上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.33-42.

確率の困難性に関する基礎的研究

五十嵐慶太
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

確率の指導学習に関する数学教育学の先行研究を見ると，その困難性は古くから指摘されており，今日でも子どもたちが確率を学習する際の障害となっていることが分かる (Fischbein & Schnarch, 1997). 確率の困難性は，これまでミスコンセプションという文脈でしばしば研究されてきた．そこでは，確率の問いに対して用いられる誤った直観や発見的方法 (ヒューリスティック) が多く特定され，これらが要因で誤った解答を与えるとの説明がされてきた．

一方で，直観やヒューリスティックといったものは，いずれもある問いへの回答を短時間で得ようとした際にもっとも用いられるもののように思える．その問いについて時間をかけより深く考察すれば，直観やヒューリスティックのみならず，それらとは異なる様々な思考が用いられるのではないだろうか．例えば，十分に考える時間があれば，確率を判断する際に直観のみに頼るのではなく，樹形図などを用いて確率の計算を試みることもあろう．もし，その結果，正しい解答を得ることができないのであれば，そこには直観やヒューリスティックとは次元の異なる困難性が存在すると考える．そして筆者は，この困難性こそが，日常の不確かな事象を数学的に考察する際の困難性であり，その克服が不確かな事象を数学的に扱うことを可能にする確率学習の一つのステップになると考えた．

そこで，筆者は，先行研究で指摘されてきた確率の代表的な誤答を与える問題において，学習者が問題に対しより深く考察した際の思考の様式を明らかにし，学習者がもつ様々な困難性を特定することを目的した研究を進めてきた．本稿では，その研究成果の概要を示したい．なお，全ての分析結果をここで示すことはできない. 詳細は, 筆者の修士論文や五十嵐・宮川 (2013)，五十嵐 (2014) を参照いただきたい．

2. 研究の方法

本研究は,「時間軸の問題」と「病院の問題」という 2 つの問題に対する学習者の解決過程の分析からなる．これらの分析を通して，直観やヒューリスティックとは異なる，時間をかけより深く考察した際のいくつかの困難性を特定してきた．その研究方法は次のようであった．まず確率の困難性に関する先行研究を整理し，そこで扱われている確率の困難性を示す問題の中から，本研究で用いる調査問題を選定した．そして，調査を実施する前に，調査問題を解く際に必要な知識は何か，その際いかなる困難性が生じうるか検討した．こうした分析の結果は，調査で収集したデータを分析する枠組みとなると期待したためである．一方で，確率の困難性の分析においては，この分析の枠組みのみならず，学習者の思考

および確率そのものをより明確に捉えることのできる理論的枠組みが必要と考えた．そこで，本研究では，確率に関する営みを捉えることのできる理論的枠組みを提案するとともに，先行研究の中から学習者の思考を捉える理論的枠組みを選定した．そして，大学生・大学院生を対象に，調査問題の解決過程についてのデータを収集した．調査は，学習者がペアで問題に取り組むインタビュー形式の調査である．さらに，収集したデータを理論的枠組みの視点から分析することで，学習者がもつ困難性を特定した．

次節以降，本研究で用いた「時間軸の問題」と「病院の問題」の概要，分析に用いた理論的枠組み，2 つの問題に潜む困難性の分析結果を述べる．

3. 調査問題

本研究では，数学教育学の確率の困難性についての代表的な研究である Fischbein & Schnarch (1997) を参考に「時間軸の問題」と「病院の問題」を用いて研究を進めることとした．以下にその概要を示す．

(1) 「時間軸の問題」

調査に用いた「時間軸の問題」は以下の通りである．以下は，Fischbein & Schnarch (1997) が用いたものを松浦 (2006) が訳したものである．また，問題 (3) は筆者が追加した（通常は問題 (2) まで）．

一郎君と二郎君と三郎君は，それぞれ，2 つの白玉と 2 つの黒玉が入った箱を受け取ります．

(1) 一郎君は，自分の箱から玉を一つ取り出し，それが白玉であることを確認します．2 つ目に取り出す玉が白玉である可能性は，黒玉である可能性より，小さいですか，同じですか，それとも大きいですか．

(2) 二郎君は，自分の箱から玉を一つ取り出し，それを見ずに横に置きます．そして，2 つ目の玉を取り出し，それが白玉であることを見ます．このとき，1 つ目に取り出した玉が, 白玉である可能性は, 黒玉である可能性より，小さいですか, 同じですか, それとも大きいですか.

(3) 三郎君は，自分の箱から玉を一つ取り出し，それを見ずに横に置きます．そして，2 つ目の玉を取り出して，それも見ずに横に置きます．そして，3 つ目の玉を取り出し，その玉が白玉であることを確認しました．このとき，1 つ目に取り出した玉が，白玉である可能性は，黒玉である可能性より，小さいですか，同じですか，それとも大きいですか．

「時間軸の問題」は，Falk (1979) が最初に取り上げた条件付き確率に関する問題である．いずれの問いにおいても「小さい」が正答である．この問題は，時間的に後のことが前のことに影響を与えることはないとする，人間の意思決定の際に用いられる“因果関係の原理”が「同じ」という誤った解答へと導くとしばしば説明される．一方で，この問題に対し時間をかけより深く考察した際には，上述した困難性の他，適切な標本空間が選択できない，確率が求められないといったモデル化に関する困難性が考えられる．

(2)「病院の問題」

「病院の問題」は以下の通りである．これは，Tversky & Kahneman (1974) が用いたものを筆者が訳したものである．

「ある街に 2 つの病院がある．小さい病院は, 一日平均約 15 人産まれ, 大きい病院は, 一日平均約 45 人産まれる. 男の子が産まれる確率は，約 50%である．(しかしながら，50%以上男の子が産まれる日もあれば，50%以下の時もある．) 小さい病院では，60%を表す 9 人より多く男の子が産まれた

日が，一年間記録されている．大きい病院では，その 60%を表す 27 人以上の男の子が産まれた日を記録した．2 つの病院のうち, どちらがそんな日が多いであろうか？」

「病院の問題」の正答は「小さい病院」である．この問題は，標本の大きさを無視し，代表性のヒューリスティックを適用してしまう問題として Tversky & Kahneman (1974) が取り上げたものである．代表性のヒューリスティックを適用すれば，母集団がもつ代表的な特性，ここでは男の子と女の子が産まれる確率がそれぞれ等しいことを，男の子が 60%以上産まれる日数にも適用し，どちらの病院も「同じ」と解答してしまうのである．この問題の解決には，確率と統計の 2 つのアプローチが可能である．したがって，それぞれの場合に用いられる知識や技能，さらには直面する困難性は大きく異なることが予想される．

4.「時間軸の問題」の分析

ここでは,「時間軸の問題」に対する調査対象者の解決過程の分析について述べる．分析に用いたデータは，筆者が所属する大学の学部 1 年生が, ペアで「時間軸の問題」（9 ペア計 18 名）に取り組んだ際のビデオデータと解答用紙である．調査では，はじめに直観的に解答してもらい，その後互いに解答の妥当性を議論してもらった．分析においては，五十嵐・宮川 (2013) による，物質世界・仮想世界・数学世界の 3 つの世界で確率を捉える枠組みを用いた．以下では，この枠組みの概要と，データの分析事例を示す．なお，これらの詳細は，五十嵐・宮川 (2013)，五十嵐 (2014) を参照のこと．

(1) 確率を 3 つの世界で捉える枠組み

学校数学における確率が現実とのつながりが強いことは，周知の事実であろう．そのため筆者らは，数学と現実との関わりにおいて，確率を捉えることができるのではないかと考えた．筆者らの提案する枠組みでは，現実をその性格に応じて物質世界と仮想世界に分け，そして数学世界を加えた 3 つの世界で確率を捉える．

物質世界とは, “もの” を実際に見たり触ったり, 知覚することのできる世界であり, 仮想世界とは，物質世界とは異なる想像上の世界で，物質世界には存在しない理想的なものや状況が存在する世界である．そして数学世界とは，数学的対象が存在する抽象的な世界である．

枠組みの視点からすれば，実物のさいころや，それを用いた実験などは物質世界のものである．したがって，統計的確率は, 物質世界における実験や操作によって得られた数学世界の数学的モデルと捉えられる．一方，学校数学などでは,「正しくつくられたさいころ」などと表現され (一松ほか, 2012, p. 160)，どの目も同様に確からしく出ることを前提とする．しかし，そのようなさいころは物質世界には存在しないため, それは仮定に基づき理想化された世界である仮想世界のものと捉えられる．したがって，数学的確率は，仮想世界における仮定をモデル化した結果，数学世界における標本空間とそこでの根元事象が等確率というモデルに基づいて得られる数学世界の数学的モデルと捉えられる．また数学世界は, 確率や標本空間といった数学的対象や数学的概念が存在する世界である．

本枠組みを分析に用いることで，学習者が確率の問いを解決する際の，仮想世界の仮定と数学的モデルが明確になる．この 2

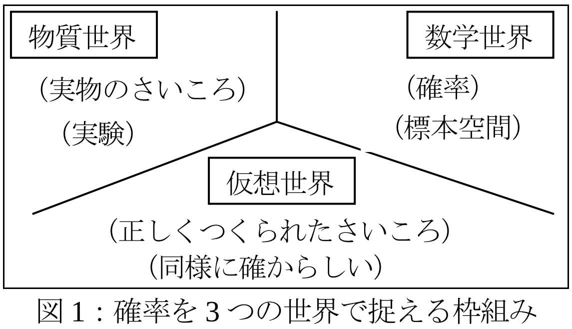

図 1：確率を 3 つの世界で捉える枠組み

つの視点からデータを分析することで，条件付き確率に関する困難性を特定できると期待する．

(2) データの分析事例

ここでは,「時間軸の問題」に対する学生 α, β による問題解決過程の分析を示す. なお，問題 (1) はいずれも正答を与えたため，主に問題 (2) (3) の分析を示す.

①学生 α の思考

学生 α は問題 (2), (3) いずれも「同じ」と解答した．問題 (2) の根拠は「1 つ目に取り出すときは白と黒が 2 個ずつあるから 1/2」というものであった．問題 (3) の根拠についても，1 回目 2 回目に連続で白が出てはいけないということを気にしつつも，先と同様に 1 回目に引く状況から「同じ」とするものである．α は,「2 回目に白玉を取り出す」「3 回目に白玉を取り出す」といった仮想世界の仮定を含めてモデル化していない．つまり「白玉 2 個黒玉 2 個ある」という仮想世界の仮定だけを用いて，1 回目の箱の状況を$\Omega = \{白_1, 白_2, 黒_1, 黒_2\}$という標本空間でモデル化し，その根元事象を等確率とし，$P(白_1 \cup 白_2) = P(黒_1 \cup 黒_2) = 1/2$ という数学的モデルを得たことにより「同じ」という解答に至ったのである．

このようにモデル化する要因は，α の“動作を行った瞬間に確率が決まる”とする考えにあると考える．この考えは「場面の内在的構成要素としての確率」という考えであり，因果関係の原理を適用することを強めるもの(Falk, 1979)と指摘されている．その結果，1 回目の確率を考える際に,「2 回目に白玉を取り出す」「3 回目に白玉を取り出す」といったことが未来のことであるため，仮想世界の適切な仮定を置くことができないのである．したがって，こうした確率に対する考えが，仮想世界の仮定を特定する際の障害となっているのである．以上のように考えれば，α の困難性は，確率が物質世界もしくは仮想世界の場面に内在しているという考えのために，採用する標本空間によって確率が変わりうるものであるといった認識がないことにあるといえよう．

②学生 β の思考

ここでは問題 (3) に対する β の解決過程の分析を示す．β は，問題 (3) の最終的な解答を「小さい」としたものの，納得した様子ではなかった．

問題 (3) では，2 つ目に黒が出ると仮定し，図 2 のように 3 回の試行における確率をそれぞれ計算した．その結果，1 回目 2 回目に黒が連続で出にくいことを指摘する．その後, 起こり得る全ての場合を描きだし，3 回目白の場合に 1 回目黒を取り出す場合が多いことから「小さい」という解答に至った．ただ β は，黒が 2 連続で取り出されることについてうまく説明できず次のように述べる．

169 β そしたら 1 個目が黒 2 つ白 1 つになったので，あでもちょっとこいつ(黒黒)…
171 β 黒黒が連続っていうのはあるんですけど，答え出せっていわれたらこうなるかなって．

β には，モデル化に関する困難性が見られる．ここでは, 3 回の試行全体に対して，つまり Ω={黒黒白, 黒白白, 黒白黒, 白黒白, 白白黒, 白黒黒}に対して，確率を定めなければならない．しかし，β のモデル化は，3 回の試行全体をモデル化したものではなく，図 2 にあるように 1 回目 2 回目 3

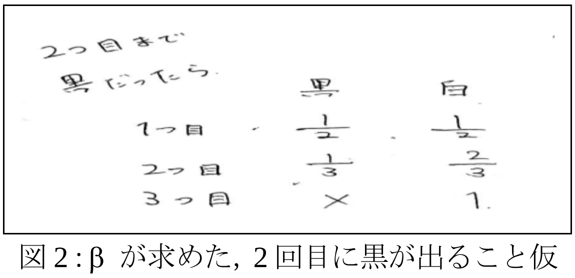

図 2 : β が求めた, 2 回目に黒が出ること仮定した際のそれぞれの試行における確率

回目の状況をそれぞれ個々でモデル化したものである．このようなモデル化の仕方や確率の計算の仕方は誤ったものではないが，問題 (3) において正答を得られるモデル化の仕方とは必ずしもいえない．このように，条件付き確率では複数回の試行が扱われ，モデルとして採用可能な標本空間は複数ある．その中で，適切な標本空間でモデル化し，そこに適切な確率を割り当てることができなければ，必ずしも正答に至ることはできないのである． β の事例は，正答を得るための適切なモデル化ができなかった事例となっている．

5.「病院の問題」の分析

次に,「病院の問題」に対する調査対象者の解決過程の分析について述べる．この調査では，筆者の所属する大学の学部 1 年生 3 年生 4 年生，大学院生からデータを収集した．データは，ペアで問題を解決するインタビュー調査と, 本学の「数学科指導法」の講義の受講生に対し，自宅学習の課題として「病院の問題」に取り組ませた質問紙による調査で得られた 2 種類のものである. なお, インタビュー調査は「時間軸の問題」の調査と同様の方法で実施し，質問紙による調査では，講義の資料を見たりや友人と相談したりすることが可能である．データを分析するための理論的枠組みには，Douady (1991) による「セッティング」と Balacheff & Gaudin (2002) による「コンセプションモデル」を用いた．これらは,「病院の問題」を解決する際に用いられる確率的・統計的思考と，その際の具体的な認知活動を捉える枠組みである．以下では，2 つの理論的枠組みの概要を述べ，それらを用いた分析事例を示す.

(1) セッティング

セッティングとは, 代数や幾何といった, 数学の一領域における対象, 対象間の関係, 対象が定式化されたもの，対象やその関係に関連した心的イメージといった様々な要素から構成されるものである (Douady, 1991, p.41). 例えば，放物線は少なくとも幾何セッティングと代数セッティングのいずれかで捉えることができ，セッティングに応じて，そこで扱われる対象や対象間の関係が異なる．前者であれば，放物線は焦点と直線などの対象と関係して特徴づけられ, 後者であれば，二次関数もしくは方程式, 変化の割合などの対象と関係して特徴づけられる．

セッティングという視点を用いれば，確率と統計はそれぞれ数学 (もしくは数理科学) の一領域であるため，「確率セッティング」と「統計セッティング」の 2 つを考えることができる. そして,「病院の問題」に対する自らの解答が正しいことの説明においても，これらのいずれかが用いられ, 用いたセッティングに応じてそこでの思考や推論が大きく異なると考える．

データの分析では，調査対象者がどのセッティングを用いているのかを特定する．その際，確率や場合の数，樹形図などが確率セッティングを用いている現れであり，具体的な誤差を伴ったデータやヒストグラム，標本抽出などが統計セッティングを用いている現れとする．ただ，問題解決過程では，セッティングの変更がなされる場合がある．そのため，特定されるセッティングは必ずしも一つとは限らない．

(2) コンセプションモデル

コンセプションモデルとは，問題解決の際に用いられる人間の思考をモデル化する道具である. 一般に, ある問いが与えられ, その問いに対しある操作により問題を解決しようとする．そのときの操作は，その問いに応じたものであり，その際に用いられる表現もその問いに応じたものである．さらに，その操作や表現は，学習者が問題を

解決するにあたり，それらが正しいと判断したからこそ用いられる．このように考えれば，学習者の思考，コンセプションは，次の四つの要素 (P, R, L, Σ) で特徴づけることができる．

P：問題の集合 (a set of problems)
R：操作の集合 (a set of operators)
L：表現体系 (a representation system)
Σ：制御構造 (a control structure)

ここで，P は問題の集合であり，R とは P を解決する際に用いられる「操作の集合」である．L は P を解決する際に用いられる図的表現や数的表現などの「表現体系」である．Σ は「制御構造」であり，問い P に対する操作 R や表現 L を正しいと判断するものであるとともに，それによって得られた解答を正しいと判断する際にも用いられるものである．Balacheff & Gaudin (2002) は，これら 4 つの要素をコンセプションと呼び，学習者の思考をモデル化する．

また，セッティングという視点からすると，「病院の問題」の解決に用いられる統計セッティングや確率セッティングなどの考えは，コンセプションモデルの制御構造に位置づけることができる．なぜならば，樹形図を描くといった操作やその表現は，確率セッティングだからこそ生じるものであり，現実のデータを想定したり，グラフやヒストグラムを描いたりといった操作や表現は統計セッティングで考えたからこそ用いられたものと考えるためである．

そして本研究では，特に学習者が用いた表現に着目する．なぜならば，筆者は Duval (2006) が指摘するように，抽象的な数学的対象を扱うことのできる唯一の方法が記号や記号論的表現を用いることと考えるからである．換言すれば，学習者の用いる表現に注目することにより，学習者があるセッティングにおいて，実際にいかなる対象をいかに扱っているか，そこでの認知的活動を明らかにできると考えるのである．

(3) データの分析事例

「病院の問題」に対する学生 A, B の解決過程の分析を示す．いずれの学生もインタビュー調査における調査対象者である．

①「大きい病院」と答えた学生 A の思考

学生 A は，直観的な回答として「大きい病院」と答えた．その回答の理由は，以下のように解答用紙に記述されていた．

「平均の値をとるときに母体数が多い方がばらつきが少なくなる．ばらつきが少なくなれば「男の子が生まれる確率」と同じくらいの数，男の子が誕生する」

A は，この理由を，図 3 のような縦軸に男の子の生まれた人数，横軸に日にち (図 3 は「日数」とあるがプロトコルから「日にち」と判断できる) をとった 2 つのグラフを描いて説明する．左側の A が小さい病院, 右側の B が大きい病院のグラフである．グラフ上に描かれた横線はそれぞれの病院で生まれる人数の 60%を示している．A の説明は以下のプロトコルのようであった．

55	A	日数 (横軸) で, 男の子の数 (縦軸) か. で俺は大体これがこうなるって考えたのね (グラフを描く) ． で, まあ大体このへん 15 くらいかなあって (グラフ上の横線を引く) ．15 っていうか, 15, なんていうか, その大体半分を超えるとか. (中略)
58	A	えーと，半分っていうか，これか. 15 人の 60%. (中略)
98	A	どっちも，まあ後半，まあこれ (左側のグラフ) が仮に A だったとするとAのほうがばらつきが多いのかなと思っていて.
100	A	じゃあ，仮にこっち側 (右側のグラフ) を B ってしたときに, ちょっとこうなんか全体的な人数が多くなって，で，このグラフの 1 つ 1 つの長さが，たぶん A よりも近くなると思うんですよね.

説明は必ずしも明確ではないが，ばらつきの小さい大きい病院の方が安定して 60%近辺となるため，安定して 60%を超え，そして小さい病院ではばらつきが大きく 60%近辺にならないため, 答えは「大きい病院」としていると考えられる．

A は統計セッティングで考えている．それは，A が確率の計算など確率に関することに触れず，現実的なデータをグラフで表現しようとしていることから明らかであろう．さらに A は，問題文の「約 50%」という表現が曖昧であると主張し，問題文に「45~55%」という文言を書き加えている．こうしたことからも，A が現実の誤差を伴う統計の問題としてこの問題を捉えていると判断できる．

ここで，A が統計セッティングを背景に，いかなる思考をしていたのかコンセプションモデルの視点から明らかにする．A は，「病院の問題」に対して統計セッティングで考え，図 3 のようなグラフを描く．すなわち，A は「グラフで出生の様子を示す」という問い p 1 に取り組んだといえる．A は，この p 1 を解決するため「縦軸に男の子の人数，横軸に日にちをとったグラフを描く」という操作 r 1 を行う．このときの表現 l 1 は図 3 のグラフである．この操作 r 1 や表現 l 1 の背景には，「小さい病院ではばらつきが大きく，大きい病院ではばらつきが小さい」「毎日生まれる男の子の数が異なる」といった制御構造 σ 1 があったと考えられる．その後，A はグラフで 60%の箇所に線を引く．つまり A は「グラフで 60%の箇所を示す」という問い p 2 に対し，「60%の値を示す横線をグラフに引く」という操作 r 2 (表現 l 2 は直線) を行った．ここでは，A が直観的に 60%だと思う箇所に直線を引いたと考えられる．したがって，操作 r 2 の背景には，A の「直観」という制御構造 σ 2 があったといえる．そして，これまでの一連の行為は，A が統計セッティングで考えていたからこそ用いられたのである．こうした一連の A の行為は，コンセプションモデルを用いて以下のようにモデル化できる．

p 1	グラフで出生の様子を示す.
r 1	日々の男の子の生まれる数を仮定し，縦軸に男の子の数, 横軸に日にちをとったグラフを描く.
l 1	図 11 のグラフ
σ 1	・小さい病院ではばらつきが大きく，大きい病院ではばらつきが小さい. ・毎日生まれる男の子の数が異なる. (統計セッティング)

↓

p 2	グラフで 60%の箇所を示す.
r 2	60%の値を示す横線をグラフに引く.
l 2	図 11 のグラフと直線
σ 2	・直観 (統計セッティング)

では，何が「大きい病院」という誤った解答に A を導いたのだろうか. それは，A が統計セッティングで考えていたこと，さらに現実の誤差を表現したこのグラフを用いていたことが大きな要因と考える．A は統計セッティングで考え，現実的なデータを想定していたからこそ, 問い p1 に対して図 3 のような毎日ばらつきがあるグラフを描いた．さらに，図 3 のグラフを用いたからこそ，標本が大きいほどばらつきが小さくなるという統計的な傾向を抑えているのにもかかわらず，ばらつきの少ない大きい病院の方が安定して 60%を越えるとの誤っ

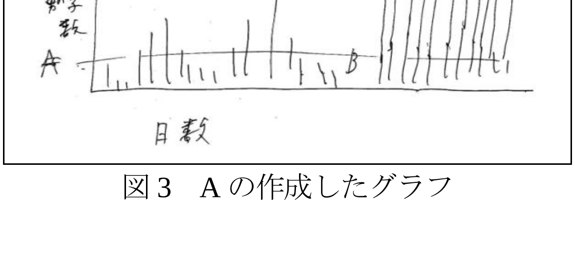

図 3　A の作成したグラフ

た判断に至ったと考える．なぜならば，図3のようなグラフでは，ばらつきの大小を表現できても，それがどの区間でばらつくのか，統計的な傾向を示すことはできないからである．だからこそAは，問いp2に対して自らの直観を用いて60%の横線を引かざるを得なかったのである．ばらつきの区間を表現するには, 例えば図4のように, 横軸を男の子の数，縦軸を日数としたヒストグラムを描くことが必要となる. つまり, 度数分布の考えが求められる. したがって, Aに度数分布という考えがなかったことが困難性の一つして指摘できよう．さらに「病院の問題」では，具体的なデータが与えられておらず，データを想定してグラフを描かなければならない．このこともAのヒストグラムでの表現を妨げた可能性がある．以上のことから，Aの主たる困難性は，明確に与えられていないデータを，ばらつきの区間を示すことのできるグラフで表現できないことにあるといえよう．

②「同じ」と答えた学生Bの思考

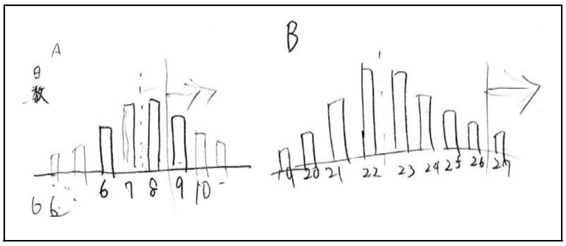

図4　ある調査対象者が描いた，横軸に人数，縦軸に日数をとったヒストグラム

別のペアの学生Bは，直観的な回答として「同じ」と答えた．そしてその回答の理由を「確率は男女とも1/2で一定であるから」と記述した．Bは，この考えの妥当性を示すために，図5のような3人と4人の場合の樹形図を描き，それぞれの場合で男の子が60%以上生まれる確率を求めようとした．そして，3人生まれる場合で男の子が60%以上生まれる確率を，数え上げによって4/8と求めた．これは，Bにとって期待していた結果であった．しかし，4人の子どもが生まれる場合の確率を同様の方法で求めると，期待していなかった確率が得られた．4人の子どもが生まれる場合, 男の子が60%以上生まれる確率は5/16であり，1/2にならないのである (図5右下)．その結果，Bは「同じ」という明確な根拠を与えることができなかった.

Bは確率セッティングで考えている．それは，樹形図を用いていること，反復試行の確率を計算しようとしていることから判断できる (48 B「15回1/2があるということでしょ．ということは1/2の15乗ということでしょ」)．そして，Bは現実的な誤差を考慮したり，データの傾向を示したヒストグラムを描いたりといった，統計セッティングと思われる行為は見られなかった．

では，コンセプションモデルの視点からすれば，Bの思考をいかにモデル化できるだろうか．Bは「病院の問題」に対して，樹形図を描き，それを用いて男の子が60%以上生まれる確率を求めようとした．したがって，Bは「それぞれの病院で男の子が60%以上生まれる確率を求める」という問いp1に取り組んだといえる．そして，このp1を解決するため,「3人と4人の場合の樹形図を描く」という操作r1 （表現l1は図5の樹形図）を行う．これらの背景には,「標本の大きい場合の樹形図は描けない」, 数え上げによって確率が求まるという「数学的確率に関する基本的な考え」といった制御構造σ1が働いていると考えられ

図5　Bが作成した樹形図

る．さらに，B は 3 人と 4 人の場合であれば樹形図を描いた方が早いと考えたからこそ，反復試行の確率を用いず樹形図を用いて確率を求めようとしたのだろう. その後，B は図 5 の樹形図から数え上げによって 3 人と 4 人の場合の男の子が 60%以上生まれる確率を求めた．これは，先の p 1 と同様の問い p 2 に対して，「3 人と 4 人の場合の樹形図から男の子が 60%以上生まれる確率を数え上げによって求める」という操作 r 2 を行ったのである．また，ここでの表現 l 2 は，図 5 の樹形図のみならず，求めた確率 (4/8 と 5/16) を表す数的表現が用いられている．そして，こうした操作や表現を可能とした制御構造 σ 2 には，「数学的確率に関する基本的な考え」に加え，それぞれの場合が「同様に確からしいという考え」があると考えられる．そして，これらの行為は，B が確率セッティングで考えていたからこそ用いられたのである．この一連の B の行為は，コンセプションモデルを用いて次のようにモデル化できる．

p 1	それぞれの病院で男の子が 60%以上産まれる確率を求める.
r 1	3 人と 4 人の場合の樹形図を描く.
l 1	図 5 の樹形図
σ 1	・標本の大きい樹形図は描けない. ・数学的確率に関する基本的な考え. ・小さい標本の場合では反復試行の確率よりも樹形図を用いた方が早い. (確率セッティング)

↓

p 2	それぞれの病院で男の子が 60%以上生まれる確率を求める.
r 2	3 人と 4 人の場合の樹形図から 60%以上となる確率を数え上げによって求める.
l 2	図 5 の樹形図と数
σ 2	・数学的確率の基本的な考え. ・同様に確からしいという考え. (確率セッティング)

B は「同じ」という誤った回答を与え，樹形図を用いて時間をかけて考えたとしても納得のいく回答が得られなかった．これは，B が確率セッティングで考えていたこと，樹形図で確率を求めようとしたことに要因があると考える．実際，15 人や 45 人生まれる場合のすべての場合の数を樹形図で表現することは, ほとんど不可能である. そのため, B は制御構造 σ 1 にあるように, 3 人と 4 人という小さい標本の場合で考えざるを得なく，そこから解答の妥当性を判断しようとしたのである．しかし，小さな標本では 60%が何人に相当するのか曖昧である．3 人の子どもが生まれるとき，60%以上が男の子であるのは 2 人か 3 人の 2 通りであった．一方で，4 人の子どもが生まれるときも，60%以上が男の子であるのは 3 人か 4 人の 2 通りであり，人数が増えたにも関わらず，生まれる人数の 60%以上が男の子である場合の数が変わらない．また仮に，B が 5 人や 6 人子どもが生まれた場合を検討したとしても，必ずしも「小さい病院」という正しい回答に納得できなかったであろう．理由は計算してみれば一目瞭然である．例えば，5 人の子どもが生まれる場合，60%以上 (3, 4, 5 人) が男の子である確率は 1/2 となる．つまり，4 人から 5 人へは確率が大きくなり，標本の大きさに応じて確率が必ずしも小さくなるわけではないのである．以上のように，確率セッティングにおいて樹形図で考える場合，樹形図が小さい標本と密接に関連しているため, その樹形図を用いて考える限り，問題が求める 60%以上の確率は導き得ないのである.

6. おわりに

本稿では，修士課程 2 年間における研究成果の概要を述べた. そこでは, “モデル化”

という視点，問題を解決する際の学習者の背景にある思考とその際の認知的活動という思考の 2 つの側面を分析の枠組みとし，「時間軸の問題」と「病院の問題」の場合に, 直観やヒューリスティックとは異なる，時間をかけより深く考察した際の困難性の特定に迫った．その結果，「時間軸の問題」では，仮想世界の仮定の特定，仮想世界の仮定のモデル化が困難性となっていること,「病院の問題」では，標本の大きい場合の樹形図が描けない，いかなるデータを想定しそれをいかに表現するかといった，確率セッティングと統計セッティングでそれぞれ異なった困難性が存在することを明らかにできた．その他，本稿では述べていないものの，仮想世界の仮定や数学的モデルの妥当性が判断できないこと，割合に関する考えが用いられる算術的セッティングから統計セッティングへの移行などが困難性として指摘された．

一方で，こうした分析から確率指導へのいかなる示唆が得られるだろうか. 筆者は, 以下の 3 つの示唆が得られたと考える．

- 学校で確率指導を行う教師の，確率がモデルであるという認識の重要性
- 確率がモデルであるという視点に基づいた授業の必要性
- 確率と統計の連携の重要性

これらの示唆に基づいた実践が，確率の困難性を特定すること，その困難性を克服することに役立つと考える．今後は，これらの示唆に基づき構想した実践が, 実際に, 学習者の確率の困難性克服のどのような一助となるか検証していきたいと考える．

引用・参考分析

Balacheff, N., Gaudin, N. (2002). Students conceptions : an introduction to a formal characterization. Cahier Leipniz, vol.65.

Douady, R. (1991). Tool, Object, Setting, Window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics.. In A. Bishop, et al. (eds.), *Mathematical knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 109-130). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Falk. R (1979). Revision of probability and the time axis, *Proceedings of the Third International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 3, 64-66

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 28, 97-105.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A judgment of Representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, 185, 1124-1131.

五十嵐慶太，宮川健 (2013).「学校数学における確率を捉える枠組みの一提案－数学的モデルとしての確率という視点から－」．日本数学教育学会誌．第 95 巻．pp.17-24

五十嵐慶太 (2014).「モデル化と言う視点から見た条件付き確率に関する困難性－「時間軸の問題」を用いた分析－」．日本数学教育学会誌．第 96 巻．pp.1-8

一松信ほか．(2012). 中学校数学2．学校図書.

松浦武人 (2006).「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」．全国数学教育学会誌．第 12 巻, pp.141-151.