

高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究

－微分することの意味理解に着目して－

山口 昌広

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

現在の高等学校での微分学習は，とかく形式的な計算の習熟にだけ終始しがちで，生徒の「微分する」ことの意味理解が十分とは言えない状況にある。高等学校数学Ⅱの微分の単元を終えた生徒に，「微分する」とはどういうことかと問うとき，その問いに答えることができないことが少なくないのである。つまり，生徒は，形式的な微分計算はよくできるようになるのだが，微分の意味理解には至っていないと考えられる。

「微分する」ことの意味理解とは，次に述べることを理解することである。「微分する」とは，関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることである。導関数 $f'(x)$ とは，関数 $f(x)$ において， x の各値 a に対して，微分係数 $f'(a)$ を対応させて得られる一つの新しい関数である。微分係数 $f'(a)$ とは， x が a と異なる値 b を取りながら a に限りなく近づくとき， x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率がある一定の値に限りなく近づく場合のその一定の値である。関数 $f(x)$ の平均変化率とは，関数 $f(x)$ において， x が a から b まで変化するとき， y の変化量 $f(b)-f(a)$ の x の変化量 $b-a$ に対する割合 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である。本稿では，これに加え，微分係数がどのように活用されているかの

理解も「微分する」ことの意味理解に含めることにしたい。

高等学校学習指導要領解説数学編理数編には，次のような記述がある。「現在，高等学校には，数学の学習に関心や意欲を見いだせない生徒がいることも事実である。そのような高等学校の現状を踏まえ，数学の学習が単なる問題の解法の記憶にならないよう絶えず数学のよさや数学を学ぶ意義を認識させることに留意し，数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることが大切である」(p.17)。この高等学校の現状と指導の留意点は，微分学習に深く関わることである。形式的な微分計算の習熟だけでは，微分のよさや微分を学ぶ意義は到底見いだせないであろう。「微分する」ことの意味理解が必要である。高等学校数学Ⅱの微分学習において，「微分する」ことの意味理解に着目した指導の改善が今まさに求められていると考える。

本稿の目的は，微分学習における生徒の「微分する」ことの意味理解の様相と「微分する」ことの意味理解につながる指導の在り方を明らかにすることである。

次の第2節において，現在の高等学校数学Ⅱにおける微分学習の内容構成を高等学校学習指導要領や各教科書から精査し，微分学習の内容構成の類型化を図る。その微

分学習の内容構成の類型化を基に、考えられる生徒の「微分する」ことの意味理解の様相や「微分する」ことの意味理解に必要な学習内容について探る。第3節で、微分学習における「微分する」ことの意味理解に関わる学習内容を探ることで、微分学習の導入時における指導上の留意点の示唆を得る。また、既に微分学習を終えているものに「微分する」ことの意味理解に関するアンケート調査を実施することで、対象者の「微分する」ことの意味理解の様相について探る。第4節では、高校生の「微分する」ことの意味理解の様相と「微分する」ことの意味理解につながる指導の在り方を明らかにする。第5節では、本稿のまとめと今後の課題について述べる。

2. 高等学校数学Ⅱにおける微分学習の内容構成について

本節では、5社の教科書を参考に高等学校数学Ⅱにおける微分学習の内容構成を明らかにする。その明らかとなった内容構成を基に、「微分する」ことの意味理解が困難な箇所を探る。

高等学校数学Ⅱにおける微分学習の導入時の内容構成に、次に示す2つの大きな違いがみられた。

- ① 微分学習の導入時の構成の違い
- ② 微分係数や極限值に関わる説明の記述の違い

①については、次に示す3つの内容構成がみられた。

- (1) 平均変化率→極限值→微分係数
→微分係数の図形的意味→導関数
 - (2) 平均の速さ→瞬間の速さ→極限值
→平均変化率→微分係数
→微分係数の図形的意味→導関数
 - (3) 平均の速さ→瞬間の速さ→極限值
→平均変化率→微分係数→導関数
→微分係数の図形的意味
- (1)と(2)、(3)の違いは、平均の速さを扱

っている内容構成と扱っていない内容構成かである。(1)、(2)と(3)との違いは、微分係数を定義したのちに、すぐに微分係数の図形的意味について学習するか導関数について学習するかである。

②については、極限值を定義する方法として、次の2つがみられた。

- [1] 極限値の定義を式と説明のみで行うもの
- [2] 表や図と共に極限値を定義するもの

①の中での違いと②の中での違いにおいて、教師の指導が不十分であるならば、生徒は、次のような意味理解の様相を示すことが懸念される。

(1)の内容構成においては、平均変化率からの導入では、生徒が極限値を考える必要性を感じにくいことが挙げられる。(1)と(2)の内容構成においては、生徒が「微分する」ということは、接線の傾きの変化を表す関数を求めるという捉えではなく、接線の傾きを求めることという偏った捉えをしてしまいかねないことがある。

[1]においては、生徒にとって極限値を表す式の意味を捉えることができにくいことが考えられる。[2]においては、生徒が極限値を近似値として捉えてしまうことが懸念される。

精査した微分学習の内容構成から、「微分する」ことの意味理解には極限値の「限りなく近づく」ということの意味を生徒が捉えることが必要であると考えられる。つまり、平均変化率から微分係数に至るまでの極限の考えと平均変化率の図形的意味から微分係数の図形的意味に至るまでの極限の考えを理解することに大きな困難性があると考えられる。

3. 「微分する」ことの意味理解について

本節では、第2節で述べた困難性を生徒が乗り越えるための指導を明らかにするた

めに、高等学校数学Ⅱにおける微分学習が始まる前の段階での「限りなく近づく」という学習の考えと接線の考えについて探る

そして、既に微分学習を終えたものの「微分の基礎となる極限の考え」と「微分における接線の考え」の2つの学習における理解の定着の様相を探るために、アンケート調査の結果を考察する。

3.1 「限りなく近づく」という考えが関わる学習について

小学校算数から高等学校数学Ⅱの微分学習までに「限りなく近づく」という考えが関わる学習がどのようになされているかを精査した。その結果、次のことがわかった。「限りなく近づく」ということに関わる学習は、円の面積と周長、反比例、三角関数や指数・対数関数での漸近線の学習でなされている。これらの学習の考えを整理すると、次のことが言える。微分学習が始まる前の段階での「限りなく近づく」という考えが関わる学習は、近づく値と近づける値の区別がなされていない。つまり、これまでの学習における「限りなく近づく」という学習は、感覚的に行われている。それに比べ、微分学習における極限の考えは、「伴って変わる2変量について、一方がある値と異なる値を取りながら、その値に限りなく近づくとき、もう一方がある一定の値に限りなく近づく場合、その一定の値を極限值という」という「微分の基礎となる極限の考え」(極限値の捉え)が必要となる。したがって、微分学習においては、次の2つを生徒が捉える必要がある。

- ① 一方がある値と異なる値を取りながら、その値に限りなく近づくということ
- ② それに伴って、もう一方がある一定の値に限りなく近づくということ

教師においては、上記の2つのことを生徒に意識させながら指導する必要がある。

3.2 接線の考えについて

中学校数学から高等学校数学Ⅱまでの接線の考えについて考察した。その結果、円の接線の考えは、円周上の2点を通る直線をずらしていくことで、円と1点と共有する直線を接線というのである。

微分学習においては、関数 $f(x)$ 上に基準となる点 A があり、点 B を点 A に限りなく近づくという考えとそれに伴って、直線 AB が直線 AT に限りなく近づくという考えである。図で示すと次のようになる。

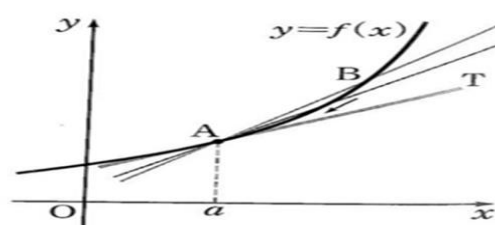


図1：微分における接線の考え
(高橋陽一郎 他(2012). p. 198)

「微分学習における接線の考え」は、極限の考えを必要とするものであり、円の接線の考え方とは大きく異なっている。微分学習においては、円の接線の考えとの違いをおさえながら、「微分における接線の考え」を捉えさせなければならない。

3.3 「微分する」ことの意味理解に必要な活動について

「限りなく近づく」という考えの違いと接線の考えの違いから、微分学習の導入時の指導においては、「微分の基礎となる極限の考え」と「微分における接線の考え」を生徒が捉えることが必要であることを述べた。そこで、次の3つの活動が必要不可欠である。

- ① 平均の速さから、瞬間の速さを考えていく活動
 - ② 近似値の計算を行い、極限値を考える活動
 - ③ 極限としての接線を作図する活動
- ①の活動において、瞬間の速さはどう

求めたらよいかを考えることにより、「微分の基礎となる極限の考え」に至ることが可能となる。②の活動において、生徒は初めて「微分の基礎となる極限の考え」について学習する。「微分の基礎となる極限の考え」を身に付けるためには、近似値の計算は欠くことのできないものと考えられる。③の活動を通じて、微分で対象とする接線は、円の接線とは異なり、極限の考えを必要とするものであることを学習する。

生徒が「微分の基礎となる極限の考え」と「微分における接線の考え」を理解することに困難性があるのかという根拠を示す必要がある。

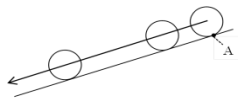
3.4. アンケート調査について

平成25年7月25日に国立大学教育学部系の大学生及び大学院生17名に「数学Ⅱにおける微分の学習と指導の改善を目的とした調査」として質問用紙に回答させる形の調査を行った。このアンケート調査の目的は、微分学習を終えた大学生及び大学院生の「微分する」ことの意味理解の定着の様相をみるためである。ここでは、内容の一部を扱うこととする。

3.4.1. 瞬間の速さについてのアンケート調査の結果と考察

ここでは、瞬間の速さについてのアンケート調査の内容と結果を示したのちに、対象者の瞬間の速さに関する捉えを明らかにしていく。設問と回答は次の通りである。

VI. 右図のような長い斜面があります。A地点に球を置いて、静かに手をはなしたところ、球は斜面を転がっていきました。その時、球の転がった距離と時間の関係は、次のようになります。



時間(秒)	0	1	2	3	4	5	...	10	...
距離(m)	0	1	4	9	16	25	...	100	...

- (1) 1秒後から2秒後までの平均の速さは、どのようにして求めますか。
- (2) 2秒後から5秒後までの平均の速さは、どのようにして求めますか。
- (3) 2秒後の「瞬間の速さ」は、どのようにして求めますか。上の(1)、(2)の平均の速さを求めるのと同様の方法で求めることができますか。微分計算を用いないで求める方法とその考え方を下の枠の中に詳しく説明してください。

図2：アンケート調査(瞬間の速さ)の設問

回答	人数
・目盛り÷時刻を計算する。	2名
・近似値が瞬間の速さである。	2名
・極限値の式を用いる。	1名
・2秒後前後の平均の速さを求めてその平均を出す。	3名
・わかりません、無回答、その他	9名

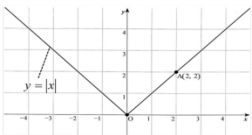
表1：アンケート調査の結果

瞬間の速さの解答について、極限の考えに近い回答をしたものは17名中2名であった。この2名については、近似値を瞬間の速さと考えており、極限の考えまで至っていなかった。また、2名とも瞬間の速さを平均の速さと同様の方法で求められないという記述がみられなかった。このことから、既に微分学習を終えたほとんどの対象者は、「微分の基礎となる極限の考え」を捉えることができていないことが明らかとなった。

3.4.2. 接線に関するアンケート調査の結果と考察

ここでは、接線に関するアンケート調査の内容と結果を示したのちに、対象者の「微分における接線の考え」についての理解を明らかにする。設問と結果は次の通りである。

X. 右図は、関数 $y = |x|$ のグラフです。次の問いに答えてください。



- (1) このグラフ上の点A(2, 2)における接線はありますか。そのように考えた理由を下の枠に書いてください。
- (2) このグラフ上の原点Oにおける接線はありますか。そのように考えた理由を下の枠の中に書いてください。

図3：アンケート調査(接線)の設問

(2)	人数	理由
ある	9名	・原点を通る直線が引けるから。 ・Aに接している線だから。 ・接線の方程式より求められるから。 ・点0だけを通り、グラフに交わらない直線が引けるから。 ・x軸が接線であるから。 ・原点1点で接している直線があるから。 ・点Aを頂点にした2次関数、点Aと接する円などが考えられるため。
ない	6名	・貫通してしまう。 ・原点に接する直線は存在しても、グラフに垂直になる直線は存在しない。 ・接線が無数に存在するから。

		・接線は曲線に接する線だから。
		・微分可能でないため。
		・無回答2名。

表2：アンケート調査の結果

ここでは、設問(2)の回答について分析・考察する。 $y = |x|$ のグラフ上の原点における接線がないと回答しているものは、17名中6名であった。ないと答えたもののうち、理由を説明できているものは2名であり、微分可能でないという理由であった。極限としての接線という説明しているものはみられなかった。また、接線があると回答している対象者の理由についても、同様に、極限としての接線という説明をしているものはみられなかった。「微分における接線の考え」を既に微分学習を終えたものでも捉えきれていないことが明らかとなった。

アンケート調査の考察から、「微分の基礎となる極限の考え」と「微分における接線の考え」を捉えきれていないことが明らかとなった。その原因を探る必要がある。

4. 調査授業の実践について

第4節では、微分学習の導入時における生徒の「微分する」ことの意味理解の様相と「微分する」ことの意味理解につながる指導の在り方を明らかにするために、調査授業の実践のデータを分析・考察する。

4.1. 調査授業の実践の内容と分析方法

これまでの研究を踏まえ、微分学習の導入時における学習指導案を作成し、長野県のS高等学校(3年選択クラス(数学)11名)での調査授業の実践を依頼し、平成25年10月22日(火)、29日(火)、31日(水)に、長野県私立高等学校の高校3年生選択コース(数学)11名を対象とし、微分学習の導入時における瞬間の速さの授業と微分係数の図形的意味の授業を計4時間分実施した。

ここでは、瞬間の速さを考える授業の内容と分析・考察の方法を述べる。授業の目的は、瞬間の速さについて考えることで、

「微分の基礎となる極限の考え」を捉えさせるものである。瞬間の速さを j 考える授業における学習指導案の流れは次の通りである。

- ① 斜面を転がる鉄球の動きについて考察する。(距離が時間の2乗に比例するように設定した教具を使用)
- ② 表から各々の時刻における目盛りと距離、平均の速さを求める。
- ③ 瞬間の速さをどのようにして求めればよいか考える。
- ④ 近似値の計算を行い、瞬間の速さが平均の速さに限りなく近づくということ捉える。

①については、下の図のような教具を使用し、目盛り0の位置から鉄球を静かに放すと3秒後に目盛り9の位置に鉄球があるようにし、鉄球の動きの変化の様子を捉えられるようにした。



図4：教具

②については次のような表を生徒に配布し、瞬間の速さを求めることができないことに生徒が気付けるようにした。

表を完成させよう！ 姓 名前

時刻	0	...	1	...	2	...	3	...	4	...	5	...
目盛り	0	...		...		...		...		...		...
距離												...
速度												...

図5：表

③については、②の活動で使用した表から瞬間の速さを求めることができないことを踏まえ、生徒がどのようにして瞬間の速さを考えればよいかを考えさせる。

④については、生徒が近似値の計算を行うことで、平均の速さが求めたい瞬間の速

さに限りなく近づいていくことを確かめさせることで、極限の考えを捉えさせる。

分析・考察については、次のような方法で行った。調査授業の実践の様子を2台のビデオカメラで撮影し、授業実践におけるプロトコルデータを取る。授業後にアンケート調査を行い、その結果を基にインタビュー調査を行う。これらのデータを基に、生徒の「微分する」ことの意味理解の様相について分析・考察していく。

4.2. 第1時限目の授業実践の分析・考察

ここでは、まず、生徒が瞬間の速さを考えるうえで、どのような様相を示したのかということを場面ごとに述べる。それを踏まえ、生徒の「微分する」ことの意味理解の様相を明らかにしていく。

4.2.1. 斜面を転がる鉄球の速さを求める

場面

ビデオデータからは、0秒後から3秒後までの平均の速さを求めている生徒が3名みられた。また、調査授業後のインタビュー調査のプロトコルデータからは、平均の速さを計算していたと回答した生徒が1名みられた。したがって、この場面からは、どのような速さも距離を時間で割ることで求めることができると生徒は考えていると考えられる。

4.2.2. 瞬間の速さの時間幅について考え

場面

この場面では、生徒が表に記入できない速さがあることを確認した後、授業者が瞬間の速さにおける時間幅はどうかという発問を4名の生徒に行っている。4名の答えを次に示す。

- ・短くなっている。
- ・狭くなっている。
- ・短くなっているというか狭くなっているというか。
- ・わかりません。

生徒達の発言から考察できることは、生

徒は、改めて瞬間の速さを考えると瞬間の速さにおける時間幅は、短くなるや狭くなると考えることができていることがわかる。

4.2.3. インタビュー調査のプロトコルデータから

インタビュー調査のプロトコルデータから、授業を終えた生徒が、瞬間の速さをどのように理解したのかということを分析・考察した。ここでは、授業者が提示した近似値の計算を行えた2名の生徒を対象とした。その2名の生徒を本稿ではS1とS2とする。

S1は、瞬間の速さは求めることができないが、時間幅を限りなく0に近づけた時の速さも瞬間の速さであると考えていた。

S2は、時間幅を限りなく0に近づけた速さは平均の速さということを理解していた。しかし、瞬間の速さの基準がわからないと考えていた。

この2名の考えから考察できることは、課題として出された近似値の計算をすべて行えた上記の生徒においても、瞬間の速さにおける時間幅を0と考えることができないということが明らかとなった。表から瞬間の速さを求めることができないと気が付いた生徒や近似値の計算を行った生徒でさえ、瞬間の速さにおける時間幅を0と考えることができないのである。

4.2.4. 調査授業の実践の考察

生徒は、瞬間の速さについて考える場合、次のような様相を示すと考えられる。生徒は、どのような速さでも距離を時間で割ることで求めることはできると生徒は考えている。しかし、改めて変化している物体の速さに注目したところ、これまでの平均の速さと同様に求めることができない速さがあることに気が付く。そこで、瞬間の速さにおける時間幅と平均の速さにおける時間幅を比べ、瞬間の速さにおける時間幅は短くなっていき、限りなく0に近い時間幅を

取ったときの速さが瞬間の速さであるという考えに至る。しかし、瞬間の速さにおける時間幅は0であるという理解にまでは至らなかった。

以上のことから、生徒が瞬間の速さにおける時間幅を0と考えるまでには4つの段階があると考えた。生徒が瞬間の速さにおける時間幅を0と考えるまでの4つの段階は次の通りである。

- ① 瞬間の速さを平均の速さと同様に求められると考える段階
- ② 時間幅を短くしていくと考える段階
- ③ 時間幅を限りなく0に近づける段階
- ④ 瞬間の速さにおける時間幅を0と考える段階

インタビュー調査のプロトコルデータから、生徒は、瞬間の速さにおける時間幅が0であると考えようになるまでに大きな困難性があることが認められた。したがって、③の段階から④の段階に至るまでの困難性を考慮した指導に着目する必要がある。

4.3. 瞬間の速さにおける時間幅を0と捉えさせるための指導について

ここでは、授業実践のデータにおける高校生と授業者のやり取りを基に、高校生が瞬間の速さにおける時間幅を0と考えることができるようになるために必要な事項を考察する。

授業実践のデータからは、教師が生徒に瞬間の速さにおける時間幅を考えさせている場面がみられた。生徒は、平均の速さと瞬間の速さを比べると発言しているのだが、授業後のインタビュー調査からは、瞬間の速さにおける時間幅が0であるという理解には至っていないことが明らかとなっている。生徒は、どのような時間幅でも時間幅がある速さは平均の速さであるという平均の速さの概念を理解できていないと考えられる。瞬間の速さにおける時間幅が0であると生徒が捉えるための学習として、次の

①、②の事項に関する知見を得た。

- ① 生徒がこれまで学習した速さを平均の速さとして復習すること
- ② 教師が平均の速さの意味を考えさせる指導を行うこと

①については、瞬間の速さを考えていく前に、生徒がこれまでに学習している速さは全て平均の速さであったことを意識化する必要がある。②については、瞬間の速さの時間幅が0であると考えた段階に生徒を導くには、平均の速さの意味を考えさせる指導が必要となる。その指導とは、様々な平均の速さを計算で求めさせた上で、式の意味やその時間幅では速度の変化はどうか、等を生徒に考えさせるものである。

5. 本稿のまとめと今後の課題

本稿では、高等学校数学Ⅱの微分学習の「微分する」ことの意味理解に着目し、第4節で述べた高校生の微分学習の導入時における「微分する」ことの意味理解の様相と「微分する」ことの意味理解につながる指導の在り方の一端を明らかにした。

第2節では、高等学校数学Ⅱの微分学習の内容構成を精査することで、生徒の「微分する」ことの意味理解の様相について考察した。第3節では、「微分する」ことの意味理解に関わる「限りなく近づく」という学習と接線の考えについて探った。その結果、第3節で述べられている3つの活動「微分する」ことの意味理解に至るには必要不可欠であることを述べた。「微分する」ことの意味理解に関するアンケート調査からは、既に微分学習を終えたものも「微分の基礎となる極限の考え」と「微分における接線の考え」を捉えきれていないことが明らかとなった。第4節では、第2節と第3節を踏まえ、学習指導案を作成し、調査授業の実践の分析・考察を行った。その分析と考察からは、生徒が、瞬間の速さの時間幅を0と考えるに至るまでには、4つの

段階があると考えることができた。インタビュー調査のプロトコルデータからは、生徒は瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることに困難性がみられた。そこで、調査授業の実践データから、次の必要性を述べた。生徒が、これまでに計算してきた速さは全て平均の速さであるということを認識する必要がある。教師は、様々な時間幅のある平均の速さを生徒に求めさせた後に、瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることができない段階で、改めて平均の速さの意味を生徒に考えさせる指導が必要である。

調査授業の実践から次のような生徒の「微分する」ことの意味理解の様相が明らかとなった。生徒は、これまでの学習において、平均の速さを求める活動しか行っていない。そのため、刻々と変わる瞬間の速さを求めるとなると、今までと同じように求めることができない速さがあることに気が付く。教師が、その速さが瞬間の速さであると説明するのだが、生徒は瞬間の速さにおける時間幅が 0 であると考えるところまでは至らなかった。

明らかにした生徒の「微分する」ことの意味理解の様相を踏まえると、「微分する」ことの意味理解につながる指導は次のようになされなければならないと考える。生徒は、瞬間の速さにおける時間幅が 0 であると考えることができにくい。教師が瞬間の速さにおける時間幅が 0 であると説明したところで、生徒は、それを理解することは難しい。生徒がその困難性を乗り越えるためには、生徒が瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えられない段階で、教師が平均の速さの意味を改めて生徒に考えさせるという丁寧な指導が必要である。生徒自身でその困難性というハードルを乗り越えることで、微分学習に必要な極限の考えが獲得されるものと考えられる。

本稿の目的は、微分学習における生徒の

「微分する」ことの意味理解の様相と「微分する」ことの意味理解につながる指導の在り方を明らかにすることであった。「微分する」ことの意味理解には、次の大きく 2 つの指導が必要である。

- ① 瞬間の速さをどのようにして求めるのかということを生徒に考えさせ、近似値の計算を使用し、平均の速さが瞬間の速さに限りなく近づくことを確かめさせる指導
- ② 瞬間の速さについて考えたことを基に、極限としての接線を生徒が作図する活動を通して、微分学習で対象とする接線の定義を捉えさせる指導

「微分する」ことの意味理解につながる導入時の指導においては、上記のような丁寧な指導が求められることを本稿において、明らかにすることができた。

今後の課題は、本研究において行うことができなかった微分係数の図形的意味に関する学習を行う授業の実践的な検証と、微分学習の単元全体において「微分する」ことの確かな意味理解につながる指導改善を進めていくことである。

【引用・参考文献】

- CARL B. BOYER. (1959). *The concepts of the calculus, a critical and historical discussion of the derivative and the integral*. New York: Dover.
- 高橋陽一郎 他(2012). 『詳説数学Ⅱ』. 啓林館. p. 198.
- 塚原久美子(2002). 『数学史をどう教えるか』. 東洋書店.
- 文部科学省(2009). 『高等学校学習指導要領 解説数学編理数編』. 実教出版. p. 17.
- 山口昌広(2014). 「高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究 - 微分することの意味理解に着目して -」. 『平成 25 年度上越教育大学大学院学位論文』.