上越数学教育研究，第28号，上越教育大学数学教室，2013年，pp.141-150.

秀でた子どもの問題解決過程の分析

ー　図形把握に焦点を当てて　ー

塚田朋美
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

1.1 本研究の動機

筆者はこれまで発想力が豊かな子どもや，算数・数学のものごとの捉え方が多様な子どもを幾度か目にしてきた．そういった子どもは，ものごとの本質を捉えるのが上手で，その本質を用いて自ら問題を作り出してしまうような子どもであった．そこで抱いた素朴な疑問は，そのような子どもの豊かな発想力はいかに生み出されているのだろうか，というものであった．それは先天的なものなのだろうか，それとも後天的なものなのだろうか．筆者は，教育に関わる者として，後者であると信じているが，その回答は明らかではない．そこで筆者は，秀でた子どもの発想力や算数・数学の思考過程，ものごとの捉え方，そしてそれらの起源などについてより深く研究することにした．こうした秀でた子どもの特性を知ることにより，秀でた子どもの育成の方法，数学が苦手な子どもを数学好きに育成する方法などについて示唆が得られると期待する．

1.2 秀でた子どもについての先行研究

本研究を進めるにあたって，まず，秀でた子どもに関する国内外の先行研究を調べた．その結果，日本における秀でた子どもに関する研究は数少なかった．また，その数少ない先行研究の多くは秀でた生徒の育成の方法や，カリキュラムを問題とするものであり，秀でた子どもの発想力や考え方の解明に焦点を当てているものは見当たらなかった．例えば，志水廣ほか（1994）は，一斉授業の中で進んでいる子どもが持て余した時間を有効利用する教材を開発している．田村（2012）は，日本の数学才能教育のあり方について検討している．礒田ほか（2006）は，数学オリンピック上位国と我が国との数学に秀でた生徒の育成方略に関する比較研究を進めていた．

一方，海外においては，秀でた子どもについての研究は少なくなかった．実際，数学教育についての世界最大の国際会議である ICME では，秀でた子どもの数学教育研究についての TSG（Topic Study Group）がある．このことは，数学教育研究の一分野と認知されている証拠であろう．さらに，秀でた子どもの国際会議（MCG）[1]も開催されている．こうしたところでは，秀でた子どもについての様々な研究が進められているようである．

では，海外ではいかなる研究が進められているのであろうか．ICME 11 の際に秀でた子どもの TSG が今日の研究課題を５項目に整理している（Leikin, 2008）．それを以下に示そう．

① 数学上の才能，創造性がある生徒は，知的な潜在能力を発揮するため，実際に指導されるべきなのか．
② 数学的に秀でた子どもとは誰のことか．どのように学習するのか．我々が彼らの認識，モチベーション，自尊心，社会的スキル，感情的知性について何を知っているのか．
③ 数学的創造性とはなにか．数学的に創造的な人はどんな人か．

[1] 以下の International Group for Mathematical Creativity and Giftedness (MCG) のウェブサイトを参照 http://www.igmcg.org/.

④ 数学的創造性と秀でた子どもは互いにいかに関係しているのか.
⑤ 数学教師は，数学上秀でた生徒を教えるために，いかに養成されるべきか.

これらの研究課題を概観すると，「秀でた子ども」と「創造性」がキーワードとなっていることが分かる．しかしながら，その両者とも明確に定義されているわけではなく，それら自体がいかなるものかを知ることが研究課題となっている．さらに，秀でた子どもと創造性の相互関係，秀でた子どもや創造性の指導，育成などが研究課題となっていることが窺われる．

筆者は，秀でた子どもの思考過程や問題解決過程など，子どもを知ることに関心がある．したがって，筆者の関心は，このリストでは秀でた子ども自体を研究の対象とする②に関する研究に当てはまるだろう．一方，秀でた子ども自体の研究については，Sriraman & Lee (2010) が，秀でた子どもの研究についての書籍(Leikin et al., 2009) のレビューの中で，これまでの先行研究をまとめている．それによると，これまでは心理学的なアプローチが大部分を占めていたようである．例えば，ポリアの問題解決プロセスを基にした思考過程の研究や，ゲシタルト心理学にもとづいたひらめきに関する研究などが採り上げられていた．こうした中で，筆者は，心理学ではなく数学教育学の範疇で，つまり数学における知識や技能の特殊性を考慮した上で，秀でた子どもの思考過程や問題解決過程を明らかにする研究を進めることとした.

２． 研究の目的と方法

2.1 研究の目的

本研究は，数学的知識や技能の側面から，秀でた子どもの思考過程，特に問題解決の過程がいかなるものかを明らかにすることを目的とする.

2.2　研究の方法

TSG グループの研究課題で述べたように「秀でた子ども」の定義づけは難しい．そのため，本研究ではジュニア算数オリンピックの全国大会に出場した子どもたちを「秀でた子ども」とする．ジュニア算数オリンピックとは『思考力と独創性を競い合う大会』と謳っている大会であり，今回調査する子どもは，各都道府県の予選から勝ち進んだ者たちである.

その子どもたちがどういった数学的知識や技能をもっているのかを明らかにする．そのため，ジュニア算数オリンピックの全国大会でその子どもたちの解決過程をデータとして収集し，それを数学的側面から分析する．また，今回は図形領域に焦点を当てる．図形領域を選定した理由は，図形の問題を解く際に，問題解決の見方が多様であるということ，直観を必要とする要素が多いということからである．分析にあたっては，この直観がいかなるものか知るツールとして，数学教育学の理論の一つである Duval (1995) の図形把握の枠組みを用いることにした．この図形把握の視点から，秀でた子どもたちはいかなる数学的知識や技能をもっているのかを明らかにする.

本稿の構成は以下のとおりである．まず分析の準備としてデータの概要と Duval の図形把握の枠組みを示す (第 3 章)．そして，今回選択したジュニア算数オリンピックの問題ではいかなる解決過程が可能であり，その過程ではいかなる図形把握が必要となるかといった問題の性格を明らかにする (第 4 章)．この分析結果は，実際のデータにおいて子どもの解決過程を特徴づける枠組みともなる．そして，実際のデータを分析することにより秀でた子どもたちがいかなる問題解決を行い，いかなる図形把握ができ，またできなかったかを明らかにする (第 5 章).

３． 分析の準備

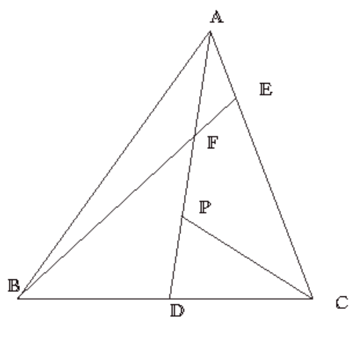
3.1 データの概要

今回使用するデータは，2012 年 6 月 30 日に行われたジュニア算数オリンピックの全国大会で収集したものである．この大会の対象は基本的に小学 5 年生となっているが，小学 4 年生以下でも参加は可能である．実際，この級の全国大会に参加した児童 226 名のうち小学 5 年生は 188 名，小学 4 年生は 38 名であった．データとして収集したものには 2 種類あり，配布された問題用紙と,

児童の解決過程をビデオ撮影したものである．ビデオカメラは，２台あり，１台で１人の児童を固定して撮影し，もう１台で複数の子どもたちの解決過程をそれぞれ撮影した．そのため２台目のカメラで撮影したビデオデータからは解決過程を詳細にすべて再現することはできない．しかし，最終的なものは多く撮影することができたため，その解答用紙や問題用紙に書き込まれた記述から解決過程がある程度特定できる．また，データには，それぞれの問題について複数の子どもの解答が撮影されている．

問題は，前半に４問，後半に３問と大問が７問あり，制限時間が前半，後半，それぞれ60分であった．今回のジュニア算数オリンピックの問題は，図形領域から２問，その他の領域から５問，出題されていた．先述のように，今回，分析するデータは，図形領域の１問に対する解決過程についてのものである．その問題を以下に示す．

【問題７】図でAD＝AC，BD＝DCです．いま，AD上にPD＋FD＝BFとなるような点Pをとります．角FAE＝24度，角BFD＝35度であるとき，角PCDの大きさを求め，考え方も書きなさい．



※ただし，図は正確とは限りません．

3.2 Duvalの図形把握

図形問題の解決過程・思考過程の分析ツールであるDuval (1995) の図形把握の枠組みの概要を示す．Duvalは４つの図形の把握の仕方を特定し，さらにその中の１つの把握には３つの方法があるとする．これらをDuval (1995) や原田 (2007) の記述を参考に，以下に示す．

① 知覚的把握：直観に基づく図形の把握であり，心理学の知覚法則に依存している．

② 系列的把握：構成順序に基づく図形の把握であり，とくに作図はこの図形把握によって実行される．

③ 推論的把握：仮説に基づく図形の把握であり，仮説－演繹的証明はこの図形把握によって実行される．

④ 操作的把握：図形の変形や移動に基づく図形の把握であり，幾何の問題解決における解法の発見は，この図形把握によって実行される．操作的把握には、与えられた図を修正する次の３つの方法がある。

（ｉ）部分的方法(The mereologic way)：与えられた図を様々な形の部分に分割することにより図形を把握する．この方法では図形の基本要素（直線，正方形など）はそのままであり，もとの図が物理的に修正されるわけではない．

（ⅱ）視点的方法(The optic way)：図形について視点を変更して見ることによる修正する．これには，伸ばしたり，傾けたり，拡大・縮小などといった修正が含まれる．

（ⅲ）位置的方法(The place way)：図形の位置や方向を変える図形の修正．これは位置を変えたり，回転，移動の修正が含まれる．

４．問題の解決過程の分析

本研究では，問題７の児童が行うと予想される複数の解決過程を，解決に至らない場合も含め特定した．その結果は図１のとおりである．以下では，主な４つの解決過程の概要を示すとともに，そこで必要となる図形把握を明らかにする．

4.1 Ａの問題解決過程とその分析

(1) Ａの問題解決過程

Ａの問題解決過程は，図１の「共通項目→Ａ１→Ａ２1→Ａ３→Ａ４」と「共通項目→Ａ１→Ａ２２→Ａ３→Ａ４」の２つの過程がある．前者は，算数オリンピック主催者側が模範解答として挙げた解決過程である[2]．以下では図１を参照しながらＡ２１と進む解決過程の概略を述べる．

まず，ＡやＢなどの解決過程に依らない共通に行うと予想される部分がある．それは，仮定と

[2] このことは，全国大会後に参加者に配布された解答集から分かる．

【起こりうる問題解決過程】

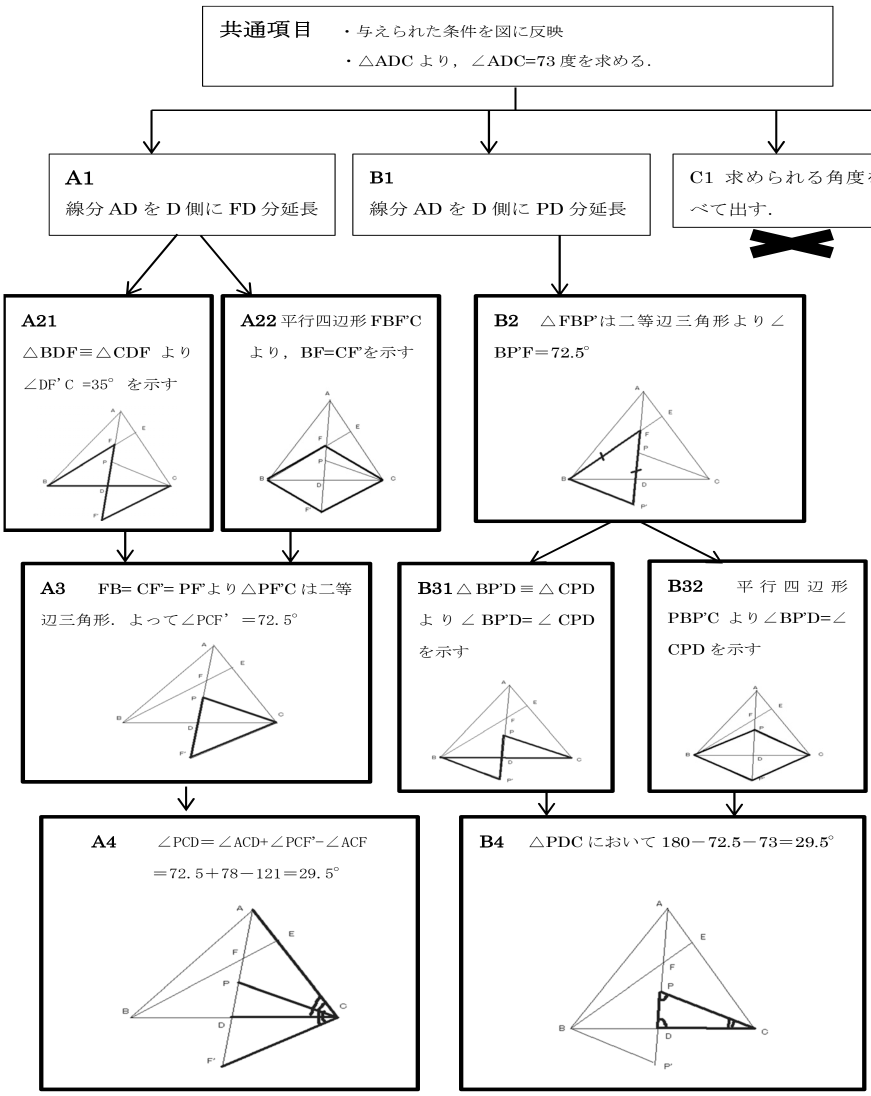


図１

して与えられた情報を用いて求めることができる角度を明らかにすることである．例えば，AD＝AC の仮定から二等辺三角形の性質を用いて∠ACD=78° (①)を求めることである．

次に，AD を D 側に FD 分だけ延長して図 2 のような△CDF'を描く(A１)．その△CDF' と △BDF が 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいため，合同であり，∠DFB＝ ∠DF'C =35° を示せる(A２１)．さらに，△F'PC は二等辺三角形であることから∠PCF' ＝ 72.5° (②)を得る(A３)．最後に，△AF'C に注目し∠ACF' ＝ 121° (③)を求め，①，②，③を用いて∠PCD を求める．∠PCD は∠ACD と∠PCF'を足すことで∠PCD が重複するため, 全体の∠ACF'を引くことで求めることができる．よって∠PCD ＝ 72.5＋78－121 ＝29.5° となる(A４).

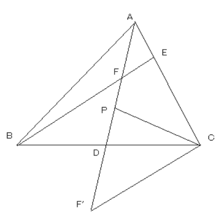


図２

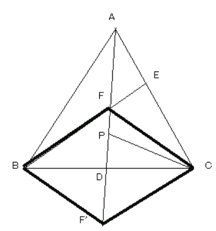


図３

(2) 図形把握の視点からAの分析.

ここではまず，操作的把握，推論的把握，知覚的把握の視点から，この問題解決の過程においていかなる図形把握が必要か検討する．なお，系列的把握は，主に作図の際に使われる把握方法のため今回は用いられていない．

① 操作的把握

Aの問題解決過程を経るためには，様々な操作的把握が必要となる．

まず，A１，A２１では，△DF’C と△BDF の２つの三角形に焦点を当てている．このように大きな図形の中から，ある部分に焦点を当てるという行為は認知的に図形を変形して捉える操作的把握（mereologic な方法）であり，こういった把握がこの段階では必要となる．

A３では，先ほど合同を示すために線分 FF'を FD,DF’で区切っていたのに対し，線分 PF'のみに焦点を当て直す．つまり一つの線分において，D で区切っていたものを P で区切り直さなければならない．これもまた，図形の部分を捉え直すといった操作的把握（mereologic）が必要となるところである．さらに，△PF'C に焦点を当て直す操作的把握（mereologic）がここでも行なわれている．また，この△PF'C は逆さまの二等辺三角形であるため，それ自体が二等辺三角形であることが捉えにくく，視覚的に傾けて図形を把握するといった optic な方法を用いた操作的把握も必要となるだろう．

最後に，A４では，角が混在しているため焦点を当てるべき３つの角に瞬時に切り替えて把握しなければならない．ここでも必要となる角を取り出すといった操作的把握（mereologic）が必要となってくる．

② 推論的把握

この問題を解決する過程で推論的把握は様々なところで必要になる．その把握の方法には大きく二つある．

一つは与えられた仮定から図上で図形の性質を把握するといった推論的把握である．例えば，問題の条件にある AD=AC をもとに図においてその２つの辺は等しいと判断する把握である．その際，通常では，印を付けるという行為が見られるであろう．

二つ目は，与えられた条件から特定の図形であることを把握し，さらに，その図形の性質を用いて様々な性質を把握するといった推論的把握である．例えば，先ほどの AD=AC を図上で把握したことで，△ADC が二等辺三角形であることを推論的に把握できる．さらに二等辺三角形であれば，２つの底角は等しいとも判断するであろう．ここでは，二等辺三角形の定義，定理を使ってこれらの図形性質を捉えるという推論的な把握が行なわれている．また，この解決過程で出てくる他の二等辺三角形でも同様の把握が必要とされる．これら以外にも，三角形の合同条件を使って２つの三角形が合同であると推論的に把握し，さらに合同であれば，対応する辺や角が等しいという推論的な把握も必要となる．

最後に，このA３では，FB= CF’と FB= PF’であることから PF’=CF’を得ている．これは，A=B かつ A=C ならば，B=C となる代数的な性質（推移律）をもとにした推論的把握である．

今回のA２１と進む問題解決過程は，以上のような定義や性質を用いた推論的把握が必要となり，この把握がきちんとなされなければ厳密には正しい解決に至ることはできない．無論，部分的には知覚的把握のみで解決を進め，正しい解答にたどり着くこともあろう．

③ 知覚的把握

今回の問題解決過程には，操作的把握や推論的把握が必要であると述べてきた．実際に，この二つの把握を用いれば問題解決に至ることはできる．しかしながら，人間が図形問題を解く際には，ある程度の視覚的な直観を用いて図形を捉える知覚的把握が必要となると考えられる．通常，はじめは図形の見た目に頼って思考することが多い．その後，なにか図形に性質がないかと推論的に把握を行うのではないだろうか．操作的に図形を把握する際も，その前段階には知覚的な把握があるだろう．例えば，２つの三角形が合同であると推論する前や，その２つの三角形に焦点をあてる把握は，図形の見た目から直観的に２つの図形が合同ではないかと判断をしている場合がある．そうした場合は，操作的に図形を把握しつつ，知

覚的にその図形の性質を捉えていると言えるだろう．

④ 複合的な図形把握

ここまでにとりあげてきた操作的把握，推論的把握，知覚的把握は必ずしも独立してそれぞれがなされている訳ではない．このことはDuval(1995)も指摘している点である．今回の場合であれば，△PF'C は，optic な方法で傾いた二等辺三角形を操作的に把握するとともに，辺の長さが等しいことから二等辺三角形であると推論的な把握を同時に行っている．このように一つの性質を把握するためには，多くの場合，複合的に把握がなされていると考える．

⑤ 図形把握の視点からの困難性

全体を通してＡ２１の過程は，様々な把握が必要となり複雑なものであった．

重なっている図形を視点を変えてみる操作的把握は，小学生にとって難しいことだろう．実際，中学生でもそれほど複雑な図形は扱われないのではないだろうか．また，Ａ1で線分を延長した際に，F'P＝BF と作った等しい長さにそのまま焦点を当てるのが自然だが，F'P＝BF に注目していると，始めに把握しなければならない二つの合同な三角形が見えてこない．このように延長したときの線分の把握はひとまず保留して，合同な三角形に焦点を移さなくてはいけない操作的把握は非常に難しいと考える．

一方，推論的把握では，三角形の合同条件など，基本的には中学校での学習内容であり，こうした内容を既習でない小学生は三角形の合同や，その性質を知覚的に把握するしかない．

（３）Ａ２２と進む問題解決過程とその分析

次に，Ａ２１の代わりにＡ２２と進む解決過程を示す．この解決過程はＡ１までと同様のプロセスを辿り，その後，図３のような四角形 CFBF’ を作る．この四角形は，対角線がそれぞれの中点で交わることから平行四辺形である．そして，平行四辺形の対辺が等しいことから BF=CF’ と示し，Ａ３へと進む．Ａ３以降はＡ２１の場合と同様の過程である．

図形把握の視点からＡ２２を分析すると，四角形 CFBF’の対角線がそれぞれの中点で交わる性質を用いた推論的な把握が必要となる．さらに，推論的把握が行なわれる前の四角形 CFBF’に注目する際には，全体から部分を切り取る操作的把握（mereologic）が必要となる．また，操作的に把握する前段階で，四角形 CFBF’が平行四辺形であると知覚的に把握する場合もあるだろう．

4.2 Ｂの問題解決過程とその分析

（１）Ｂの問題解決過程

Ｂの問題解決過程は，図１の「共通項目→Ｂ１→Ｂ２→<u>Ｂ３１</u>→Ｂ４」と「共通項目→Ｂ１→Ｂ２→<u>Ｂ３２</u>→Ｂ４」と進む解決過程がある．はじめに前者の解決過程を分析する．

まず，共通項目はＡの解決過程と同様であり，仮定から二等辺三角形の性質を用いて∠ACD=78°(①)であることを得る．

次に，AD をＤ側に PD 分だけ延長して図４のような△BDP’を描く(Ｂ１)．Ａの問題解決過程とは延長する線分の長さが異なる．次に，△FBP’が二等辺三角形であることから，∠FP’B＝72.5°(②)を得る(Ｂ２)．さらに，△BP’D と △CPD が２辺とその間の角がそれぞれ等しいことから合同であるため，∠DPC=∠DF’B=72.5° である(Ｂ３１)．最後に，△PDC に注目し①，②を用いて∠PCD を求める．∠PCD＝180－（72.5＋78）＝29.5°となる(Ｂ４)．

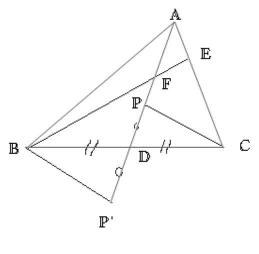


図４

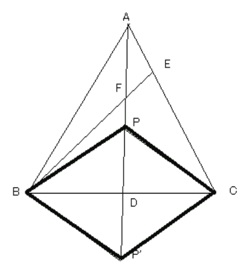


図５

（２）図形把握の視点からＢの分析．

①<u>操作的把握，推論的把握，知覚的把握</u>

Ｂの解決過程はＡの解決過程とほぼ同様であるが，順番として，始めに二等辺三角形となる△FBP’に焦点を当てた後に，２つの合同な三角形に焦点を当てる．そのため，はじめに，△FBP’の二等辺三角形の部分に焦点を当てる操作的把握（mereologic）や，FB=FP’から２辺は等しいことから，二等辺三角形の定義より△FBP’は二等辺三

角形であるという推論的把握が必要となる(Ｂ２)．次に，△BP’D と △CPD の２つの三角形に焦点を当て直す操作的把握（mereologic)，合同条件から２つの三角形が合同である推論的把握をする(Ｂ３１)．最後に，△PDC に注目し∠PCD を求めるが，その場合においても，△PDC という部分に焦点を当て直す操作的把握（mereologic）が必要となる(Ｂ４)．

Ｂの解決過程でも操作的把握，推論的把握，また，A で述べたような知覚的把握が必要となる．そして，それらの把握が複合的に用いられることが多いだろう．

② 図形把握の視点からのＢの困難性

A と同様，B においても重なっている図形を，視点を変えてみるという操作的把握が必要な部分がある．例えば，はじめは二等辺三角形である△FBP’に焦点を当てているが，次に△FBP’の中に含まれる△DBP’に焦点を当て直し，△DBP’と△DCP の２つの合同な三角形に注目しなければならない．こういった操作的把握は小学生にとって非常に困難ではないだろうか．また，ここに気付くためには，延長した線分 FP’を点 D で区切り直す操作的把握が必要となり，把握しにくいところである．

しかしながら，B の解決過程は，A と比べてみると，３つの重なり合う角度に焦点を当てる操作的把握や，推移律を用いる推論的把握といった操作がなく，A よりはハードルが低いのではないだろうか．

（３）Ｂ３２と進む問題解決過程とその分析

次に，Ｂ３１の代わりにＢ３２と進む解決過程を示す．この解決過程はＢ２までＢ３１と同様のプロセスを辿り，その後，図５のような四角形 CPBP’を作る．この四角形は対角線がそれぞれの中点で交わることから平行四辺形と把握する．そして，平行線の錯角は等しいことから∠BP’D＝∠CPD と示し，Ｂ４へと進む過程である．

図形把握の視点からＢ３２を分析すると，四角形 CPBP’の対角線がそれぞれの中点で交わる性質を用いた推論的な把握が必要となる．さらに，推論的把握が行われる前の四角形 CPBP’に注目する際には，全体から部分を切り取る操作的把握が必要となる．また，操作的に把握する前段階で，四角形 CPBP’が平行四辺形であると知覚的に把握する場合もあるだろう．

５．データ（解答）の分析

問題７における実際の児童の問題解決過程を分析する．この問題の正答率は 14.0%であり，7 問中３問目に正答率が低いものであった．他の問題と比較してみても難易度が高い問題だと言える．問題７のデータは，20 人分があり，その中で正答に至った児童は３名であった．以下では，正答に至った場合，PD＋FD＝BF の条件を用いて正しく補助線を引くことはできたが，完全な正答に至らなかった場合，条件をうまく用いることができず，正答には至らなかった場合の３つに分けて分析を進める．

5.1 正答を与えた問題解決過程

正答を与えた問題解決過程は，４ 章で述べたＢ２１またはＢ２２の過程を経るものだった．例えば，図６，７，８の児童αの解答である．この解答は，Ｂ２１の過程を経て正しい解答に辿りついている．一見，図７に平行四辺形が見えるため，Ｂ２２の解決過程を経ているようにも見えるが，解答用紙にはＢ２１を用いて正答に至る解答が記述されていた．

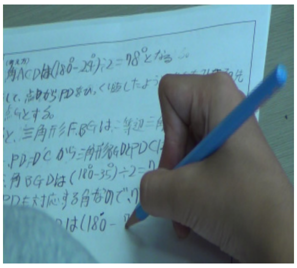


図６：児童αの解答

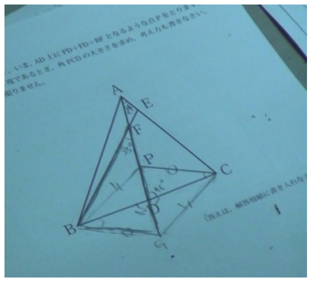


図７：問題用紙への書き込み

角 ACD は（180－24）÷2＝78 となる．
そして点 D から PD をひっくり返したように線を引き，その先を点 G とする．
すると，三角形 FBG は二等辺三角形となり
また，PD＝DG から三角形 BGD と PDC は合同となる．
さらに，角 BGD は（180－35）÷2＝72.5 となり，
そして，角 CPD も対応する角なので 72.5 とわかる．
だから，角 PCD は（180－78－72.5）
答え　29.5

図８：児童αの解答（ビデオから再現したもの）

図形把握の視点からすれば，児童αは記述から二等辺三角形や，合同を用いていることが分かり，推論的に把握していることが分かる．また，「PD＝DG から三角形 BGD と PDC は合同」という記述と図中の対応する線分と角が等しいマークから，２辺とその間の角がそれぞれ等しいという合同条件を基にした推論的把握も確認できる．また，この記述から，必要となる図に焦点を当て認知的に図形を変形して捉える操作的把握（mereologic）もできていたことが分かる．さらに，この児童αの特徴として，Ｂ２２の過程の平行四辺形であるという操作的把握（mereologic）も実際には行えており，必要となる様々な把握を行なって解決に至っている．したがって，この児童αは，操作的把握，推論的把握を適切に用いて正しい解答に辿りつけていることが確認できる．

5.2　条件を用いて正しく補助線は引けたが，完全な解答に至らなかった問題解決過程

２つ目の場合は，仮定の PD+FD=BF を用いて三角形の外に延長線を引けたが，完全な解答に至らなかった問題解決過程である．この場合の解決過程は，すべて，児童αのＢ２１までの過程と同様の過程を辿るものであった．この解答の中には，答えの数値を得られなかったものもあれば，正答に辿りついたが，その根拠を明確に示すことができなかったものもあった．例えば，後者は図 9，10，11 の児童βのような解答である．

児童βは，Ｂ２１の過程を経て△FBG が二等辺三角形となることを示している．次に，２つの合同な三角形に焦点を当てず，二等辺三角形に平行線 DH を引き，２つの相似な三角形に着目し，∠HDB を求める過程となっている．さらに，HD//PC であることを直観的に把握し正答に至っていた．この児童は正答を導き出してはいたが，その根拠が見つからず，しばらく考えていた．その過程では，他の箇所に補助線を引いたり，消したりしていた．児童βの過程はデータが断片的なもので最後まで見ることは出来なかったが，合同な三角形に気付かない限り解決に至ることはできない．

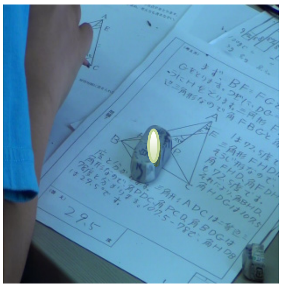


図 9：児童βの解答

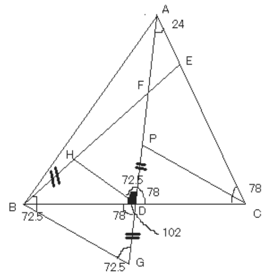


図 10：問題用紙への書き込み

まず，BF＝FG となるように G をとります．

つぎに，DG=BH となるように H をとります．

三角形 FBG は二等辺三角形となるので角 FBG と角 FGB は 72.5 度です．

三角形 FHD はそうじ形なので，角 FHD,角 FDH も 72.5 度です．

それにより，角 BHD，角 HDG は 107.5 度と分かります．

三角形 ADC は二等辺三角形なので，角 PDC，角 ACD,角 BDG は 78 度と分かります．

107.5−78 で，角 HDB は 29.5 です．

（解答途中）

答え　29.5

図 11：児童βの解答（ビデオから再現したもの）

図形把握の視点から解決過程を見ると，児童βは，操作的把握により二等辺三角形である△FBG や，２つの相似な三角形に着目している．さらに，∠HDB を求める際に，重なった角度を瞬時に必要な部分に着目し角度を求めている．このことから，必要となる図の部分に焦点を当て認知的に図形を変形して捉える操作的把握（mereologic）を行なっていると言える．一方で，２つの合同な三角形に焦点が当てられずに明確に解答が得られていなかった．合同に着目できなかった理由は三つ考えられる．一つは，問題の仮定にある BD=CD が図上で推論的に把握されなかったため，２つの合同に気付けなかったと考えられる．通常，仮定を推論的に把握した際に図上に印を付けるという行為が見られるが，BD=CD となる印が付けられておらず，記述でもそういったものは書かれていなかった．二つ目に，相似な三角形に焦点が当たりすぎ，２つの合同な三角形が把握されなかったという操作的把握（mereologic）の問題である．三つ目に，２つの三角形が合同となる合同条件を知らず，合同を推論的に把握できなかったという理由である．いずれの理由が正しいのか明確に知ることはできないが，一つ目と二つ目が主な理由で

はないだろうか．また，完全に解決できていないにも関わらず正しい解答の 29.5° が得られている理由は，明確な根拠なく，辺 HD，PC が平行と知覚的に把握しているからである．そして，同位角から∠PCD=29.5°に至っている．

5.3　条件をうまく用いることができなかった問題解決過程

データの中で，PD+FD=BF をうまく用いることができず正答に至らなかったケースは少なくなかったが，その中にも二通りの場合があった．一つ目は，補助線を全く引かない場合である．この場合，仮定から分かる角度を求めたが解答が得られなかったというものである．こういった児童は最も多く 8 名いた．二つ目は，補助線を引いてはいるが，仮定 PD+FD=BF をうまく用いることができなかった場合である．こういった児童は 7 名ほどいた．

この二つ目の例を 1 つ挙げよう．児童γは図 12, 13 で示したように二等辺三角形△ACD に平行線を引き相似を用いていた．さらに，線分の延長などの補助線を引いて三角形の内角の和から様々な角度を求めていくという解決過程を経ていた．ただ，この過程では，仮定にある PD＋FD＝BF を用いて図の外に延長線が引けず，正しい解答に辿りつけていない．

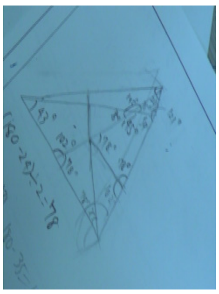


図 12：児童γの解答

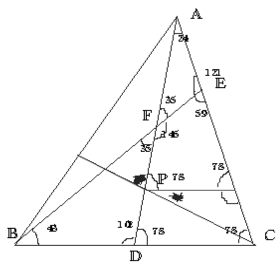


図 13：ビデオから再現したもの

この解決過程を図形把握の視点から見ると，仮定から得られる角を推論的に把握できていることが分かる．また，図の中で，相似な三角形の性質（対応する角の大きさは等しいこと）を用いて推論的に角度を求めている．操作的把握では，主に，△ABC の中に作られる様々な三角形に焦点を当て内角の和を用いて角度を求めていく操作の繰り返しがみられた．そこでは，重なっている図形も含まれる．ただ，線分 PD を延長する補助線は引けなかった．

今回，児童γのような図の中に補助線を引き，仮定である PD＋FD＝BF は用いることができなかったものが少なくなかった．この理由の一つとして，外に補助線を引くというような問題を経験していないことがあるのではないだろうか．そうであれば，内側に補助線を引くことにしか思考が向かないと考えられる．このような図に補助線を引く操作は，図形把握の枠組みでは捉えにくく，その要因を探ることは難しい．今後の課題となるであろう．

６．考察

今回，ジュニア算数オリンピック全国大会参加者を秀でた子どもと捉え，その問題解決過程を分析してきた．その結果，二つの特徴があった．

第一に，秀でた子どもは複雑な図形においても重なった図形を認知的に切り替えて必要な部分に焦点を当てるという操作的把握（mereologic）ができるということである．実際，問題 7 では複雑な図形が与えられており，正答に辿りつくためには，高度な操作的把握が必要になる．今日の日本の小・中学校における算数・数学教育を考えれば，こういった複雑な図形を捉える問題は少ない．中学校の生徒であってもこのような操作的把握（mereologic）は難しいのではないだろうか．そうであれば，秀でた子どもは，小・中学校の算数・数学で教えていること以上の技能をもっているといえる．おそらくこのことは，これまでに算数オリンピックで出題されるような挑戦的な問題に取り組むことにより，自然と身に付いてきたものではないだろうか．

第二に，秀でた子どもは様々な推論的把握ができているということである．今回の問題を解決するためには，二等辺三角形の性質や合同などの性質を用いて，図形性質を推論的に把握することが必要であった．こういった推論的把握に関する知識・技能は，中学校で本格的に学習する内容であり，小学校ではその素地となる内容を学習している程度である．したがって，問題 7 のような問題を解決できる秀でた子どもたちは，中学校で学ぶ内容を先取りしていると言える．ただ，見方を変

えれば，こうした推論的把握に関する知識・技能は，上の操作的把握に関する技能とは異なり，結局は中学校で学習するものである．そのため，秀でた子どもが，通常の子どもがもっていない数学的知識や技能をもっているとまでは言えないであろう．

以上の二つの特徴からすると，算数・数学教育についていかなることが示唆されるであろうか．一つ考えられることは，小学校・中学校で挑戦的な問題の取り組みを行なうことで，秀でた子どもがもつような多角的に図形（ものごと）を把握する力をつけていくことができるということである．これにより，秀でた子どものみならず，普通の子どもたちも数学好きの秀でた子どもになる可能性があるのではないか．実際，筆者が今まで出会ってきた算数・数学に秀でた子どもたちは，算数の問題を解くことを楽しんでいるように思えた．そして，そういった子どもたちは，自分で問題を作り出してしまうほど問題に楽しんでいた．数学オリンピックで上位国となった国を視察した研究結果の報告書の中で礒田（2006）は,「日本に欠けているもの，それは普通の生徒を数学好きの優れた生徒へと鍛えようとする社会と，その営みを楽しむ教師・研究者，生徒の存在である．そこで楽しむのは生徒が挑戦する数学である」と述べている．我が国でも，小学生から挑戦する問題を授業内外問わず，楽しんで取り組める環境をつくっていくことが必要だと感じた．

謝辞

データの収集にあたり，算数オリンピック委員会の柳澤様をはじめとする同委員会の方々には，大変貴重な時間を提供していただきました．ここに謝意を表します．

参考文献

礒田正美ほか（2006）『数学オリンピック上位国と我が国との数学に秀でた生徒の育成方略に関する比較研究―自ら学ぶブルガリアの数学教育と他国との比較―』，平成 17 年度～平成 18 年度学研究費補助金（萌芽研究）研究成果報告書，筑波大学．

志水廣ほか（1994）「より進んだ子どものための算数教材の開発」，日本数学教育学会誌 第 76 巻第 2 号，日本数学教育学会，pp.20-25.

田村篤史（2012）「数学的才能者と高学力者の相互作用から見える数学才能者の１つの可能性―数学才能者の意味の明確化」，数学教育論文発表会論文集 45，日本数学教育学会，pp1121-1126.

原田耕平（2007）「幾何図形についての生徒の認知発達水準の同定の方法」，数学教育論文発表会論文集40，　日本数学教育学会，pp.631-636.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Leikin, R. (2008). *Creativity in mathematics and the education of gifted students: Research Agenda and the complexity of the field*. The paper presented at ICME-11, TSG6: Activities and programs for gifted students.

Leikin, R., Berman, A., Koichu, B. (eds.) (2009). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sriraman, B. & Lee, K.-H. (2010). Book Review: Roza Leikin, Abraham Berman, Boris Koichu (eds): Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students. *ZDM Mathematics Education 42*, 507–510.