実世界の問題を取り上げて，これを数学化し，学習した知識を活用してこれを解決する活動は，学校教育上で一つの重要な活動とされ，数学科の目標として強調されてきた」(日本数学教育学会，2010，p.272) ものである。この数学的モデリングにおける我が国の研究では,三輪 (1983) や池田 (1999) , 西村 (2001) , 川上 (2007) の数学的モデリングがある。数学的モデリングでは，数学を応用することや活用することの視点で現実の世界と数学の世界とを連結する役割の一端を担っている。

数学的モデリングの過程や捉え方は一様ではないが，本稿では，三輪(1983)，西村(2001)，川上(2007) の見解を述べる。三輪(1983) は，数学的モデリング過程を三つのサイクルとして図式化し，そのサイクルに作業，評価，一層の改良を含めている。池田 (1999) や, 西村 (2001) のモデリングは四サイクルで示され，池田 (1999) は，修正の繰り返しに力点を置いている。川上(2007) は，数学的表現の深化と生徒の問題理解の深化に着目し，モデル枠組みを設定している。本研究では，これら三者の見解を基に数学的モデリングを整理し直し，新たに数学的モデルを規定して，図式化した下平 (2010b) の深化促進モデルに着目する（図３)。このモデルはブルーナーの小サイクルに相当する。

考慮すべきことは，現実問題を扱うすべての場面で，そのモデル化がこの過程の段階を順次に踏むということではないということである。場合によっては，④現実解釈から①現実問題への段階の流れが実際にはやや不透明となり，授業場面によっては,サイクルの方向性が逆になる場合も考えられる。

さらに，この数学的モデリングのサイクルは，1 時間の授業におけるミクロなサイクルでの展開より，むしろ単元内，同一数学領域内での展開が望ましいと考えられる。同一数学領域内で考えれば，小学校算数の「比例」単元から中学校数学へのスパイラル的な学習等，学校種を超えたサイクル・スパイラルが考えられるのではないか。そこで，本研究では，図３における「数学的モデルの進化促進」のモデルを，学校種間



①【定式化・数学化】その事象を目的に合った数学的な問題場面につくり替える。
②【表現・処理】数学的な問題から数学的結果を得る。
③【解釈化・現実化】数学的結果を現実問題の言葉に翻訳する。
④【比較・検証・説明】そのモデルを現実の状態と比較し，有効性を検証する。また，他者にその根拠や理由を説明する。

a)〔修正・再計算〕モデルと現実的な結果との間に適切な関係がなく，不都合が生じた場合，再度モデルの仮設に立ち戻り，修正を施す。
b)〔数学的モデルの深化〕必要に応じて，①～④のスパイラルを図ったり，モデル過程を段階的に積み重ねたりすることで，数学的モデルを洗練させる。

図３　数学的モデルの深化促進

を超えたスパイラル型学習のモデリングの構造へと拡張する。これを基に，図４のようなモデリングの構造を規定した。

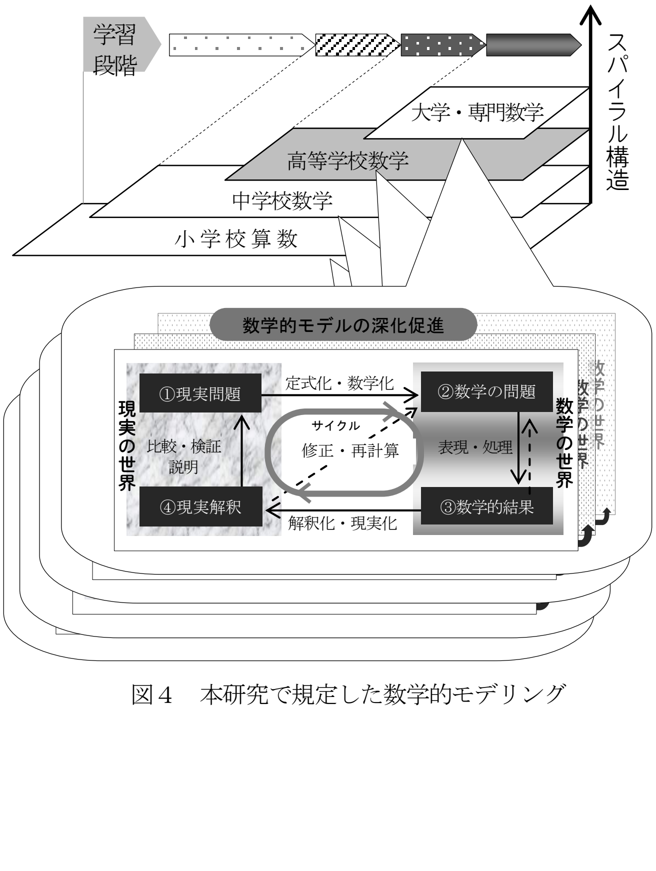


図４　本研究で規定した数学的モデリング

図４におけるスパイラル構造は，小学校算数から大学・専門数学へのスパイラル型の学習により数学の知が構築・深化されていくと捉えるものである。そして，個々の学校種間における数学においても数学的モデルの深化促進が存在すると考えた。これは，ブルーナーの示す「小サイクルが継起的に集まって，大サイクルができるといえよう」(広岡，p.70) ことに相当する。たとえば，「関数単元（解析学)」におけるスパイラル構造は，次のように示すことができる（図５)。

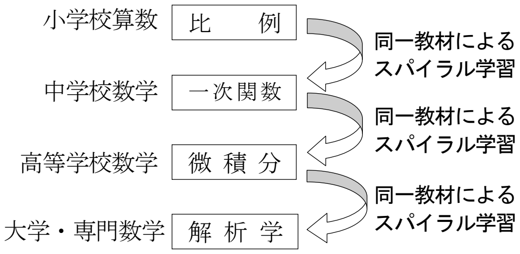


図５　解析学におけるスパイラル構造

本研究の前提は，同一教材（２種類のコーラ瓶）を用いたスパイラル型学習である。小学校算数にて，コーラ瓶の内容量に着目した「比例」を扱うことを想定し，さらに中学・高校・大学と，数学の知を深めていくことが可能となると考えている。また，学校数学が段階的に構築されていることも前提とした。

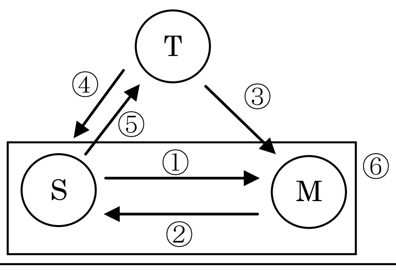
4.2. 教授学的状況理論

これまで，数学的モデリングをマクロな視点による教授学習の状況として示した。しかし，児童・生徒が数学の知を学習する際は，ミクロな視点から授業・生徒の学習の状況を設定しなければならない。また，本研究の問題意識として示した「算数・数学的活動」を行うことで，「児童・生徒がいかなる数学の知を獲得したのか」，「児童・生徒が獲得した数学知識は，どのような活動（相互作用）から生じたものか」を明らかにする視点が不可欠である。これは，本

研究の示す四つの条件の一つである「児童・生徒の学習に寄与する」ことを目指すものである。

そこで，本研究では，Brousseau (1997) による教授学的状況理論 (以下，TDS) を用いる。これにより，生徒が「算数・数学的活動」を通して，数学の知を獲得する状況をデザインすることができる。さらに，授業を分析する際に,「児童・生徒がいかなる数学知識を獲得したか」「児童・生徒が獲得した数学知識は，どのような活動（相互作用）から生じたものか」を明らかにすることができると期待する。

TDS は，Brousseau G. をはじめとする研究チームにより提唱された理論である。この理論を用いることで，授業を「科学的」に記述することができる。TDS の前提は，学校現場における教師，生徒，milieu の三者の関係から成り立っている。milieu とは，「「水は魚にとって自然な環境である」とされるように生態学的な意味で理解されるべきである。」とされている（Sierpinska A，1999，p.1)。本研究では，milieu を「数学の知を生じさせうる対象」と定義する。そして，Brousseau (1997) による学習は,「児童・生徒は，矛盾や困難，不均衡を生じる milieu に適応することで学習していく」と示されている (Brousseau G.，1997, p.30) 。



①：action
②：feedback・information
③：教師が milieu を設定
④：数学知識を教える（意図）
⑤：数学知識を学習する（意図）
⑥：亜教授学的状況

図６　教授学的状況

図６における T は，教師を示し，S は児童・生徒, M は milieu を示す。生徒は, milieu に対し action を行う。milieu は, 生徒の action に対する information を生徒へ返す。このとき，生徒の働きかけに対し，数学的な知識のもととなる information を feedback という。つまり, 生徒が milieu へ action を行い, milieu から feedback が返されることで学習が生じる。しかし，生徒と milieu のみでは学習は生じない。生徒が action を行うための milieu を教師が設定しなければならない（図６，③)。つまり，教師は生徒に「数学の知識を獲得してほしい」という意図（責任）を持っている（図６，④)。そして，生徒は「数学を学習する」という意図（責任）を持っている（図６，⑤)。そして，生徒と milieu による相互作用（図６，⑥）を亜教授学的状況とよぶ。そして, TDS における学習は，次に示す①から④の四つの場面からなる (Brousseau G.，1997；Sierpinska A，1999；宮川，2009 / 2011) 。

本研究では，TDS における，先に示した一つの状況と四つの場面に焦点を当てる。前者は，先ほど示した「亜教授学的状況」である。亜教授学的状況とは，教師が存在するが，あたかも生徒と milieu との相互作用が生じているような状況である。四つの場面とは,「試行錯誤の場面」,「定式化の場面」,「妥当性判断の場面」,「制度化の場面」である。以下にこれらの場面の詳細を示す。

①.試行錯誤の場面

試行錯誤の場面とは，亜教授学的状況にある生徒が milieu との相互作用を行う場面をさす。教師は，生徒が没頭するような milieu を設定し，生徒に与え，その場から立ち去る（教師は，生徒と milieu の相互作用に介入しない)。生徒は，問題解決の手段を発見しなければならない責任を（暗黙的に）負う。試行錯誤の場面では，知識は問題解決のための手段として現れる。この場

面の生徒は，必勝法を明らかにするための言語（数学的な表現）を持っていない。

②.定式化の場面

定式化の場面とは，試行錯誤の場面にて，明らかにされなかった必勝法や仮説を定式化する。生徒は，試行錯誤の状況では自らの必勝法を相手に伝えるための言語を持っていない。そこで，自らの必勝法や考えなどを定式化するための言語を生成する場面である。

③.妥当性判断の場面

妥当性判断の場面とは，生徒が試行錯誤の場面で発見した必勝法が正しいか否かを検証する場面である。このとき，教師は，生徒の議論に指示を与えたり，矛盾に注意を向けたり，体系的な概念を使用するような干渉は行わない。

生徒は，自分の必勝法の妥当性判断を教師に委ねようとすることがある。これは，生徒と教師の間に契約が結ばれているためである。この契約は，教師は，授業を行う際に必要な知識や答えをすべて知る人物であり，生徒は，数学の知を学習するという責任からなるものである。この契約は，「教授学的契約 (Didactical Contract) 」と呼ばれる (Brousseau，1997 ; Sierpinska，1999)。つまり，生徒の必勝法の妥当性判断が教師の責任に委譲されることを指す。

④. 制度化の場面

制度化の場面とは，試行錯誤の場面や定式化の場面，妥当性判断の場面で生徒が作り出した必勝法や定式化された必勝法（数学知識）などを教室内で共有する場面である。

この場面は，授業等でもはっきり見受けることができる。例えば，教師が生徒に課題を与え，「グループで話し合ってみよう」と指示し，生徒がグループ内で意見交換を行っている場面などが相当する。

これらの四つの状況は，①から④へ段階を追って深化するものではなく，生徒と milieu，教師による教授・学習の場を記述するものである。

５．授業デザインへの示唆

数学的モデリングの視点から中学校数学における授業のデザインを示す。対象とする数学は，関数（解析学）を想定する。単元は，中学校２年「一次関数」単元，中学校３年「２次関数」単元である。なお，詳細な授業案・指導案は研究を進め精緻化していくため，本稿では簡単な概要のみを示す。また，本稿で示した教材を milieu とした場合における生徒，milieu の相互作用と学習を簡単に示す。

5.1. 中学２年「一次関数」

中学校２年では,「具体的な事象における二つの数量の変化や対応を調べ，関数関係について理解し，比例，反比例を関数として捉えなおした。」 (『中学校学習指導要領解説　数学編』，p.98) と示されていることから，２種類のコーラ瓶の差異と，コーラ瓶から考察される二つの数量の変化と対応関係に着目する。

例えば,「コーラの内容量の違いは何故生じているのだろうか？」と問うことで，瓶のガラスの厚さ（ガラスの使用量）への着目が促されると想定される。さらに，企業目線から「形状を保ったままガラスの使用量を減らすと最大でどれくらいのコーラを入れることができるのだろうか？」と問うことで，ガラスの使用量とコーラの入る量の間の関数関係を考えることを促す。実際，この関係は一次関数で考察可能である。また，その際ガラスの使用量の定義域は非常に重要な意味を持つ。このように現実的な問題を考察することで，関数の定義域・値域の重要性は一層深く認識されることと考えられる。

数学的モデリングの視点からすれば，現実事象の問題（現実問題）を数学の世界の問題として，生徒の定式化・数学化を促進できると考えられる。さらに，数学の世界における表現・処理により，定義域と値域の認識が生じると考えられる。

現実問題を数学の世界の問題として捉える活動（定式化・数学化）では，２種類のコーラ瓶の空状態の重さ，満水時の重さを測定し，ここから表１のような表を作成する活動が想定される。

表１　重さ測定の結果

	E	F	D_1
C_R	370 (g)	575 (g)	205 (g)
C_0	250 (g)	500 (g)	250 (g)
D_2	120 (g)	75 (g)	45 (g)

C_R：コーラ瓶　　C_0：コーラ Zero 瓶
E：空の時の重さ(g)　　F：満水時の重さ(g)
D_1，D_2：入れることのできる水の量の差

表１では，単位を g で示しているが対象が水であるため，mL での表現も可能となるまた，コーラ瓶の形状を保ったまま，使用されているガラス量（ガラスの厚み）を変えることで，内容量も変化する。このことから, 図７のようなグラフが作成される。

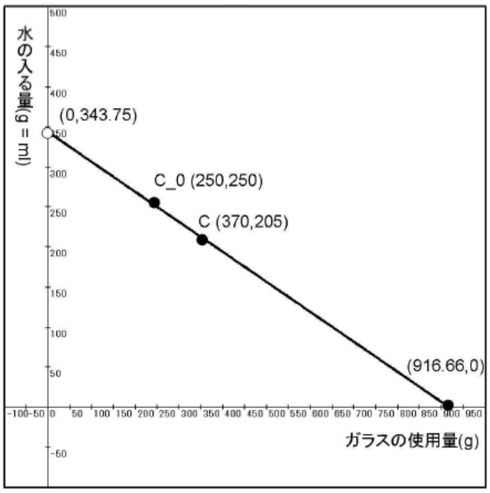


図７　内容量とガラス使用量の関係

今回の場合，C_R，C_0 の値から一次関数 $y=-\frac{3}{8}x+\frac{1375}{4}$ が求まる。また，その際，定義域は $0 < x \leqq 2750 / 3$，値域は $1375/4 > y \geqq 0$ となる。値域の値から，瓶の形状を保ったままでは，瓶をどんなに薄くしても 343mL 程度のコーラしか入らないことがわかる。

つまり，数学的モデリングの視点からすれば，数学的結果を現実解釈へと解釈化・現実化する過程を促すことが想定されるということである。

5.2. 中学校１年「比例」

前節では,「ガラス使用量」と「コーラの内容量」について，その関係を調べ，一次関数として表現した。ここから，同じ測定結果を別の観点からみることで，中学校１学年「比例」単元の教材とすることができることを示す。

今回着目するのは，２種類の瓶が存在したときの「ガラス使用量の差」と「内容量の差」の関係である。この観点から次項のような表２を作成することができる。

ここで,「ガラス使用量の差」と「内容量の差」が比例関係にあることは，表中の数字の比がほぼ一定（≒2.6）であることからも確認できる。したがって，ガラス使用量の差を y とし，内容量の差を x とすると，関係は $y = 2.67x$ と表現される（小数第三位を四捨五入)。これをグラフ化すれば，図８のように表現される。

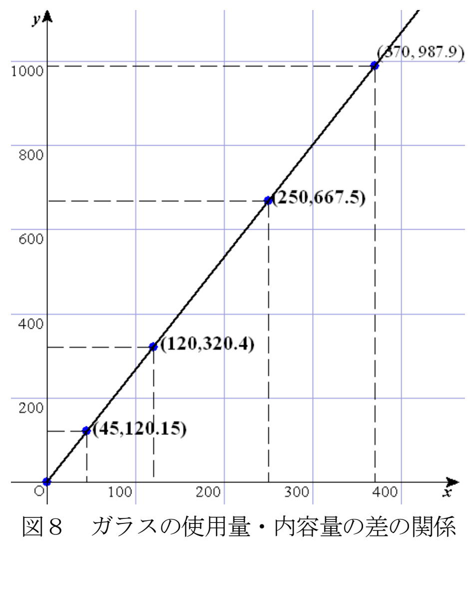


図８　ガラスの使用量・内容量の差の関係

表２　ガラス使用量・内容量の差に着目

	ガラス使用量の差	内容量の差
C_R と C_0 より	|370－250|=120	|205－250|=45
ガラス無と C_R より	|0－370|=370	|343.75－250|=138.75
ガラス無と C_0 より	|0－250|=250	|343.75－250|=93.75
ガラス無とガラスのみ より	|0－916.66|=916.66	|343.75－0|=343.75
C_R とガラスのみ より	|370－916.66|=546.66	|205－0|=205
C_0 とガラスのみ より	|250－916.66|=666.66	|250－0|=250

5.3. 中学３年「二次関数」

ここでは，円柱近似の場合を考える。円柱近似を行うことで，積み重ねを考えることが容易となる。この特徴により，積分の素地となるため，中学校３年次での学習から高校数学へのスパイラル型学習の可能性を示すことができる。

本稿では，次のような円柱を定める。円柱の高さは，コーラ瓶の高さである 19.0cm とし，直径を 4.8cm とする。ここから，「側面のガラスの厚みを変化させたとき，どのくらいの量のコーラが入ると予想できるか」という問題を設定する。コーラ瓶に記載されている情報や，中学１年，２年の学習で得られた既習事項から，瓶内部の体積は $205\mathrm{cm}^3$ であることがわかる。よって，$19\pi r^2 = 205$ と表すことができ，内部の半径 r_{C_R} の大きさを $r_{C\_R} \fallingdotseq 1.85$ と求めることができる。同様に，コーラ Zero 瓶の内部の半径 r_{c_0} の大きさを $r_{C\_0} \fallingdotseq 2.05$ と求めることができる。

ここで，上記の関係式は，半径 r の値が定まれば体積が一意に定まるという関数関係を表している。変数 r が二次であることから二次関数であると判断できる。また，問題文から r の定義域は，$0 \leq r < 2.4$ であることがわかり，これを用いることで，表３を得ることができる。

表３　半径 (r) と内容量 (V)

r	0	1.85	2.05	2.4
V	0	204.19	250.72	343.64

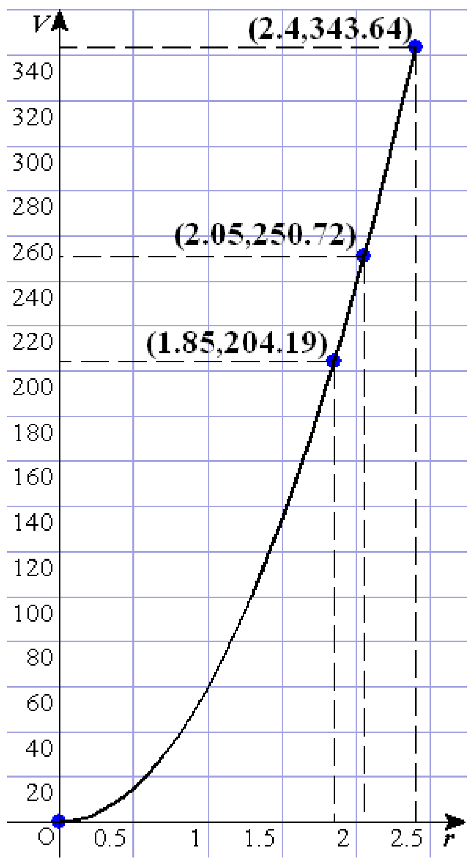


図９　半径(r)と内容量(V)の関係

また，これをグラフ化すると，図９のように表現される。ここで得られた結果，ガラスの厚みが 0 であれば 343.64 mL のコーラが入ることが予想される。これは，上記の中１，２で示した結果とほぼ一致する。ここでの要点は，瓶を離れ，円柱を思考対象としたことである。このようなアプローチにより，高さ・幅のどちらかを固定することで様々な場合を考察することができる。しかし，このようなアプローチをとった場合，最後にしっかり元の問題へ戻らなければ

ばならない。

これを数学的モデリングの視点からすれば，コーラ瓶を円柱近似することは，現実問題を数学の世界で解釈し,表現･処理し，解を得る操作である。さらに，この結果が中１，２学年の結果と照らし合わせ，解の妥当性を考える活動を行えば，数学的結果を現実解釈へ解釈化・現実化を行うことが可能となる。

さらに，これは高校数学の回転体や，積分へとつながる。つまり，中１数学から高校数学へのスパイラルの一部となり得るといえる。

5.4. TDS の視点から想定される学習

これまで，２種類のコーラ瓶という素材を教材化し，授業デザインを示した。そこで，この教材を授業に用いることでいかなる生徒の学習が生じ得るか検討を行う。分析の視点は,TDS の視点を用い,本稿では,主に，生徒と milieu の相互作用に焦点を当てる。つまり，生徒がどのような action を milieu に対し行い，milieu からいかなる feedback が生じるかを明らかにするということである。

主な生徒の活動は，コーラ瓶を milieu と捉え，これとの相互作用となる（図 10）。

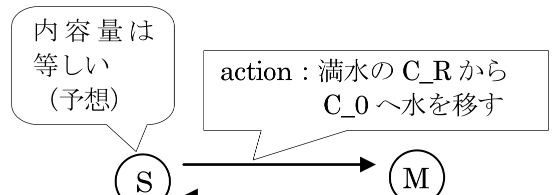


図 10　具体的な相互作用

milieu に対する主な action は，コーラ瓶に水を入れる，重さを量るである。水を入れた場合，コーラ瓶の差異から水位差が生じるという information が milieu から返される。生徒は，外見は合同であるが，水位差が生じたことにより，この水位差は如何に生じたかを明らかにしようとする活動が想定される。即ち，milieu からの information が，生徒に対する feedback となると考えられる。これは，生徒の想定した結果と異なる結果が milieu から返されたためである。

一方，瓶の重さを量る活動や，瓶の半径からコーラ瓶のガラスの厚さを求める活動が生じる。前者では，瓶の重さを幾つかの場合に分けて考えることが想定される。例えば，空の瓶と満水の瓶の違いに着目する場合。後者では，瓶を円柱近似により，瓶の半径と内容量の関係に着目する。このとき，生徒の妥当性判断は，実測のデータに委ねられると考えられる。つまり，亜教授学的状況において，生徒が milieu と相互作用を行うと想定される。

最後に

本研究は，継続的に多くの実践や検討を行っていく予定である。本稿はその第一稿であり,二つの理論枠組みの概要を示した。今後はさらに精緻化を図っていく。また，本稿で提案した理論枠組みを基に，2012 年夏季に下平教諭の協力のもと授業実践を計画していく。授業に関する内容や詳細は，本年8月に福岡で開催される第94回日本数学教育学会全国大会にて報告する予定である。今後は，さらに研究を進め，理論枠組みを用いて授業の分析を行い，分析結果を本年 11 月に奈良教育大学で開催予定の第 45 回日本数学教育学会論文発表会において報告を予定している。また，スパイラル型学習をテーマに据えているため複数回にわたる授業・検討を計画している。授業の実施に際しては，カシオ社製のグラフ関数電卓 (fx-9860G) を積極的に活用していく。これは，現実事象のデータは，必ずしも自然数で示されるものではないため，生徒の活動において，数学の世界で現実事象を近

似し，妥当性判断する能力を培う際にも有効となる。

最後に，本研究報告は，大学の枠を超えた研究チームによる報告である。本稿を上越教育学研究誌への投稿を認めて頂いた諸先生方のご好意に感謝いたします。また，この報告が今後，数学教育の研究を進めていく数学教室所属の後輩に対する研究の刺激となることを期待する。

引用・参考文献

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 － 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1999). *Lectures on the Theory of Didactic Situations*.
[http://annasierpinska.wkrib.com/index.php?page=lecture_notes]. Last Access : 17/Feb/2012.

J.S.ブルーナー（著），鈴木祥蔵・佐藤三郎（訳） (1984).『教育の過程』, 岩波書店.

J.S.ブルーナー（著），田浦武雄・水越敏行（共訳） (1967).『教授理論の建設』，黎明書房.

淡川直樹 (2008).「新しい学習指導要領に求められる教材の研究～スパイラル教材を定義して～」，日本数学教育学会　第41回数学教育論文発表会論文集, 885-886.

池田敏和 (2004).「数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てた指導目標の系列と授業構成に関する研究」, 日本数学教育学会誌　臨時増刊，数学教育学論究81・82，3-32.

池田敏和・浜泰一 (1992).「高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究」, 日本数学教育学会誌 74(7), 238-246.

影山和也 (2008).「教室で作り上げられる数学的知識についてー教授学的状況に応じた生徒の意識性と知識の価値ー」, 日本数学教育学会　第 41 回数学教育論文発表会論文集，405-410.

佐々木元太郎 (1974).「教材のスパイラル方式による提示に関する実験的な一つの考察ーベクトルの指導を通してー」, 日本数学教育学会誌 56(7)，133-140.

下平将揮 (2010a).「グラフ電卓を用いた資料の活用における単元設計の基礎的理論」，上越数学教育研究　25，87-102.

下平将揮 (2010b).「資料の活用単元におけるグラフ電卓を使用した数学的モデリング過程」，日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会論文集，247-252.

下平将揮 (2011).「資料の活用単元におけるグラフ電卓を使用した中学生の数学的モデリングに関する考察」,『上越教育大学大学院修士論文』.

杉野裕子 (2008).「回転量に関する学習のスパイラルを考慮したカリキュラムの提案ー角度および図形の概念イメージを豊かにするためにー」，日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会論文集，417-422.

西村圭一 (2001).「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」, 日本数学教育学会誌 83(11)，2-12.

西村圭一 (2003).「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践ー紙パックジュースを題材にー」, 日本数学教育学会誌 85(11)，31-39.

西村圭一 (2006).「数学的リテラシーを育成するための教材の開発－PISA 数学調査をふまえてー」，日本数学教育学会誌 88(5)，26-32.

日本数学教育学会（編） (2010).『数学教育学研究ハンドブック』，藤原印刷.

広岡亮蔵 (1972) 『ブルーナー研究』，横山印刷.

文部科学省 (2008).『小学校学習指導要領解説　算数編』，東洋館出版.

文部科学省 (2008).『中学校学習指導要領

解説　数学編』，教育出版.

福本稔 (2008).「中学校数学における「必要性と意味」の教授・学習に関する考察－Brousseau の委譲の概念に基づく検討－」，日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会論文集，63-68.

湊三郎 (1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」, 筑波数学教育研究 2，117-125.

宮川健 (2009/2011). フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，Vol. 94，37-68.

森川幾太郎 (2006).「スパイラル型学習を重視した編成を望む」, 日本数学教育学会誌 88(2)，52-53.

渡邊公夫 (2010).「数学的活動に相応しい教材づくり」，日本数学教育学会　第 92 回全国算数・数学教育研究（新潟）大会報告，51-52.