上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.55-64.

記号論的認識論に立つ中学校数学における生徒の文字式の困難性に関する研究

服部　泰伸
上越教育大学大学院修士課程２年

中学校数学において，文字や文字式はそれらそのものが教材となるだけでなく，数学的には，他領域に対する道具的性質をもつといえる。さらに，文字や文字式を用いると，事象を簡潔に表象したり，数量関係や法則を分かりやすい形にすることができるだけでなく，そこから新たな関係や法則を見出すことができる。生徒は文字や文字式に苦手意識をもってしまえば，数学を学習することに難しさを感じてしまうだろう。他方で，文字や文字式の本質を理解することによって数学のよさを実感できることもあるだろう。このように文字や文字式は数学を学習するうえで重要な性質をもっており，文字や文字式の学習をおろそかにすることはできない。文字や文字式は数学的記号であり，それがあることによって数学に効率的に接近することができる一方で，文字や文字式を用いることによって，数学に多様な方向から接近することができるだろう。しかし，文字や文字式に対して生徒のもつ困難性がしばしば指摘されている(例えば，藤井，1992)。

文字や文字式の認識に対する生徒の困難性の要因は様々挙げられるが，文字や文字式の困難性の一つとして，数から文字へと置き換えに難しさがあるのではないか。数の使用から文字の使用に至る際に抽象性と形式性が増してしまう。その上，数から文字に置き換える過程において，より複雑な認識上の困難性が潜んでいると考える。また，文字や文字式は自分の数学的思考の表象や問題解決の際の効果的な道具でもある。しかし，その文字の意味内容は個人によって異なる場合がある。こうした認識上の困難性は個人のもつ恣意性に関連するとも考えられる。そこで生徒は文字や文字式を言語や記号としてどのように捉えて，どのような認識過程でそれらを表象し，どういった場合に困難性をもつのかを捉える必要がある。

本研究の目的は，生徒の文字や文字式の記号論的認識過程がどのようになされていくのかを分析し，その過程でどのような困難性が生じているのかを明らかにすることである。

この目的を達成するために，数学教育学における記号論的認識論の先行研究として，主にPresmeg(2006)と Ernest(2006)とを参考にし，入れ子型三項モデルを用いて生徒の文字式の認識過程を捉える枠組みを構築する。そして中学生に問題解決を課してビデオに記録し，さらにそのビデオを中学生に見せながら刺激再生インタビューを行い，データとする。そのデータを構築した枠組みを用いて分析し，考察する。

１．文字や文字式の先行研究

１．１　三輪(1996)の研究から

三輪(1996)は，文字式は数学を活用するために最も有効な方法であると主張し，文字式の使用の図式の使用の意義とその指導について述べている。三輪(1986)の考察した図式は以下である。

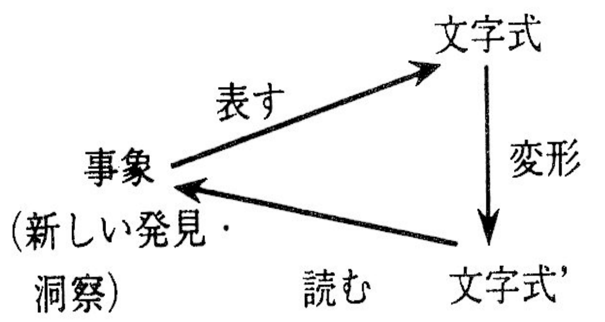

図１　文字式利用の図式(三輪，1996，p.2)

さらに三輪(1996)はこの図１に対して以下のように説明している：

> この図式は，点で示される３つの状態：事象，文字式，文字式'と，線で示される３つの過程：表す，変形，読むから成る三角形上のものである。事象は，出発点・到達点となるもので，問題，あるいは，パターン等，その場の状況によってさまざまの形をとる。3 つの過程を一廻りすることで，新しい発見や洞察が得られることが期待され，それが到達点と考えられる。文字式と文字式'を区別するのは，後者が前者を変形という過程を経たことを示すためである。(p.2)

三輪(1996)はこの図式が文字式の使用に関してどのような過程を経て，何を達成したのかを明らかになることを述べている。その観点から図１のような図式を用いることは文字式の指導においても有効であり，生徒の文字式の学習の達成度を測ることに役立つであろう。生徒がこの図式のようなサイクルで文字式の学習をすることによって，文字式を有効かつ適切に使用できることが示唆される。

これらのことから，文字式の指導において教師は生徒の文字や文字式の使用やその学習がどのような過程で行われるかを捉える必要がある。その評価基準となりうるものは，文字や文字式の使用もしくは学習の過程の中で，生徒が表象したものと考える。

１．２　杜威(1991)の研究

杜威(1991)は，文字は文字式の世界に入ってから数の代わりに使うために新しく導入されたものであり，文字式は数と文字を計算記号や関係記号やまた(　)で正しく結び付けることによって，数量や数量関係を表わすものであると述べている。例えば「１本 120 円のジュースを a 本買いました。代金はいくらか」という問題では,数の代わりに用いている a が文字であり，代金 120a が文字式である。

ここから，文字は数などの仲介者のような役割をもっていて，文字式はその文字の意味を表現したものである。

杜威(1991)は文字式の構文法を考えることについて次のように述べている：

> 数の世界で使われてきた数の式に関する構文法を，そのまま文字式に適用するものと，文字式の世界に入ってから新しく規定されたものとの２つの側面からみる必要がある。(p.42)

さらに杜威(1991)は文字式にそのまま適用するものは小学校で学習した 7＋8 や 5－2 などのような規定であり，文字式の世界に入ってから新しく規定されるものは以下の六つのような規定であると主張した。

①計算記号×を省略するか，または・で代用すること。
②計算記号÷の代わりに分数の横線を使うこと。
③数と文字，数と括弧を掛けるとき，数を前に書くこと。
④文字の係数の絶対値は１である場合，その１を省略すること。
⑤一般的に，文字をアルファベット順に書

くこと。

⑥文字の指数を文字の右上に書き，指数が1である場合，その指数を省略すること。

(p.45)

生徒は中学校数学での新たなこの六つの規定により，数式の認識において，混乱してしまうかもしれない。この記号論的な複雑さの中に，認識上の困難性が重なり，さらに文字や文字式の使用の困難性を引き起こす要因となることが考えられる。

また，文字式における文字の意味は定数，未知数, 変数の三つがある。杜威(1991)によると，定数というものは「ある決まった数値」, 未知数というものは「決まっているが，まだその値が分からない数値」, 変数というものは「ある範囲の中で，変わっていく値」として使用される。杜威(1991)は定数，未知数や変数の間の相互関係が文字式の学習にかなりの影響を与えていると述べている。

ある条件において，生徒は文字式における文字を定数，一般数もしくは変数として捉えている。

２．本研究における文字や文字式の捉え

文字や文字式は数学的道具であり，ある対象の媒介物として扱われる。その観点から，文字や文字式というものは具体的な対象を記号で置き換えて表したものである。これは，三輪(1996)が提案した文字式利用の図式で言う「事象から文字式へと表わす」の過程に相当する。文字や文字式で表象するためには，その内容となる具体的な対象を明確に捉えることが大事である。その具体的な対象から文字や文字式へと表象を置き換えていく過程の中に，生徒が持つ文字や文字式の困難性があるのではなかろうか。さらに杜威(1991)の先行研究から，数と文字の間には関係があり，数の知識が文字の知識へと拡張していくことで文字や文字式を認識していくと考える。学習者は文字式で表した数学の記号論的な「仕組み」が認識できず，困難に陥ることもあるだろう。このような記号論的な複雑さがあり，これが文字や文字式の学習に大きく影響する。この記号論的な複雑さを何らかの対象から文字や文字式へと置き換える過程の中で捉えることによって，文字や文字式の困難性を捉えることができる。

３．数学教育学における記号論的認識論

３．１　記号論的連鎖におけるモデル

Presmeg(2006)は，生徒の日常の実践と授業で教えられる数学的概念がどのように結びつくのかを表す記号論的連鎖モデルを示した。Presmeg(2006)が示したモデルは, Saussure,F. と Peirce,C.のそれぞれの記号論的な理論を土台としている(pp.164-169)。

３．２　二項関係と三項関係

Saussure,F.は，記号の構造を記号表現(signifiant)と記号内容(signifie)の二項関係で捉えた。Saussure,F.の考えでは，記号表現と記号内容は相互依存関係にあり，記号表現が表象的側面として，記号内容が意味的側面として捉えられる。

Peirce,C.は，記号の構造を対象(Object)，表意体(Representamen), 解釈項(Interpretant)の三項関係で示した。対象とは表意体で表象し，解釈項で意味形成をする題材である。Peirce,C.の考えによると，記号はこれら三つの構成要素によって成り立つ。

３．３　Presmeg(2006)の入れ子型連鎖モデル

Presmeg(2006)は, このような Saussure,F.と Peirce,C.の考えに基づいて, 図２のような記号論的連鎖の入れ子型モデルを構築した。

図２において，初めに対象(O_1)と表意体(R_1)があり, この二つから意味形成され解釈項(I_1)となる。次にこれら三つの項は新しい対象(O_2)に含まれ，新しい表意体(R_2) が生じる。そして再び意味が形成されて解釈項(I_2) となる。記号を

構成するために新しい対象が生まれ，対象に対する表意体が形成し，この二つの項から意味形成をする操作が何回も繰り返し行わる。そして，図２のような入れ子の長方形のように描かれて，その長方形はそれぞれ記号を表す(Presmeg，2006)。

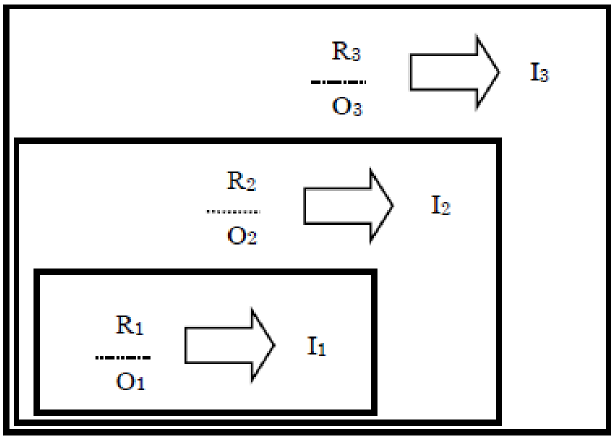

図２　Presmeg(2006)の入れ子型連鎖の三項表現

また，Presmeg(2006)はこの入れ子型連鎖の三項表現の具体例として，チューイングガムの容器から５進法の数を文字式に置き換える認識過程を図３のように示した。

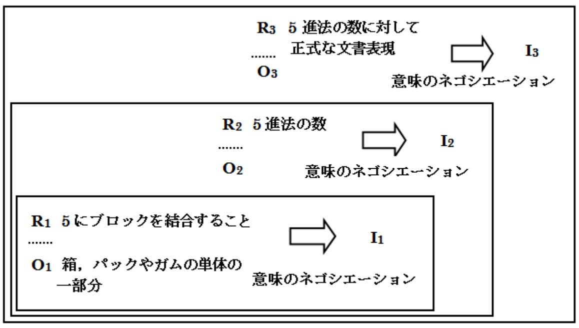

図３　入れ子型モデルにおけるチューイングガムの事例(Presmeg，2006)

この事例において，対象(O_1)が５つのガムが入った容器やパックであって，表意体(R_1)が５つのブロックである。そしてこれらの関係を意味するものとして解釈項(I_1)が表れる。この３つの項は新しい対象(O_2)として含まれて，新しい表意体(R_2) として ５ 進法を表す数字が対象の代わりに与えられる。そこから新しく解釈項(I_2)を得る。同様に今までの関係が対象(O_3)に含まれ，その対象から５進法の数に対して５進法の文字式による表象という新しい表意体(R_3)が表れる。そしてこの関係を意味するために解釈項(I_3)が生じる。しかし，対象，表意体や解釈項の３つの項から新しい対象へとなるために個人的な認識の差異が生じる可能性がある。例えば，ある人は日常の実践から始め，それからその数学的概念が連鎖に起因するか確かめるかもしれないし，もしくはある人は数学的概念に注目し，それから連鎖の一連の過程のいくつかのつながりで日常の実践の始点を探し求めるかもしれない(Presmeg，2006)。このような問題に対処するために，それぞれの連鎖の段階における個人の意味形成を考慮する必要がある。

３．４　記号論的システム

Ernest(2006)は，数学の教授と学習の間の本質を数学教育の記号論的視座から探るために，論理的根拠が求められることを述べ，数学の教授や学習を概念化することの方法を提示した。Ernest(2006)は，個人の学習は社会に参加することや共生することによって始められると述べている。同様に，サイン(sign)もまた社会的な規則，意味や文脈が考慮されて表象される。数学の教授と学習の間の論理的根拠の正当化は多数の使用されるサイン(sign)の文脈にわたって，個人のサイン(sign)の形成，読むことや解釈のすべての側面を含むサイン(sign)の記号論の役割に基づいているために多数存在する。

数学はサイン(sign)の基礎を踏まえた活動であり，コミュニケーション活動を通してサイン(sign)を具現化していく。サイン(sign)の創作，発言や表象は代理人のような活動であり，事物を正確に伝えるためには話すもしくは書くことで言語表現を選び，構成しなければならない。このようにサイン(sign)を表象するための記号論的システムがあり，それは以下の三つの構成要素から成る。

1）サインの集合(S)

2）規則の集合(R)

3）意味構造の集合(M)

これら三つの構成要素において，サインの集合(S)は話す活動や書く活動などを通して表象したもののことを指す。規則の集合(R)はサイン間を結ぶ規則を含み，場合によっては個人的な記号の捉え方を伴いながら表象されたサインの関係である。意味構造の集合(M)はサインの集合と規則の集合の根底にある数学的構造である。

一冊 90 円のノートを買うときの代金を 90×a という文字式で表した事例で考えると，サインの集合は90×aという表象された文字式である。規則の集合というのは，その文字式を表象する過程の規則であり，例えば計算であったり，数の式や言葉の式に直す過程のことである。意味構造の集合とは，表象した文字式や表象する過程が一冊 90 円ノート買うときの代金という意味をもつということである。

４．記号論的認識論における数から文字への置き換えを捉えるための本研究における研究の枠組み

Presmeg(2006)の入れ子型三項モデルでは対象と表意体が存在し，この二つから様々な解釈項を得る。この解釈項は個人の心的要因によって様々であり，一人ひとり異なる場合があるため，その意味は多様である。その点で Peirce,C. の言う解釈項には Saussure,F.の言う恣意性が含まれるものとして考えることができる。この恣意性は個人の間違った解釈や正しい解釈が混合していて，曖昧なものである。他方で生徒の文字や文字式の認識を捉えるためには，この入れ子型三項モデルの中に入れ込まれた意味，すなわち解釈項の中身を分析的に捉える必要がある。

そこで解釈項の中身を Ernest(2006)の考えである記号論的システムの規則の集合(R)と意味構造の集合(M)に分けて生徒の認識を捉える。規則の場合は，通常，表意体に相当するが，Ernest(2006)は暗黙の規則の存在を論じており，規則が暗黙であるときは，それは解釈項に含まれる。解釈項をこれら二つの記号論的な構成要素に分けて捉えることによって，生徒が具体的な対象から記号を表象するときにどのような認識が働いているかを捉えることが可能となる。

また，Presmeg(2006)の入れ子型三項モデルにおける表意体と解釈項は Saussure,F.の言う二項関係で表わされ，すなわち表意体が記号表現であり，解釈項は記号内容と捉えることができる。それに従って，表意体と解釈項を明確に識別するために，本研究では表意体を対象から表象された記号や言語とし，解釈項を恣意性の観点から人間的なものであると捉え，表意体から解釈されたものすべてとする。

５．調査の方法

５．１　調査の概要

調査は新潟県の公立中学校 1 年生の San, Iwa, Hori(名前はニックネームである)3 名を対象に, 平成 25 年 2 月から 3 月にかけて行った。調査 3 名の生徒に対して問題解決を 2 回，ビデオを見せながらインタビューを 2 回行った。それぞれの調査は 60 分程度であった。生徒の表情を含めた全体の様子を 1 台のビデオカメラで, 問題解決や刺激再生インタビューの際の手元の記述を 1 台のビデオカメラで記録した。

今回は調査を行ったうちの 1 題を，記録したデータを基にプロトコルを作成し，分析と考察を行った。なお，プロトコルにおける筆者を I と表す。

５．２　調査参加者の実態と調査課題

調査参加者である San，Iwa，Hori は，それぞれ学習の進度が速い生徒，普通の生徒，遅い生徒である。生徒の学習の進度を考慮して，新潟県の 40 代の数学教師と相談しながら調査課題を作成した。調査課題の概観については，図

4 に示す。

掲示板にがびょうを使って画用紙を下の図のように貼ろうと考えている。画用紙を a 枚貼るとき，がびょうは何個必要か。

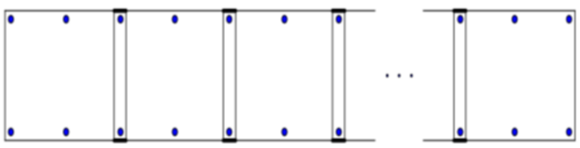

図 4　調査課題の概観

この調査課題は問題の内容が身近にある事象を採用し，生徒が比較的に考えやすい問題として設定した。多様な考えで問題解決を行うことを期待し，この問題を設定した。

５．３　インタビューの方法

インタビューの方法については，刺激再生インタビューを用いる。この方法は，子どもたちの認知活動をビデオに撮影しておき，事後にビデオを再生して刺激として与え，内省報告を与えるというものである(岡本，1992)。

本研究では文字や文字式を表象するという観点で捉えていくと考えているので，そのためには生徒がどのような対象から知識形成を行い，表象しているのかを認識しなければいけない。生徒がどのように問題解決を行ったかを内省することで，その問題の場面で何を考え，どのように文字や文字式を捉えていたかを把握することができる。

これらのことから，生徒がもう一度自分自身の問題解決過程を見ることによって，自分の考えを整理し，どのようにして問題に取り組んでいたかをはっきりと認識することができると推測し，この方法を取り入れた。そして，この調査方法から文字や文字式の困難性の糸口を見つけようとした。

６．調査の分析

６．１　San の場合

問題解決において，初めに San は問題の意味を理解できず，筆者に問題の内容を聞いた。筆者は問題の内容を説明すると，San は問題の意味を理解し，すぐに問題解決に取り組んだ。そして画用紙が 1 枚目，2 枚目，3 枚目のときに必要な画鋲の個数を数え，数えた結果を問題用紙に記述した。その数えた結果と問題の図を見ながら，San は「6＋(a－1)×4」という答えを導きだした。その後，San はもう一度画鋲の個数を数え，導き出した文字式が合っているかどうかを確認していた。

San は文字式を表すために基準とする数を見つけて，そこから具体的な数を用いて大まかな見通しを立ててから答えとなる文字式を考えていた。そして，問題で何を文字に置き換えているかを確認して，具体的な数から文字へと置き換えて文字式に表している。その際にも問題の図と自分自身で数えて求めた数字に注意し，比較しながら文字式に表していた。

調査課題における San の認識過程は図 5 のようになる。

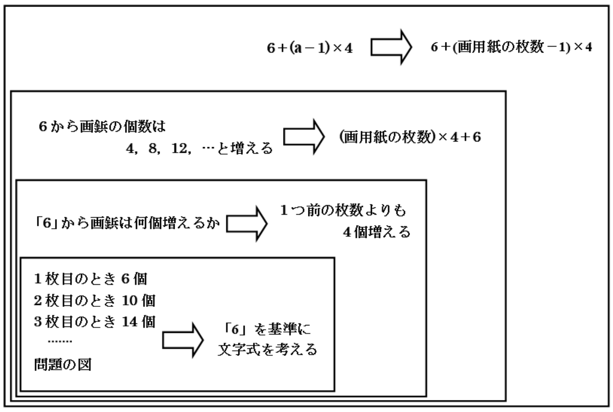

図 5　調査課題における San の認識過程

６．２　Iwa の場合

問題解決において，Iwa は問題の図を見ながらしばらくの間考え，問題用紙に「a＋2」と記述した。その後に Iwa は図 6 のように記述して考えた。

そしてしばらく考えた後に，今度は「a－2」と記述し，図 7 のように考えていた。

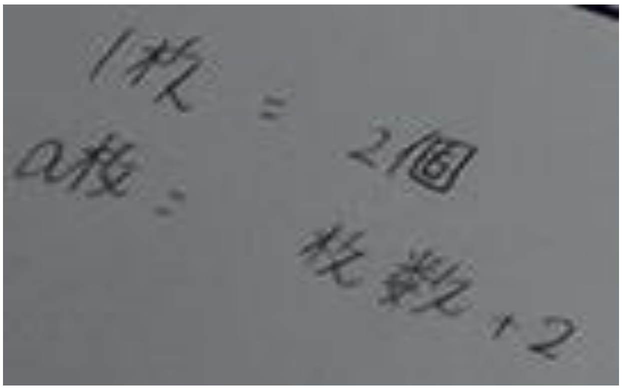

図 6　Iwa の記述①

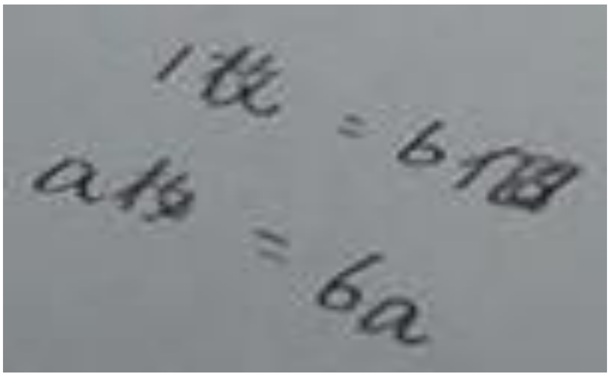

図 7　Iwa の記述②

さらに Iwa はこれら記述とは別に，問題の図から整理するために図 8 のような表を描いた。

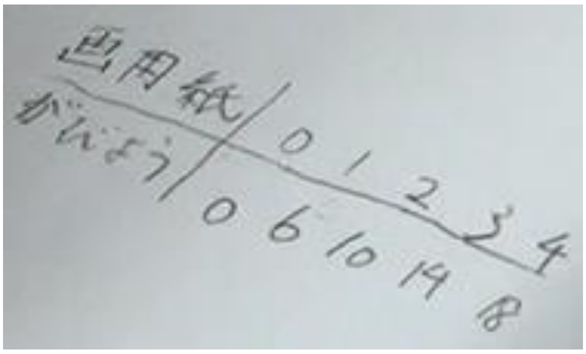

図 8　問題の図に対して Iwa が作成した表

しばらく考えて，Iwa はこの表から答えが導き出せると考えていたが，上手くいかないようであった。ここから Iwa は答えの見通しがつかない様子だったので，筆者は Iwa が書いた表から数字がいくつ増えているかということを質問した。

それに対して Iwa は，画用紙が 0 枚から 1 枚に増えると画鋲は 6 個増え，画用紙が 1 枚から 2 枚に増えると画鋲は 4 個増えると答え，その規則性を Iwa が作成した表に書き加えた。そして筆者は Iwa が述べたことから画用紙が 1 枚増えると画鋲は 4 個ずつ増えていくとまとめた。ここで筆者は「○枚目は○に○を○回加える」というヒントを Iwa に与えた。そのヒントに対して，Iwa は 6÷4 と計算をして「1.5 回」と答えたが，すぐに間違いであることに気付いて画用紙が 1 枚のときは 6 に 4 を 0 回加える，画用紙が 2 枚のときは 6 に 4 を 1 回加える，画用紙が 3 枚のときは 6 に 4 を 2 回加えるというように認識していった。そして筆者は Iwa に a 枚目のときはどうなるかということを質問すると，Iwa は 6 に 4 を a 回加えると答えたが，a 回だとおかしな所があると考えて悩んでいた。そこで筆者は Iwa に画用紙の枚数と加える回数を比較させ，Iwa は a 枚のときは a−1 回加えることを認識した。

この後 Iwa は a−1 という文字式を考慮しながらヒントを頼りに問題を解こうとしていたが，答えへの見通しが立てない様子であったので筆者は最初に提示した「○枚目は○に○を○回加える」というヒントを数の式に直すように指示した。Iwa は，画用紙が 1 枚のときは 6＋0，画用紙が 2 枚のときは 6＋4，画用紙が 3 枚のときは 6＋8，画用紙が 4 枚のときは 6＋12 というように答え，そして画用紙が a 枚目のときはどうなるかということを Iwa に問いかけると，6＋a−1 と答えた。そこから筆者は Iwa にそれらの式の 0，4，8，12 の数字に注目させた。それに対して Iwa は 4 の段であると述べて，注目した数字をそれぞれ 4×0，4×1，4×2，4×3，4×4 というように修正した。これらのヒントから筆者と一緒に考えながら文字式に表そうとして，Iwa は「4a−1」という文字式を導き出したが，この文字式で合っているのか分からず，悩んでいた。そこで筆者は改めてヒントを説明し，計算用紙に 6＋4×0，6＋4×1，

6＋4×2，6＋4×3，6＋4×4 というように記述した。Iwa はこの記述を見て「6＋4×a－1」という文字式で表した。この後 Iwa は表した文字式からどのような操作をすればよいのか分からない様子で，何度も「6＋4×a－1」という文字式を問題用紙に記述した。

この後 Iwa は「6＋4(a－1)」と問題用紙に記述するものの，これとは別の考え方で問題を解いていた。しばらくの間 Iwa は悩んでいたので，筆者は「6＋4×(加える回数)」となることを Iwa に確認し，Iwa は「6＋4×a－1」という答えを導き出した。

調査課題における Iwa の認識過程は図 9 のようになる。

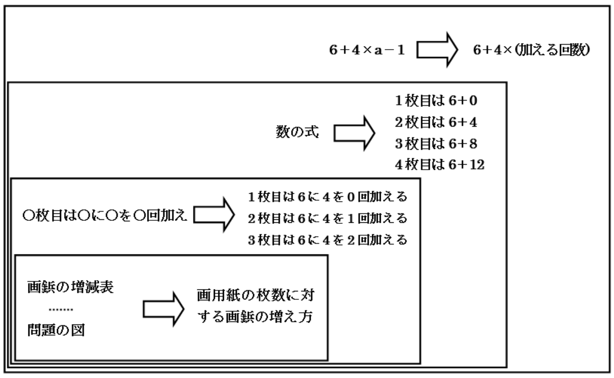

図 9　調査課題における Iwa の認識過程

6．3　Hori の場合

問題解決において，Hori は問題を見てすぐに分からないと言った。それに対して，筆者はとりあえず自分の力でやれるところまで問題を解くように指示した。そして Hori はまず黒い点で描かれた画鋲の数を数えたが，そこからどのようにして解けばよいのか分からず，筆者にヒントを求めた。筆者は Hori にどこが分からないか質問すると「a が分からない」と答えた。そこで筆者は，画用紙のそれぞれの枚数に必要な画鋲の個数を Hori に求めさせた。それに対して，Hori は画用紙が 1 枚のとき 6 個，2 枚目のとき 4 個，3 枚目のとき 4 個というように答え，図 10 のように記述した。このとき Hori は必要な画鋲の個数ではなく，画用紙の枚数に対する画鋲の個数の増え方と勘違いして質問に答えていた。

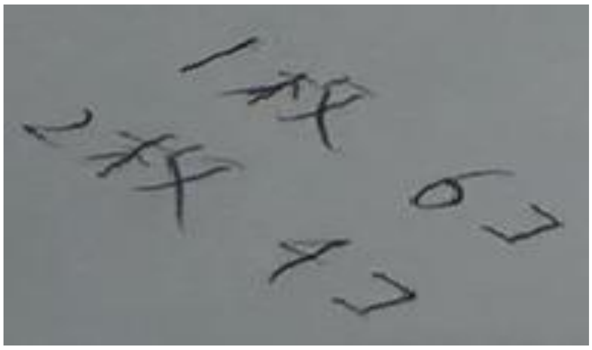

図 10　Hori の記述

ここで改めて Hori に画鋲の必要な個数を質問すると，画用紙が 1 枚のときは 6 個，2 枚のときは 10 個，3 枚のときは 14 個というように答えた。そして Hori は質問に対して答えた数から 4 ずつ増えていることに気付いた。その気付いたことから問題を考えるように指示したが，Hori はどのようにすれば分からず，再び筆者に分からないことを伝えた。そこで筆者は問題の図を，求めた規則性を使って区切って求めるように指示した。そして画用紙が 1 枚のときの必要な画鋲の個数である 6 を基準に画用紙の枚数が増えると，必要な画鋲の個数は 6 個からどのくらいずつ増えるかを確認させた。すると Hori は画用紙の枚数が増えると，必要な画鋲の個数は 6 から 4，8，12，…と増えることを理解する。そこから Hori は増え方が 4 の掛け算になっていることに気付き，増え方を 4×1，4×2，4×3 というように表した。それらのことを踏まえて，筆者は「画用紙のそれぞれの枚数は 6 に 4 を何回加える」というヒントを提示した。そのヒントに対して，Hori は 1 枚目のときは 6 に 4 を 0 回加える，2 枚目のときは 6 に 4 を 1 回加える，3 枚目は 6 に 4 を 2 回加える，…といったように答えた。そして Hori に画用紙の枚数と加える回数とを比較して加える回数は画用紙の枚数より 1 少ないことに気付かせ，画用紙が a 枚のときは 6 に 4 を a－1 回加えるということを，筆者との相互作用によって認識し

た。この後に，筆者は Hori にその認識したことを数の式に直すように指示した。その指示に対して Hori は，画用紙が 1 枚目のとき 6＋0，2 枚目のとき 6＋4，3 枚目のとき 6＋4×2，4 枚目のときは 6＋4×3 というように言い表した。そして筆者が a 枚目のときどうなるかということを質問すると, Hori は何かひらめいたかのように，問題用紙に「6＋4×a－1」と記述した。しかし a に数字を代入してみると，答えが合わないことに気付く。その後 Hori は( )を使わなければいけないことに気が付いて，導いた文字式のさまざまな位置に( )を用いるが，確かめると答えが合わず，悩んでいた。そして筆者に分からないことを伝え，筆者は Hori に導いた文字式を言葉の式に置き換えて考えるよう指示した。さらに筆者は，その言葉の式から加える回数，つまり a－1 を一つの文字として捉えなければいけないことを説明した。Hori はしばらく考えた後,「6＋4×(a－1)」という答えを導き出した。

調査課題における Hori の認識過程は図 11 のようになる。

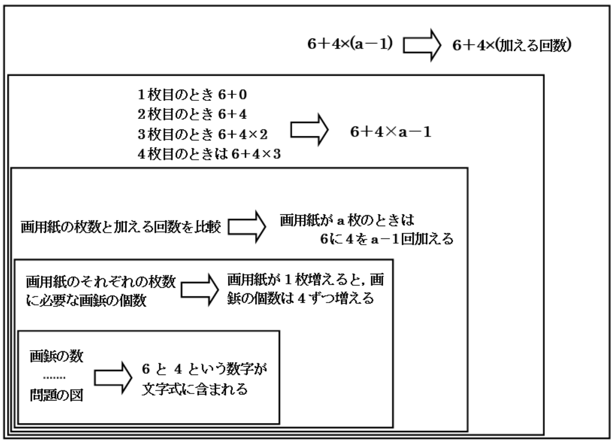

図 11　調査課題における Hori の認識過程

６．４　総括的な考察

本研究における研究の枠組みを用いた実際のデータの解釈を踏まえて，生徒の文字や文字式の認識について考察する。

San は, 調査課題の内容が San 自身にとって簡易的であったため，すぐに答えを求めることができた。そして，San は導き出した文字式の文字の部分に具体的な数を当てはめて，文字式が正しいかを注意しながら確かめていた。このとき，San は規則や規則に応じる技能に意味構造の内容を関連して認識していたことが分かる。このように文字式における文字と数を相互作用させながら認識していくことで，規則や規則に応じるような技能に意味を付随することができる。そのようなことを実現するために，文字や文字式の学習において教師は，数から文字に置き換える過程で規則や規則に応じるような技能または意味構造を関連させて考えるように指導する必要がある。

Iwa は，調査課題に対して直観で問題解決を行っていた。Iwa は直観で問題解決を行っていたため，規則や規則に応じるような技能が恣意的になってしまい，それに関連して意味構造が認識できなくなってしまっていた。このことから，規則や規則に応じるような技能，または意味構造のどちらか一方でも恣意的になってしまうと，数から文字へと置き換える段階でつまずいてしまうと考えられる。

Hori は，調査課題の内容を理解できず，筆者と一緒に問題解決を行った。Hori は文字式に表すための手がかりを規則や規則に応じるような技能を用いて見出すが，その妥当性を筆者との相互作用によって確かめていた。そして自分の考えが合っていれば，その考えから意味構造を構成する。また，Hori が間違った解釈をしていれば，それに対して相互作用における筆者の言動によって修正されていく。これらのことから, 相互作用することによって規則の集合(R)と意味構造の集合(M)とが関連付けられる。

以上のことから考えると，問題解決において，学習の進度が速い生徒は自力で文字式を導くことができたが，学習の進度が普通の生徒と遅い生徒は問題解決の途中で意味構造を認識できなくなり，筆者のヒントを頼りに文字式を導いていた。これは解釈項の中に相互作用の余地があったことを示す。その観点から，生徒の解

釈項の中には曖昧さや個人性が含まれていて，それらが問題解決過程で表れたならば相互作用が起きる。これは学習の進度が遅い生徒ほど，その傾向があった。

また，生徒は困難に直面すると，直観により問題を解こうとする傾向があった。直観は文字式で表すための手がかりとなる場合であったり，そうではなく，直観が間違っていたために，答えとなる文字式を表すことの障害となる場合もあるだろう。これらのことから，直観には「正しい解決に至る直観」と「正しい解決に至らない直観」があると考えられる。ただし，文字式で表すための手がかりとなる「正しい解決に至る直観」に値する規則や規則に応じるような技能であっても，意味構造が不合理となる可能性がある。

さらに，本研究を通じて入れ子型三項モデルは，生徒の数学に対する価値や信念といったものが Presmeg(2006)のいう解釈項や入れ子型三項モデルにおける新しい対象へと変化する際に影響を与えることが見出された。生徒は入れ子型三項モデルにおいて新しい対象へと置き換える際に，前の対象，表意体や解釈項の他にも授業や個人の学習で得た知識を考慮し，置き換えていた。

７．まとめと今後の課題

本稿は，文字や文字式の先行研究から本研究の文字の捉えや意義をまとめ，Presmeg(2006)と Ernest(2006)とを参考にし，入れ子型三項モデルを構築した。

今後の課題は，入れ子型三項モデルを用いた文字や文字式の学習に関する継続的な調査や分析を行うことである。本研究では断片的に生徒の文字や文字式の認識について議論し，入れ子型三項モデルが生徒の認識過程を捉えることに有効であることが示された。ここでさらに継続的に研究を行うことにより，文字式の学習において生徒がどのように文字や文字式を理解していき，どこでつまずくのかを明確に捉えることが可能と思われる。

８．引用・参考文献

Ernest,P.（2006）．A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 67-101.

藤井斉亮．(1992)．児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査．日本数学教育学会誌，臨時増刊，数学教育学論究，58，3-27.

Juan D. Godino，Vicenc Font，Miguel R. Wilhemi，Orlando Lurduy．（2010)． Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects．*Educational Studies in Mathematics, 77*, 247-265.

三輪辰郎．(1996)．文字式の指導序説．筑波数学教育研究，15，1-14.

二宮裕之．(2003)．数学教育における内省的記述表現の分析－記号論的連鎖(Semiotic Chaining)を手がかりとしてー．全国数学教育学会誌数学教育学研究，9，117-126.

岡本真彦．(1992)．算数文章題の解決におけるメタ認知の検討．日本教育心理学会，教育心理学研究，40，81-88.

Presmeg,N．（2006）．Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics．*Educational Studies in Mathematics, 61*, 163-182.

杜威．(1991)．学校数学における文字式の学習に関する研究：数の世界から文字の世界へ．東洋館．

大塚高央．(2004)．文字式の「よさ」の指導に関する研究－中学 2・3 年生を対象にした調査を手がかりにしてー．上越数学教育研究，19，37-48.