上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.95-104.

算数教育における「オープンな問題」に関する一考察

渡部　一嵩
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

筆者は小学生の時から，算数が得意ではなかったが好きであった。算数が好きになった理由に，小学４年のとき他の人と異なる自分の解法を皆に紹介されたことがある。それまで，算数を面白いと感じたことは一度もなかったが，そのことをきっかけに様々な解法を模索することが楽しみになり，算数がますます好きになっていった。算数は，今まで得た知識・技能を活用し様々な方法で問題に立ち向かうことができる。また，図に表す，手で数えるなど考え方の違いが明確である。このような算数のよさは他教科では味わえないものであろう。

算数教育において，児童自らが総合的に既習の知識・技能を活用し，各々の方法で解くことは重要である。なぜなら，算数教育における高次目標の重要な成分として，知識・技能の習得があるからである。広辞苑（第５版）によると習得とは「習って会得すること」と記されている。算数教育における知識・技能の習得は，学んだことをそのまま単体として定着することにとどまらず，既習のものと関連させ，必要な場面で自由に選択し活用できるようになることに他ならない。島田（1977）は算数教育における知識・技能の習得について次のように述べている。

「算数・数学科では，数学に関するいろいろな知識・技能，ないし概念・原理・法則等が次から次へと教えられていく。それは, その一つ一つがそれ自身重要であるからというのではなく, それらがよく消化され, 子どもの中で一つの知的な組織になって, 子どもの人間としての能力や態度の一側面となることを期待してのことである。個々の知識･技能は重要な成分ではあるが, 本来の目標は, それらが一つの人格に統合されたところにある。」(島田, 1977, p.10)

そして，知識・技能が一つの知的な組織となるためには，総合的な知識・技能の活用が大切であることを次のように述べている。

「問題場面の分析に, 既習の数学のレパートリーを活用し, その中にある側面を自分の得意な土俵にひきずりこんで, 数学的な処理が活用できるように解釈しなおし, 得意の手で処理できるようになること。」
（島田，1977，p.12）

しかし，実際の指導においては既習の知識・技能を総合的に活用する場面はそれほど多くみられない。教科書の問題やテストは，確実な知識・技能の定着をはかることを目的として作られている。そのため，公式や求め方をそのまま当てはめれば解くことができる，正答または解法が一意に定ま

った問題（以下，クローズドな問題）が多い。このようなクローズドな問題を中心とした学習では，知識・技能の定着にとどまり，知識・技能の習得は難しいのではないだろうか。

坪田（2006）は，従来の算数・数学教育では，知識・技能の習得は達成されないと危惧している。

「1 つの解き方だけを教えていくという授業では，教師は，出会った問題に対してその場だけにできる解法を知識として覚えさせようという態度になりがちである。そうなると, 問題を解く処理能力だけを身に着けさせようとする授業となるので, 子どもは試行錯誤をしながら問題を解決していく力をつけていくことができない。」（坪田，2006，p.24）

一方で，算数教育における既習の知識・技能の関連づけの重要性についての研究も進められている。長倉（2013）は，過去の経験や既有の知識と関連づけを行うことで，「わかる（理解）」に繋がるという知見を得ている。

このようなことから，算数教育における知識・技能の習得のためには，総合的に知識・技能を活用する場面が必要であると考える。そこで筆者は，正答や解法が複数存在する問題（以下, オープンな問題とする）を教師が意図的に授業に取り入れることで, 知識・技能の習得をはかる指導が行えるのではないかと考えた。

本稿では，算数教育における高次目標である知識・技能の習得をはかる指導を目指し, オープンな問題の必要性を明らかにし, 算数教育における高次目標を果たすオープンな問題の意義を捉える分類枠組みを明らかにすることを目的とする。そのために，まず第 2 節において，わが国におけるオープンな問題の開発の第一人者である島田らの研究より，オープンな問題の開発意図を明らかにする。第 3 節では，先行研究を基に知識・技能の習得の観点から，クローズド・オープンな問題の役割について考察を行う。第 4 節では，先行研究を基に具体的なオープンな問題を明らかにする。第 5 節では，Pehkonen（1995）のオープンな問題の分類を基に，分類における観点について考察を行う。最後に第 6 節において，本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2. 島田らのオープンな問題の開発意図

本節では，島田らのオープンな問題の開発意図を明らかにする。

島田ら（1977）は，高次目標を評価するための手段として，オープンな問題を用いた指導法を提案した。高次目標に対するオープンな問題の有用性は示され，未だに算数・数学教育のバイブルとして，様々な研究が行われている。

島田は，子どもが行うと想像される数学的活動の諸相を，数学的モデル（次貢の図 1）を用いることで示している。島田（1977）は次のように述べている。

「まずはじめに，a.現実の世界と b.数学の世界とがあり，現実の世界には，何らかの意味で c.問題があり，解決をせまっているとする。・・・c の問題に対しては，現実の世界の経験から，その f.条件・仮説を設定し，さらに数学の理論が適用可能になるように, 条件・仮説を抽象化, 理想化あるいは簡単化して，数学のことばによってこれらを言い換える。・・・こうして，いわば活動者の得意の土俵に問題を引きずりこんで言い換えたのが，g.の公理化の段階である。」（島田, 1977, p.15）

このように, 本来の問題解決場面では,

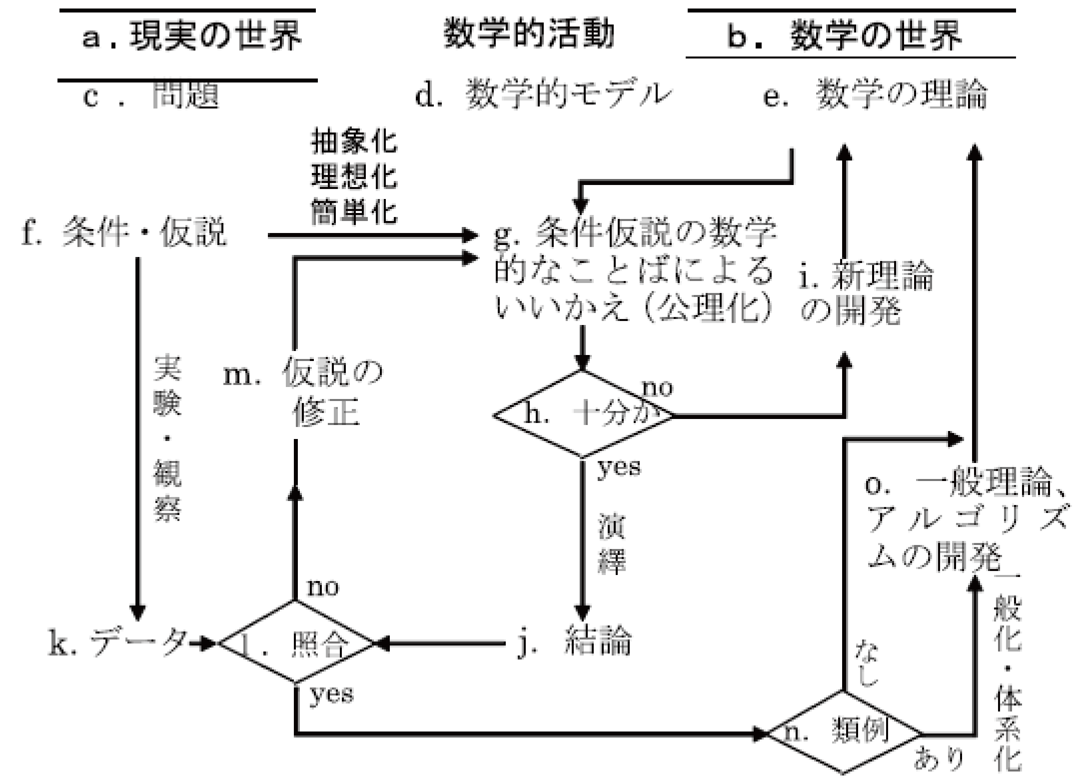


図 1 :「数学的活動」（島田茂，1977，p.15）

「c.問題」から見出される「条件や仮説を数学的に言い換えることから出発」する。しかし，当時の教室で行われていた学習活動の多くは，数学的に言い換えられた段階 g から出発している。問題解決で必ず行われるはずの f→g への抽象化，理想化，簡単化などの過程が，算数・数学の授業で意識されていない。

また，当時扱われていた課題の多くは，結論が予め決まっているものであった。そのため，普通は様々な方向へ発展が想定される過程であるはずの n→o への一般化の過程などにおいても，教師の意図していない一般化は子どもから示唆されても，わきに置かれることが多かった。こういった f→g への過程や n→o への過程では，結果が予め定まっていないため「既習のことを総合した高い能力」，いわば「発想ならびに発想転換の能力」が求められている。（島田，1977）。

このような理由より島田らは，算数・数学教育における子どもの学習活動の中に，f→g→l→m の過程や n→o の過程を，教育場面で計画的に利用できるようにオープンな問題を開発し，授業に取り入れたのである。

3. オープン・クローズドな問題の役割

本節では，高次目標である知識・技能の習得の観点からオープン・クローズドな問題の役割を明らかにし，オープンな問題の必要性について考察する。

3.1　クローズドな問題の役割

島田（1977）はクローズドな問題に関して，次のように述べている。

「これらの問題では，求答のための数学的な条件は完備されており，解答のためには，既習の知識・技能のレパートリーを与条件の解釈のカギとして検索し，適切なものを選んで，これを適用すればすむわけで，知識・技能の有無，あるいは概念・原理・法則等の同定ないし適用を調べることの範囲を出ない。」
（島田，1977，p.11）

つまり，クローズドな問題は与えられた問題に当てはまる知識・技能を選択し，適応することであるといえる。

また，青山（2012）は「クローズドな問題での学びは，児童の側からみれば，その解き方や考え方を覚えておけばよいということになる。」（青山，2012，p.27）と述べている。このことから，クローズドな問題では公式や求め方を暗記しているかどうかをはかることができると解釈することができる。

またクローズドな問題は，主に知識・技能の定着をはかる練習問題やテスト，平成 25 年度全国学力学習状況調査の A 問題（主として知識に関わる）においてみることができる。これらのことからクローズドな問題の解決には，次の 2 点が必要であると考える。

① 既習のレパートリーの中から，必要な公式や求め方を選択し，適用する。
② 求め方を理解している。

具体的な例として，三角形の面積を求める問題をあげ，①，②について説明する。

①について，児童はこれまでに学習した正方形，長方形，三角形，平行四辺形，台形の求積公式から，問題を解決するための公式を選択し，そのまま適用することである。

②について，三角形の公式を適用し，計算によって求積することである。

このように，既習のレパートリーから選択し，そのまま適用し求答できるかがクローズドな問題では問われている。ゆえに，クローズドな問題には知識・技能の定着をはかる役割があると考える。

3.2　オープンな問題の役割

オープンな問題について，島田（1977）は次のように述べている。

「過去の同種の問題解決の事例を思い起こし，場面と似かよった特徴をもつものをさがし，その適用可能性を考えるなど，こうしていわば活動者の得意の土俵にひきずりこんで言い換えること。」
（島田，1977，p.14）

オープンな問題では既習の事柄を想起し，適用の可能性を模索することで，学習者が得意な術で問題解決を行うことができると述べている。また，島田はオープンな問題における思考の過程について，次のように述べている。

「この場面での思考は既習の考え方，それは既習の模擬数学モデルを思い浮かべる鍵といいかえてもよいが，そのレパートリーを想起して，そのどれか，あるいはいくつかの組み合わせ，ないしそれらを修正したものを適用しようと模索し，試行によって可能性の高いものを選んで定型化するということであろう。」
（島田，1977，p.20）

つまりオープンな問題では，解決のために必要な知識・技能の選択，それらに修正等を加え，問題解決ができる形にする

力が求められるといえる。

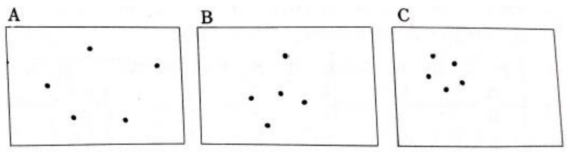
また，沢田（1977）はオープンな問題を扱う上での利点として「子ども達に既習の知識を総合的に用いる機会を与えることができること」，「学力の低い子どもでも，それなりに何か意味のある解答ができること」（沢田，1977，p.36）をあげている。

これらより，オープンな問題の解決には次の 3 点が必要であると考える。

① 既習のレパートリーの中から，必要な公式や求め方を選択する。
② 選択したものを組み合わたり，修正したりして適用（活用）する。
③ 活動者の得意な土俵にひきずりこんで行う。（そのやり方で行った理由を説明できる。）

具体的な例として，島田のおはじきの問題を取り上げる。

問題
A,B,C の 3 人でおはじき遊びをしたら，下の図のようになりました。この遊びでは，落としたおはじきのちらばりの小さい方が勝ちとなります。



この例では，‘おはじきの散らばり程度は，A,B,C の順にだんだん小さくなっている’といえそうです。
このような場合，ちらばりの程度を数で表すしかたをいくとおりも考えてください。

（島田，1977，p.38）

次に示すのは，この問題について予想される反応である。

Ⅰ.多角形の面積
Ⅱ.多角形の周の長さ
Ⅲ.2 点を結ぶ最大線分
Ⅳ.線分の和
Ⅴ.任意の点から各点への長さと和
Ⅵ.円などでおおうときの最小の円の半径
Ⅶ.座標の導入による平均偏差，標準偏差などによる方法

予想される反応 I を例に挙げて①，②，③について説明する。

①について，学習者は「数値化」「図形」「面積」「長さ」「半径」「時間」「重さ」「高さ」などの様々な既習の事柄から，「数値化」「面積」「図形」の考えを選択する。これらを用いて「多角形の面積」で比較を行うことを見出している。つまり学習者は，解決のためにどのような公式や求め方が必要か考え，必要な事柄を選択することである。

②について，①で選択した「数値化」「面積」「図形」を「おはじきを線で結ぶ」（修正）ことで適用させることである。

③について，多角形の面積を求め比較を行うことである。

このように，オープンな問題では既習の知識・技能から解決に必要な術を選択し，適用できる形に修正をすることが求められている。ゆえにオープンな問題では，学習者が知識・技能を場面に応じて自由に活用できるかをはかる役割があると考える。

3.3 オープンな問題の必要性について

オープン・クローズドな問題の役割を踏まえ，オープンな問題の必要性について考察する。算数・数学科の高次目標を達成するためには，先で述べてように知識・技能の定着にとどまらず，必要な知識・技能を場面に合わせて選択し，活用できる

ようになることが大切である。このような観点から，クローズドな問題の役割をみると，知識・技能の定着をはかることはできるものの，必要な知識・技能を選択し活用する力をはかることは難しいのではいかと考える。したがって，オープンな問題はクローズドな問題だけでは難しい総合的な知識・技能の活用面をはかる上で必要であると考える。

次の節では，具体的なオープンな問題を取り上げ，どのような場面で開いている(オープン)のかを明らかにする。

4. オープンな問題の多様性

本節では，具体的なオープンな問題として，島田（1977），竹内・沢田（1984），福永(2012)を取り上げる。それぞれを比較し，オープンな問題の多様性について明らかにする。

4.1　オープンエンドの問題

島田ら（1977）は，「正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題」（島田，1977，p.9）をオープンエンドの問題と名づけた。そのくだりを引用する。

「ふつうの算数・数学の授業で取り上げられる問題には，一般に一つの共通な点がある。それは，それぞれの問題について，正しい答えがただ一通りに決まっているということである。問題に対する解答は，正答か誤答（不完全解答も含めて）のいずれかであり，正答は一つしかない。われわれは，このような型の問題を完結した問題，クローズドな問題と名づけ，これに対して，正答がいく通りにも可能になるように条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶことにする。」（島田，1977，p.9）

このように，島田らは，正答の多様性という意味でオープンの概念を規定している。

具体的なオープンエンドの問題の例は，第 2 節でおはじきの問題を取り上げたためここでは割愛する。

4.2　解決過程が複数存在する問題

解決過程が複数存在する問題とは，解は一意に定まっているが，その解法は複数存在する問題である。この問題をここではオープンプロセスの問題とする。島田はこの種の問題を直接取り上げてはいないが，オープンな問題としていたようである。それは次のようなことから判断できる。

「一方，f から g への抽象化，理想化，簡単化の過程や，本質的な意味での n から o への一般化の過程は，結果が予め決まっていないという意味でオープンエンド（複数の答えがあるという意味―この本ではその意味に用いるが―では必ずしもなく）である。」（島田，1977，p.20）

つまり，解決過程の多様性という意味でオープンの概念を規定している。

具体的な例として，能田(1982)，福永（2012）は「4 つの 4 の問題」を提案している。ここでは，福永(2012)を取り上げる。

問題
4 を 4 回用いて 1 の整数を作りなさい。一通りとは決まっておりません。ただし，数字は〔4,4,4,4〕を全部使って，演算は〔＋，－，×，÷〕を使って，必要ならかっこを用いてよろしい。

（福永，2012，p.90）

解答の例の一部として，次のようなものが考えられる。

・4÷4＋4－4＝1
・4÷4÷4×4＝1
・4÷(4－4＋4)＝1
・（4－4＋4）÷4＝1
・(4×4）÷(4×4）＝1

この問題の出所は，能田（1982）の「開かれた問題」の中で扱われている問題である。そこでは 0～9 を作るものであったが,福永は答えを 1 だけに固定している。答えを 1 つに固定することで，様々な観点から捉え，たくさんの解き方が考えられる問題になる。

4.3　問題から問題へ

竹内・沢田（1984）は，「問題の発展的な扱いによる授業」として「問題から問題へ」を提案している。この活動は「児童・生徒に，与えられた 1 つの問題から出発して，その問題の構成要素となっている部分を，類似なものや，より一般的なものに置き換えたり，その問題の逆を考えたりすること等を通して，新しい問題をつくり，自ら解決したいとするような主体的な学習活動をさせること」(竹内・沢田，1984，p.25）としている。具体的には，次のように説明している。

「最初の問題P_0を解決して,ある知見(知識）K_0が得られた。次にP_0とK_0から，新しい問題P_{11}，P_{12}が立てられて，それらを解決して知見K_{11}，K_{12}，……が加えられた。以下このように進行する。

問題を発展させ，それらを解くことによって得られた知見は，それぞれに先行する知見と比べて，必ずしも新しいものとは限らないが，一般的には先行のものより一般化された，あるいはより深められたものであろう。

また同じ問題を出発点としても，その発展のさせ方は一通りではなく多様であろう。またより意義のある（数学的に価値のある）発展のさせ方はその人の数学的力量や数学的洞察力に，あるいはまた偶然性によることであろう。」（沢田・竹内，1984，pp.15-16）

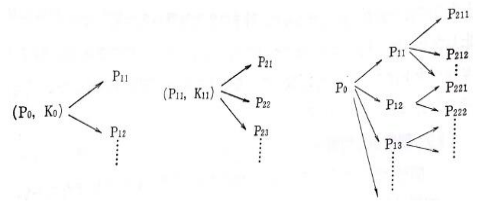


図 2：問題の枝分かれ図式
（竹内・沢田，1984，p.16）

竹内・沢田は，問題に対してそれを発展させるという意味でオープンの概念を規定している。このような考えは，「5+6 となる問題を作ろう」といった問題づくりが教科書においてみることができる。このような問題をここでは，オープンプロブレムの問題とする。

4.4　オープンな問題の拡がり

オープンな問題は，いろいろな解き方だけに限定されるだけでなく，正答の多様性，問題づくりの多様性などオープンは広義に解釈され問題が考案されていることが明らかとなった。3 つの多様性をまとめると次のようになる。

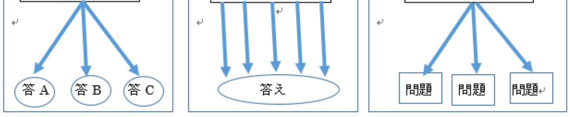


図 3：オープンな問題の種類
（福永，2012，p．19）

こうした解釈は，島田のオープンエンドの問題を発端としており，能田（1982）が 3 つの多様性を取り入れたオープンな問題を扱った指導法を開発したことで，拡がりと深まりをみせたようである。

次の節では，Pehkonen（1995）のオープンな問題の分類を基に，高次目標を捉える上での問題の枠組みについて考察する。

5. オープンな問題の分類枠組み

先行研究によると, Pehkonen（1995）は，世界各国で扱われている問題を初期状況（start situation）と目標状況（goal situation）により分類している。Pehkonen(1995)は分類枠組みを作る上で，オープンの概念について次のように述べている。

「「オープンな問題」の概念は以下のように説明をすることができた。私たちは，オープンな問題の反対から始めると，問題の初期状況と目標状況がクローズドな場合，問題が閉じているというだろう。正確に説明するならば，初期状況または目標状況が開いている場合，つまり閉じていない場合，オープンな問題であるといえる。」
（Pehkonen, 1995, p.55, 訳は筆者による）

初期状況とは，問題に取り組むときの状況である。例えば，「5＋6 になる問題を作ろう」といった場合は，行うことが明確に説明されているためクローズドとなる。一方,「問題をつくろう」といった場合は，どんな問題を作るかが明確でないためオープンとなる。

目標状況とは，問題を解決したときの終着点である。例えば，求める答えが 1 つに定まっていればクローズド，答えが複数存在するものはオープンとなる。

Pehkonen(1995)は，このような初期状況と目標状況の観点から，オープンな問題を表 1 のように整理している。

表 1：初期状況と目標状況によるオープンな問題の分類枠組み

初期状況＼目標状況	クローズド（明確に説明がされている）	オープン
クローズド（明確に説明がされている）	クローズドな問題 オープンプロセスの問題（木沢弘子，1997）	オープンエンドの問題 オープンプロブレムの問題（筆者） 現実生活場面 探究 問題フィールド 問題の変形
オープン	現実生活場面 問題の変形	現実生活場面 問題の変形 学習課題 問題設定

また，この表 1 は Pehkonen(1995)のオリジナルに加えて，オープンプロセスの問題とオープンプロブレムの問題を位置づけた。木沢(1997)は，オープンプロセスの問題を初期条件と目標条件が共に閉じていることから「クローズド・クローズド」に位置付けている。また，筆者はオープンプロブレムの問題は，初期条件がクローズドで目標条件がオープンであることより，「クローズド・オープン」に位置づけられると考えた。

Pekonen（1995）の論文においてはプロセスにおけるオープン性については述べられていない。しかし，第 4 節で明らかとなったようにオープンな問題にはプロセスがオープンな問題が存在する。高次目標である知識・技能の習得を捉える上で，オープンな問題の意義を明確にするためには，初期状況と目標状況に加えてプロセスについても考慮する必要があるのではないだろうか。プロセスを含めることで，問題の分類はより詳細に分けられ，オープンな問題の活用の可能性が広がると考えるからである。このような考えのもと，筆者は次のようなプロセスを含めたオープンな問題の分類枠組みを設定できると考えた。

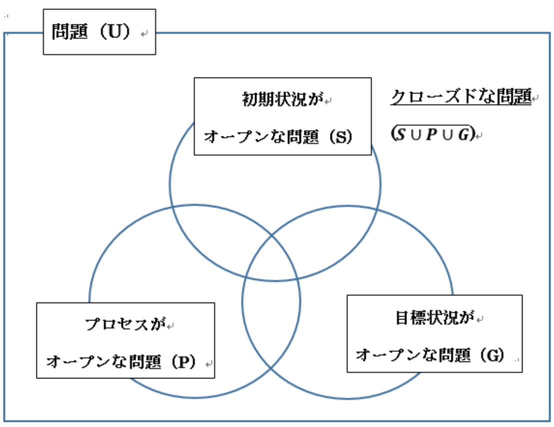


図 4：オープンな問題の分類枠組み
（筆者によるもの）

図 4 において，問題の集合を全体集合 U とする。初期状況（Start situation）がオープンな問題の集合を S，プロセス（Process）がオープンな問題の集合を P，目標状況（Goal situation）がオープンな問題の集合を G とする。そうすると，オープンな問題の集合は，S，P，G の 3 つの和集合($S \cup P \cup G$)となり，クローズドな問題はその補集合($\overline{S \cup P \cup G}$)となる（図 4 参照）。

この分類枠組みに具体的な問題が適用できるか等については，今後の検討が必要である。

6. まとめと今後の課題

本稿では，算数教育における高次目標の知識・技能の習得の観点から，先行研究を基に「オープンな問題」の必要性について考察した。そして，わが国におけるオープンな問題の多様性を明らかにした上で，高次目標を捉える観点より，Pehkonen（1995）のオープンな問題の分類を考察し，オープンな問題の分類枠組みを明らかにした。

その結果，算数教育における高次目標である知識・技能の習得をはかるためには，知識・技能の定着をはかることを目的としたクローズドな問題だけでは難しく，総合的な知識・技能の活用面をはかる上でオープンな問題は必要であるという知見を得た。

わが国におけるオープンな問題の多様性としては，先行研究によりオープンエンドの問題（正答の多様性），オープンプロセスの問題（解法の多様性），オープンプロブレムの問題（問題づくりの多様性）があることが明らかとなった。

高次目標を捉える観点より，先行研究の Pehkonen（1995）のオープンな問題の分類枠組みをみると，初期状況(start situation)と目標状況(goal situation)の観点より分類を行っている。しかし，高次目標をはかる上で，オープンな問題の意義を明確にする

ためには，プロセスにおけるオープン性を含めて考慮する必要があると考えた。初期状況と目標状況に加え，プロセスにおけるオープン性について問題の分類を行うことで，学校現場における活用の可能性が広がると考えたからである。そこで筆者は，プロセスにおけるオープンを含めた分類枠組みを設定できると考えた。分類枠組みが全ての問題を包括していることは間違いないが，この分類枠組みに具体的な問題がどのように適用されるかについてはこれからの課題である。

今後の課題として次の三点があげられる。

・Pehkonen （1995）の分類であげられている「問題フィールド」、「問題の変形」、「問題設定」、「学習課題」，「現実生活場面」が具体的にどのような問題であるかを明らかにすること。

・今回設定できると考えたオープンな問題の分類枠組みに，様々なオープンな問題がどのように適用できるかを検討していくこと。

・先行研究を基にオープンな問題がどのような場面で，どのように活用されているかを明らかにすることである。

これらの課題に取り組み，算数教育における高次目標である知識・技能の習得をはかる指導を目指し，オープンな問題に関する研究をさらに進めていきたい。

【引用・参考文献】

Becker,J.P.& Shimada,S.（1997）, The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics.

Pekonen，E.（1995），Use of open-ended problems.Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik，27（2），55-57.

国立教育政策研究所（2015），「平成 25 年度　全国学力学習状況調査【小学校】報告書」，http://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/data/research-report/13-p-math.pdf

青山庸（2011)，「オープンアプローチによる学習指導と評価に関する実践的研究―小学校算数を中心に―」, 仁愛大学研究紀要，人間生活学部篇 3，23-29.

島田茂（1977)，『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，みずうみ書房.

清水克彦（1998)，「数学教育におけるオープンな問題の概念の再検討―テクノロジーのよる支援可能性を視野に―」, 筑波数学教育研究 17，69-76.

新村出（1998), 『広辞苑第五版』, 岩波書店.

隅谷将光（2009a)，「高等学校数学における「オープンな活動」に関する研究」，全国数学教育学会誌 15(2), 147-153.

隅谷将光（2009b)，「高等学校数学における「オープンな活動」に関する研究」，広島大学大学院教育学研究科，修士論文（未公刊）.

竹内芳男・沢田利夫（1984)，『問題から問題へ　問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善』, 東洋館出版社.

長倉弘典（2013)，「算数における関連づけの重要性についての研究―児童の学習過程の分析を手がかりにして―」, 上越数学教育研究 28，49-58.

能田信彦（1983)，『算数・数学科　オープンアプローチによる指導の研究』, 東洋館出版社.

能田信彦（1982)，「学校数学における「開かれた」問題と指導についての一考察」，筑波数学教育研究, 第 1 号, pp.107-117.

坪田耕三（2006)，『算数楽しく　オープンエンド』，教育出版.

福永敬（2012)，『算数を 100 倍楽しくする！オープンアプローチ』，明治図書.

文部科学省（2008)，『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.