上越数学教育研究，第28号，上越教育大学数学教室，2013年，pp.13-20.

「てこの原理」の教材化とその発展性

ー理科の実験教材から算数の思考教材へ，難しい数式は要らないー

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

1．はじめに

「てこの原理」は，現在，小学校６年の理科の実験教材として扱われている。算数・数学の教材として扱われることは少ない。それは，数学の教材とするにはモーメントなどの高度な概念が必要だと考えられているからであろう。ところが，「てこの原理」は古代ギリシャのアルキメデスによって発見された。それは，高度な理屈に汚染され情報の氾濫した社会にある現代人の頭では到底想像し難い，実に素朴で身近な感覚や考え方によって見出されたはずである。

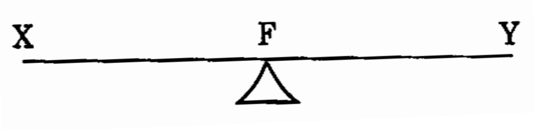
アルキメデスに学び，「てこの原理」の素朴な説明を見出した。本稿において，この説明を提示し，算数の思考教材として導入できることと，その後の算数・数学の教材としての発展性を示した。

小学校 6 年の理科の教科書では，「てこの原理」の単元で，実験結果から「てこを傾ける働き」を「(おもりの重さ) × (支点からの距離)」という積とし，その値が等しいとき釣り合う，と説明している。「力のモーメント」という言葉は出さないものの，異種の量の積である「力のモーメント」を教えていることになる。「力のモーメント」は目には見えないものであり，図に表現することも難しい。このような扱いで「てこの原理」を算数の教材にすることはできない。そこで，「力のモーメント」を使わずに「てこの原理」を説明することを模索した。アルキメデスの著作『平面板の平衡について』(Heath,T.L.,1912) 等に学び，「てこの原理」の素朴な説明を見出した。その説明を次に提示する。

2．「てこの原理」の素朴な説明

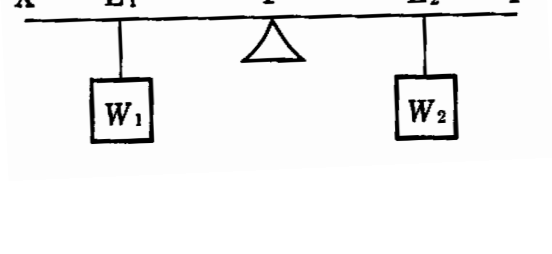
(1) 天秤での重さの釣り合い

次の図のような天秤があるとする。



Fは，天秤の固定された（動かない）点である。Fを天秤の「支点」という。XYはFで支えられたそれ自身は重さのない直線である。XYを「天秤の横木」という。XYは，Fより右側だけに重さをかけるとFを中心にして必ず右に傾き（回転を始め)，Fより左側だけに重さをかけるとFを中心にして必ず左に傾く（回転を始める)。もちろん，点Fに重さをかけても傾かない（動かない)。

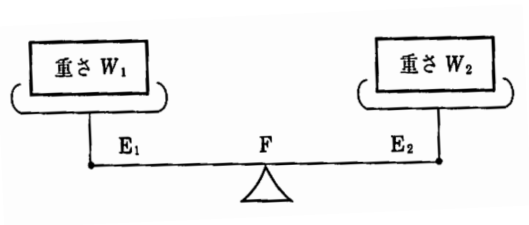
そして，XYは，Fを中心にして傾くことはあるが，それ自身は決して曲がらない。



この図のように，二つの重さ W_1，W_2 があり，これらが XY 上の２点 E_1,E_2 にそれぞれ吊られたとする。$W_1=W_2$，$E_1F=FE_2$ のとき，天秤の横木 XY はどちらに傾くか？この答えは，数学からは結論できない。私たちの共通の経験からは，この場合はどちらにも傾かない，ということを当り前のこととしてよい。このように，天秤の横木がどちらにも傾かない状態を，その二つの重さがその天秤で支点 F に関して「釣り合う」という。そして，アルキメデスは，次のことを公理としている。

【公理１】(天秤での重さの釣り合いの公理)
等しい重さは，（支点からの）距離が等しいとき，釣り合う。

前の図について正確に言うと，この場合，E_1E_2 を天秤の横木，F を支点とする天秤において，W_1 が点 E_1 に W_2 が点 E_2 に置かれたとき，W_1 と W_2 は釣り合う。このような釣り合いの関係を記号化して，次のように表すことにする（下図)。



(2)　図形の重さの考え方と重心の定義

図形の重さを次のように考える。

【仮定２】(図形の重さの考え)
・線分は，その長さに比例した重さを持つ。
・平面図形は，その面積に比例した重さを持つ。
・立体は，その体積に比例した重さを持つ。

そしてここでは，これらの図形はそれぞれに，どこも一様（重さに関して均質）なものと考えている。

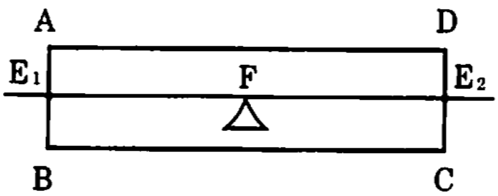
この考えのもとに，図形の重心を次のように定義する。

【定義３】(図形の重心の定義)
図形をある１点で支えると釣り合う（水平に静止した状態で支えられる）とき，その点をその図形の「重心」という。

図形を吊るす場合で言えば，図形の「重心」は，図形をその上のいろいろな点から吊るしたときのそれらの吊るす点を通る垂直線の交点である。

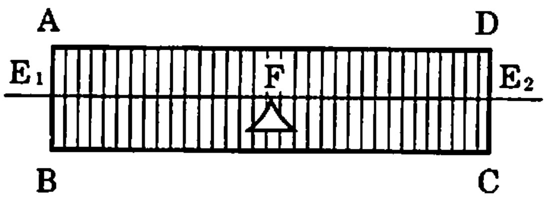
そうすると，点対称図形に関しては，その重心の位置が直ちに求められる。点対称図形の重心は，すなわちその対称の中心である。

(3)　天秤での図形の釣り合い



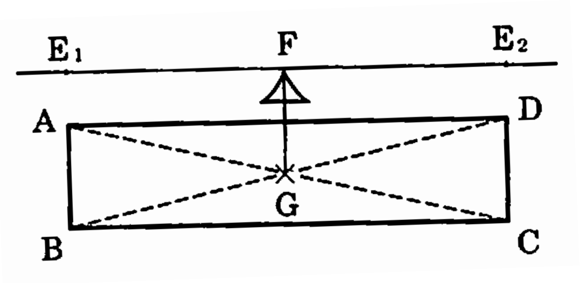
この図のように，長方形 ABCD が，F を支点とする天秤の横木 E_1E_2 の上に，E_1 ，E_2 がそれぞれ AB，DC の中点となる位置にそのまま置かれたとする。

長方形ABCD内で，E_1E_2 に垂直な線分は，天秤の横木（線分）E_1E_2 にある全ての点の数に相当する分だけ，在ると考えることができる。（下図）

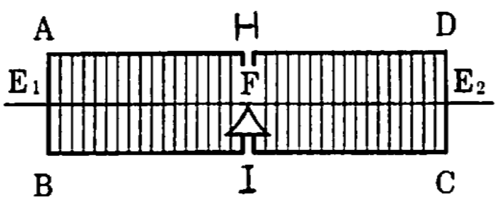


そして，それらの線分のうちFに関して対称な線分の組全てが釣り合っているから，長方形全体（長方形内の全ての線分）もそのままの位置でFに関して釣り合う。

次に，この長方形ABCDをその重心G（ACとBDの交点）でちょうどその上の天秤の横木上の点Fから吊るすと，この全体としての図形の釣り合いの関係は，支点及び重心の定義から，全く崩れない（保たれる）ことが言える。長方形ABCDの重さが，１点G（またはF）に集中しているとみてよい。（下図）

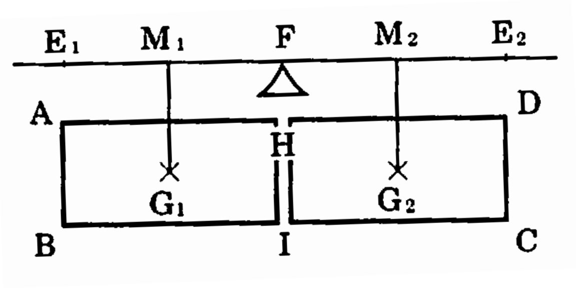


先の，長方形ABCDが天秤の横木の上にそのまま置かれている場合で考え，Fを通るE_1E_2に垂直な線分HIで長方形ABCDを二つに分けたとしよう。（下図）



この場合も，長方形ABCD内のE_1E_2に垂直な線分のFに関して対称な組同志の釣り合いの関係は崩れないから，長方形ABIHと長方形DCIHとは図のそのままの位置でFに関して釣り合う。

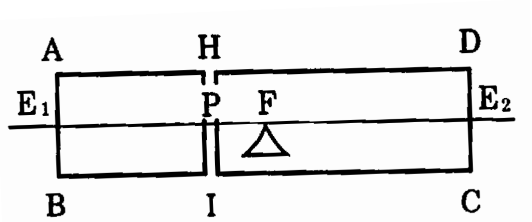
今度は，長方形ABIHをその重心G_1でちょうどその上の横木上の点M,（E_1Fの中点）から吊るし，長方形DCIHをその重心G_2でちょうどその上の横木上の点M_2（E_2Fの中点）から吊るしたとしても，天秤での重さの釣り合いの公理と重心の定義から，全体の釣り合いの関係は崩れない。（下図）



長方形ABIHの重さが１点G_1（またはM_1）に，長方形DCIHの重さが１点GR_2（またはM_2）に集中したものと考えてよい。

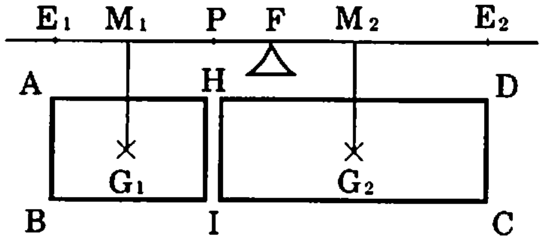
長方形ABCDが天秤の横木の上にそのまま置かれている場合で，もっと一般的に考えてみる。

横木E_1E_2上の任意の点Pを通るE_1E_2に垂直な線分H_1で,長方形ABCDを二つに分けたとする。（下図）



長方形ABCD内のE_1E_2に垂直な線分のFに関して対称な組同志の釣り合いの関係は崩れないから，長方形ABIHと長方形DCIHとは図のそのままの位置でFに関して釣り合う。

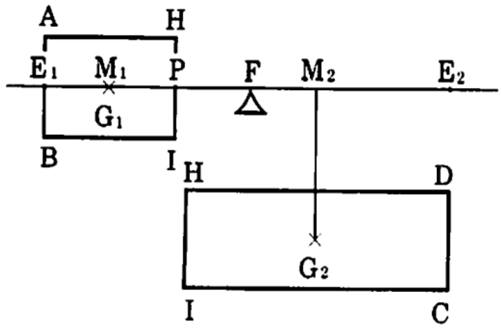
そこで今度は，長方形ABIHをその重心G_1でちょうどその上の横木上の点M_1（E_1Pの中点）から吊るし，長方形DCIHをその重心G_2でちょうどその上の横木上の点M_2（E_2Pの中点）から吊るしたとしたら，どうか？（次の図）

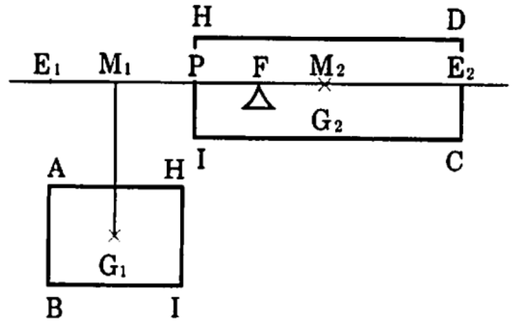


私たちの経験からは，釣り合いの関係は保たれる，とするのが自然である。そこで次のことを公理とする。

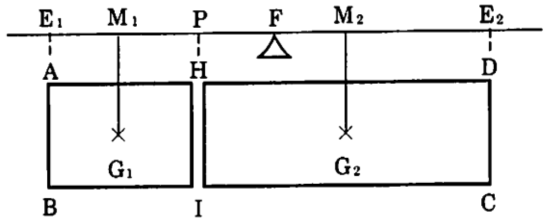
【公理４】（天秤での図形の釣り合いの公理）
図形（重さに関して均質）が天秤の横木の上にそのまま置かれた状態で天秤に釣り合いの関係があるとき，その図形をその重心の位置で吊るしても，釣り合いの関係は保たれる。

この公理から，次の二つの図のような場合についても，最初釣り合いの関係があれば，その釣り合いは保たれることになる。

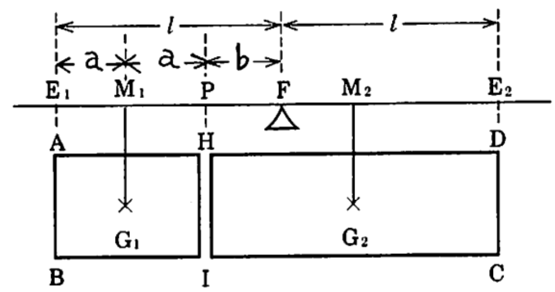




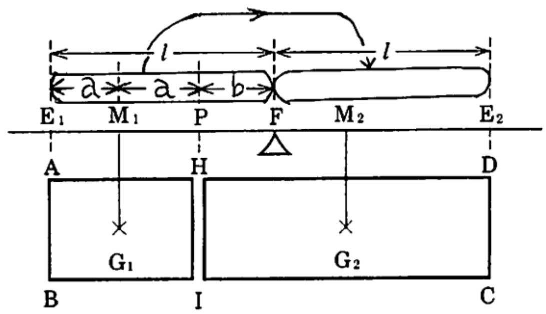
先の釣り合いの場合のうち，二つの長方形それぞれがそれぞれの重心の位置で吊るされている下図で考えよう。



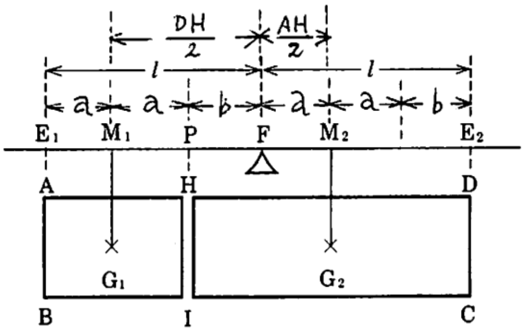
$E_1F=E_2F=l$，$E_1M_1=M_1P=a$，$PF=b$ とすると，次のような図になる。



下図のように，横木 E_1F $|\leftarrow a \rightarrow|\leftarrow a \rightarrow|\leftarrow b \rightarrow|$ の部分を，横木右側 FE_2 にはめ込む。



そうすると，下図のようになる。



ここで，左のうでの長さ M_1F は a+b，すなわち $PM_2 = M_2E_2 = \dfrac{DH}{2}$ に等しい。また，右のうでの長さ M_2F は a，すなわち $E_1M_1 = M_1P = \dfrac{AH}{2}$ に等しい。

だから，次のようになる。

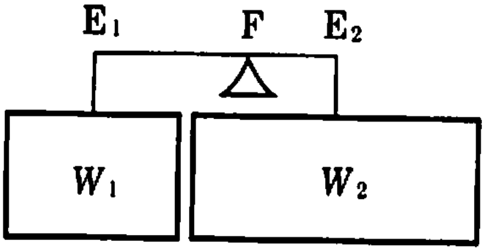
$$
\begin{aligned}
M_1F : M_2F &= \frac{DH}{2} : \frac{AH}{2} \\
&= DH : AH \\
&= DH \cdot HI : AH \cdot HI
\end{aligned}
$$

$= \boxed{\text{長方形 DCIH の面積}} : \boxed{\text{長方形 ABIH の面積}}$

逆に，この式が成り立てば，長方形 DCIH と長方形 ABIH とは図のような位置となり，天秤での図形の釣り合いの公理から，二つの長方形は図のように F に関して釣り合う。

この長方形の面積を重さと考え，上の二つの長方形の釣り合いの関係を，（平面図形に限らない）重さの関係として適用すると，次の定理が得られる。

【定理５】(釣り合いの定理)



（上図のように,）重さ W_1 が E_1 に重さ W_1 が E_2 にかけられているとき，その二つの重さが F に関して釣り合うならば, 次の関係式が成り立つ。

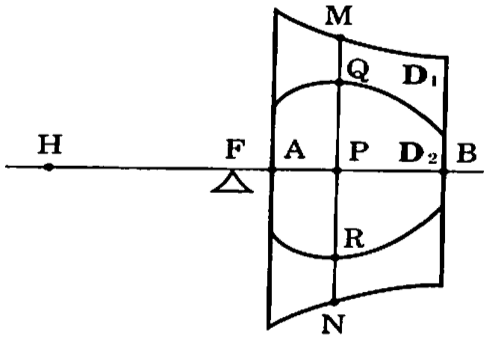
$$\boxed{E_1F : E_2F = W_2 : W_1.}$$

逆に，上の関係式が成り立てば，E_1 における重さ W_1 と E_2 における重さ W_2 は F に関して釣り合う。

ここで,重さ W_1 と W_2 は，線分の長さ同志,面積同志,体積同志のいずれの場合でもよい。

これが,「てこの原理」に対応するものである。だだ，ここではもちろん「力のモーメント」や動かすなどのことは考えられていないのであって，飽くまで静力学における「釣り合いの定理」である。この定理がもとになって，アルキメデスの静力学的な考え方による求積法へと発展する。その発展を次に述べる。

３．アルキメデスの静力学的方法への発展



この図のように，A，B でそれぞれ AB に垂直な線分を左右の境界とする二つの図形 D_1，D_2 がある。AB 間の任意の点を P とし，P から AB に垂線を引き，図形 D_1 との交点を Q, R, 図形 D_2 との交点を M, N とする。そして，図形 D_1，D_2 の間に次の関係があるとする。

$$k(\text{一定}) : FP = MN : QR$$

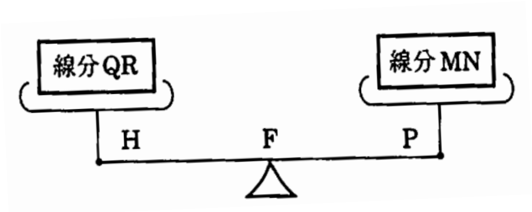
天秤の横木の上で HF＝k となるように F に関して AB と反対側に点 H をとると, 上の関係式は，次のようになる。

$$HF : FP = MN : QR$$

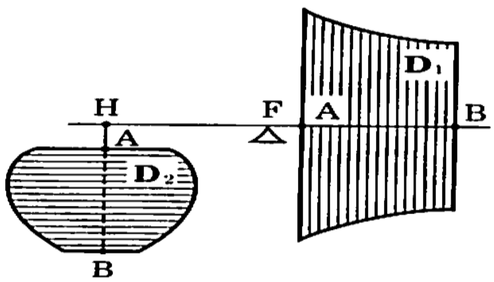
この関係式は，釣り合いの定理によると，次のような関係を表している。つまり，

「線分 QR が点 H の位置に置かれ，線分 MN が点 P の位置に置かれるとき，これらは F に関して釣り合う。」

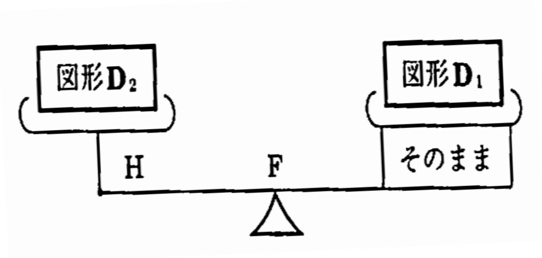
この関係を記号化して次のようにしておく。



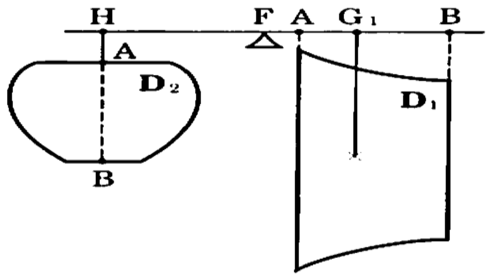
ここで， D_1 内の AB に垂直な線分（MN）と D_2 内の AB に垂直な線分(QR)はどちらも，AB 上にある点の数に対応する分だけ引くことができ，それら二つの線分の組全てについて上の釣り合いの関係は成り立っている。だから，AB 上にある点の数に対応する分の線分 MN の全て，すなわち図形 D_1 が図の現にあるそのままの位置に置かれ，また，AB 上の点の数に対応する分の線分 QR の全て（の重さ）が点 H に集中された（または，図形 D が点 H で吊り下げられた）とき，図形 D_1 と D_2 とは F に関して釣り合う。次の図のような釣り合いの関係となる。



この関係を記号化して，下図のように表すことにする。



そして，D_1 の重心（天秤の横木上の対応する点）を G_1 とすると，図形の釣り合いの公理より，D_1 を G_1 において吊り下げたとしても，全体の釣り合いは保たれることになる。次の図のような釣り合いの関係となる。

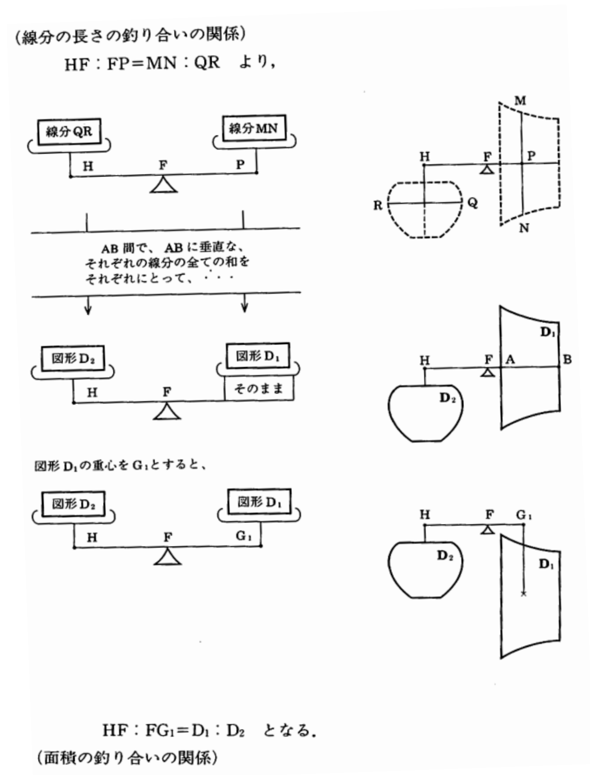


この関係を式で表すと，【定理５】により，次のようになる。

$$HF : FG_1 = D_1 : D_2 \ .$$

そして，上記のような考えの流れを次に示す【方法６】のようにモデル化して，これを「アルキメデスの静力学的方法」と呼ぶことにする。

【方法６】（アルキメデスの静力学的方法）



この最終の関係式は，次のようなところに適用できる。D_1 の重心 G_1 の位置が既知であれば，HF : FG_1 から D_1 と D_2 の面積の比を求めることができる。逆に，D_1 と D_2 の面横の比が既知であれば，D_1 の重心 G_1 の位置を求めることができる。

このアルキメデスの静力学的方法は，（面積の釣り合いの関係）から（体積の釣り合いの関係）へと至る場合の過程についても同様に適用ができ，また同様な記述ができる。

この「アルキメデスの静力学的方法」の適用は，アルキメデス著『方法』（“The Method”）（Heath,T. L. ,1912）にみることができる。それには 15 個の命題が含まれている。その全てに対して，本稿で提示した素朴な説明を行い，拙著『アルキメデスの数学』（伊達，1993）に載せているところである。対象としている図形は，平面図形はパラボラ切片，空間図形では球，円錐，円柱，円錐曲線の回転体などである。これらを，学校数学の教材へと開発できる可能性は大きい。

４．学校数学教材への発展

本稿で提示した素朴な説明は，（小学校 6 年）理科の実験教材として「てこの原理」を学習し，（小学校 6 年）算数で「比」について学習した後に可能となる。「てこの原理」を算数・数学の教材に導入するためには，さらに，長さや面積・体積を重さと同じ「量（外延量）」とみる見方が必要となるが，この見方は小学校低学年から「量と測定」の領域において継続的に養われていることであるので問題ないであろう。

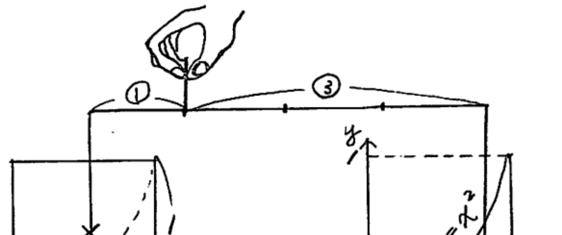
学校数学教材への発展として考えられるところを次にいくつか挙げておきたい。

「アルキメデスの静力学的方法」の適用が効果的なのは，中学校 1 年の図形領域における学習内容である，球，円錐，円柱の求積である。また，放物線と直線で囲まれた部分の面積・球の体積や円錐曲線の回転体の体積などの求積への適用は，高等学校「数学Ⅱ」・「数学Ⅲ」の「積分」や「2 次曲線」のところで考えられる。

「てこの原理」は求積だけではなく，求積の結果の検証にも使えるものである。図画工作でつくるモビールなどは，算数・数学の実験的教材となる。三角形や平行四辺形などにおいてよく等積変形を行うが，それによってできた図形同士の関係をみるのに，図形（型紙）をモビールで釣り合わせ「てこの原理」を適用する方法も考えられる。例えば，高等学校「数学Ⅱ」の「積分」で次のような積分の計算を行う。

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

これを下図のように，「てこの原理」によって検証することができる。

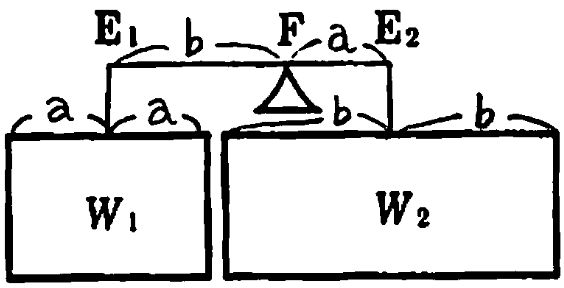


さらに，「てこの原理」は，小学校 6 年算数の「比例・反比例」の具体例となるものである。特に，「反比例」の少ない具体例の中でも，生徒が実際に目で見て確かめられる適切な具体例であると考えられる。また，高等学校「数学 A」の「平面図形」の重心の学習にも「てこの原理」は有効であろう。

まだまだ,「てこの原理」の算数・数学の教材としての発展は考えられそうである。

5．おわりに

ここでもう一度,【定理５】(釣り合いの定理) の図と比の関係式を眺めてみよう。



$E_1F : E_2F = W_2 : W_1.$

ａとｂの配列などをよくみていると，上の図の中に，下の比の関係式だけでは見ることのできなかった，隠されていた「てこの原理」のしくみが浮き出てみえてくるのがわかる。そして，上の図が下の比の関係式にイメージとして結び付く。

さらに,「てこの原理」を言葉で唱えてみよう。

「(図のように,）重さ W_1 が E_1 に重さ W_1 が E_2 にかけられているとき，その二つの重さが F に関して釣り合うならば, 次の関係式が成り立つ。

$E_1F : E_2F = W_2 : W_1.$

逆に，上の関係式が成り立てば, E_1 における重さ W_1 と E_2 における重さ W_2 は F に関して釣り合う。」

ここで，図表現と式表現，そして言葉による表現の 3 つがしっくりと結びつき,「てこの原理」のイメージはかなり豊かなものに変わったのではないだろうか。

このように,「てこの原理」を算数教材として導入できれば, その導入は, その後の算数・数学の学習において，子どもたちの眺めていく図形領域の景色を豊かに変貌させていく大きなきっかけになる可能性を秘めている，と言えよう。

これから，いろいろな方面での実践・工夫に期待したい。本稿が,「てこの原理」の算数・数学教材への導入の一役を担えたなら幸いである。

［引用・参考文献］

Heath, T. L. (1912), *The Works of Archimedes with A Supplement "The Method of Archimedes"*, Dober Publication, Inc., New York.

Schiffer, M. M. (1984) , *The Role of Mathematics in Science*, The Mathematics Association of America (MAA).

伊達文治(1990),「アルキメデスの静力学的な考え方とその方法ーその教材化を志向してー」, 日本数学教育学会第 23 回数学教育論文発表会論文集, pp. 339-344.

伊達文治(1993),『アルキメデスの数学ー静力学的な考え方による求積法ー』,森北出版.

文部科学省(2008), 小学校学習指導要領解説算数編.

文部科学省(2008), 中学校学習指導要領解説数学編.

文部科学省(2009), 高等学校学習指導要領解説数学編.