上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.85-92.

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察

片寄　恵理奈
上越教育大学大学院修士課程１年

1.　はじめに

高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」の学習内容(現在の微積分)は，「「極限」の概念に基礎をおいた数学」(中村，1980，p.196)である。高等学校学習指導要領解説数学編理数編(2009)においては「関数$f(x)$の値の変化を極限の考えを用いて調べる活動を通して，微分係数や導関数の概念を導く」(p.34)とされ，極限の考えの指導は微分係数や導関数を導くために欠かせないこととして扱われる。ただ，その際用いられる「極限の考え」について，それがどのように学習されるかなどへの言及はない。「微分の考え」の内容の中で微分係数を扱う際の極限については，次のように述べられている。

「微分係数については，[内容の取扱い]の(4)に示されているように，関数のグラフの接線と関連付けて扱う。その際，極限については直観的に理解させるようにする。」(p.35)

ここでは，極限の学習は，関数のグラフの接線に関連付けて行うとされている。では，この前に述べられている「関数$f(x)$の値の変化を極限の考えを用いて調べる活動」の中の「極限の考え」はどのように学習されるのであろうか。

本稿は，この問いに答えるため，高等学校数学Ⅱ「微分の考え」において学習されるべき「極限」について考察を深めようとするものである。

次の第２節では，先行研究から高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の指導にみられる課題を明らかにする。第３節では，高等学校学習指導要領解説編(2009)及び数学Ⅱと数学Ⅲの教科書から，高等学校数学において「極限」がどのように扱われているかを明らかにする。第４節では，極限の概念の指導の困難性を掴むために，塚原(2002)の四つの課題を参考に数学史の視点から極限の概念の形成に焦点を当てて考察する。第５節では，山口昌広(2014)の調査研究を取り上げ，極限の考えが中々捉えられない生徒の状況は，第４節で述べた数学史の極限の概念の形成過程とどのような関係にあるか，中村(1980)を参考にしながら，数学Ⅱで扱う「極限の考え」の学習の必要性と極限に関わるその指導の留意点について考察を深めていきたい。

2.　先行研究にみる極限に関わる課題

2.1.　塚原(2002)の指摘

塚原(2002)は，高等学校数学における極限の扱いについて，次のように指摘している。

「高等学校における数学Ⅱの微分積分法

は，極限の概念は微分積分法の理論の根幹をなす重要な概念であるにもかかわらず，その扱い方は指導上の困難点の一つである。

(略)

極限に関わる問題提起とその根拠，及び速度，接線，極値，面積を求める際の着想と方法を提示することにより，極限の考えが生まれるその背景を理解させることが，極限の概念理解のための一つの方法であると考える。」(p.106)

ここでは，数学Ⅱの微分積分法における極限の概念の重要性と指導上の困難性が述べられ，その改善策として数学史の活用を提案している。指導の困難性については第 4 節で数学史的視点から考察していきたい。

2.2. 山口直也(2013)の指摘

山口直也(2013)は高等学校数学における極限の扱いについて，次のように指摘している。

「数学Ⅱ「微分の考え」微分係数 $\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)/h$で初めて極限が導入されるが，教科書では微分係数の式に多項式を当てはめ，除算等の式整理をしてhに 0 を代入し計算する，いわば代数的操作として極限を扱っている。一方，数学Ⅲ「極限」では∞という記号や連続性といった新しい概念が導入され概念的操作となるが，この操作の差が生徒の極限概念の獲得に支障をきたしているのではないかと考えた。」(p.189)

「極限」の扱いが数学Ⅱ「微分の考え」では代数的操作，数学Ⅲ「極限」では概念的操作であり，その差が数学Ⅱでの「極限」の学習に支障をきたすと指摘している。

2.3. 課題の整理

本稿では，数学Ⅱ「微分の考え」において，山口直也(2013)のいう「極限」の代数的操作だけで終わるのではなく，塚原(2002)がいう「極限が生まれるその背景」を考える数学的活動を授業に盛り込む可能性を探っていきたい。本稿の課題は，次の二つに整理できる。

① 「極限」が生まれるその背景にある極限の概念形成の困難性とはどのようなものか。

② 「極限」の代数的操作だけでなく，極限が生まれる背景を考える数学的活動を授業に盛り込むことができるか。

第 5 節において，これらの課題の解決に関わる実践として山口昌広(2014)の調査授業を取り上げ，本稿の課題の解決という視点から評価する。その上で，数学Ⅱで扱う「極限の考え」の学習の必要性と極限に関わるその指導の留意点について考察していきたい。

3. 高等学校数学における極限の概念

この節では，まず，平成 21 年度の学習指導要領解説編数学編をもとに，高等学校数学Ⅱと数学Ⅲの微分の単元における極限がどのように扱われるように記述されているかみていく。その上で，数学Ⅱの「極限」と数学Ⅲの「極限」の違いを明らかにし，教科書から「極限の考え」の考察を行う。

3.1. 学習指導要領における極限に関する記述

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説数学編理数編では，高等学校第 2 学年における数学Ⅱの微分積分の単元で極限の概念についてどう扱われるかについて述べている。極限は「微分の考え」で初めて学習することになる。「微分の考え」の[内容の取扱い]の部分において極限の学習は，「極

限については，直観的に理解させるよう扱うものとする」(p.34)と述べられている。ここでは数学Ⅱにおける極限の概念についての明確な記述や具体的な指導等はなく，微分係数や接線で極限を扱うものとしている。したがって，微分係数や導関数を導くために極限について触れ，導関数の応用として接線の傾きを学習するという扱いになっている。

高等学校第 3 学年における数学Ⅲの極限の単元において，極限は以下のように述べられている。

「極限については，「数学Ⅱ」の「(5)微分・積分の考え」において，微分係数を求める過程で直観的に理解させている。ここでは，微分法，積分法の基礎を培う観点から極限の直観的な理解に重点を置きながら，数列の極限を学習するとともに，扱う関数を簡単な分数関数や無理関数まで広げて関数値の極限を求めることができるようにする。」(p.39)

数学Ⅲの極限の単元では，数学Ⅱで学習した極限の理解に重点を置きながら新たに数列の極限を考えさせる。この単元でも，極限の理解については，極限の直観的な理解までにとどめられている。

以上のことから，現在の高等学校学習指導要領(2009)において極限は直観的に理解させるものとしている。極限の指導として，数学Ⅱでは微分係数や接線で極限について触れた後は，極限値を求める簡単な計算問題の練習に終始している。数学Ⅲにおいては，数列の極限で新たに∞という記号や概念が導入されており，数学Ⅱで既習の極限が前提とされている。本稿では，山口直也(2013)の指摘のように極限の学習を数学Ⅲでやるというのではなく，数学Ⅱにおける極限の学習において概念的操作をある程度取り入れることができるのではないかと考えている。次に，教科書における極限の扱いをみていくことにする。

3.2. 教科書にみる極限に関する記述

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の極限の指導について，微分の導入で瞬間の速さを扱っている教科書の詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)を取り上げる。

この教科書では，一般の関数の平均変化率や微分係数を導入するための準備として，斜面を転がる球の運動の平均の速さを考えさせる。球が転がり始めて 2 秒後からごく短い時間 h までに転がる平均の速さ v (m/s)を求め，hを短くしていく時の平均の速さを考えさせ，瞬間の速さを求める学習につなげさせていく。また，極限に関しては，h の値にできるだけ 0 に近い小数を代入することで，近似的に 2 に近づくという指導がなされるようにしている。続いて，表を用い h を正と負の両方の側から 0 に近づけさせることで 0 に「限りなく近づく」という意味を直観的に理解させる指導も行われるようにしている。極限の導入部分は以下の図 1 の通りである。

2 秒後からごく短い時間 h 秒をとり，2 秒後と$(2+h)$秒後との間の平均の速さは

$$v=\frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$

となる。このとき，h の値を 0 に限りなく近づけると，v の値は次の表のようになる。

h (秒)	-0.01	-0.001	⋯	0	⋯	0.001	0.01
v m/s	3.99	3.999	⋯	4	⋯	4.001	4.01

この表が示すように，h の値が正負に関わらず 0 に限りなく近づくとき，平均の速さ v m/s は，4 m/s に近づく。この速さを**瞬間の速さ**という。

上記の h が 0 でない値をとりながら限りなく 0 に近づくとき，記号 lim を使って，

$$\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

と書き，h が 0 に近づくときの**極限値**という。

図 1：極限の導入部分(啓林館，2013，p.191)

次に，高等学校数学Ⅲ「極限」における極限の指導について，上の数学Ⅱと関連する詳説数学Ⅲ(啓林館，2013)を取り上げることにする。

極限の学習は数列の極限と関数の極限とに分かれており，∞の極限について考える指導がされている。数列$\{a_n\}$を考えたとき，nを限りなく大きくしていくときの一般項a_nの値を考えさせて∞についての極限を学習する。金井(2008)は関数の極限の概念について「関数の極限は，関数$f(x)$の定義域の中に数列$\{a_n\}$があるとすることによって，関数の値からできる数列$\{f(a_n)\}$の極限と考えることができる。つまり，関数の極限を数列の極限とみることができることになる。」(p.10)と述べており，数学Ⅲにおける極限とは数列の極限を基盤としていると考えられる。ここでの極限の指導として，数学Ⅱで学習した「限りなく近づく」という意味に加えて，∞という概念が入ることで，生徒は分数関数などのnが「限りなく大きくなる」ときの極限について考えることになる。ゆえに，数学Ⅲの「$n \to \infty$」という数列の極限において「任意のnを限りなく大きくするとき，0 に限りなく近づく」という意味の極限を学習する。

山口直也他(2013)は数学Ⅲ「極限」において学習する数列の極限と数学Ⅱ「微分の考え」の極限の学習における代数的操作との差が極限概念の獲得に支障をきたしていると指摘している。この差は「限りなく近づく」という概念を数学Ⅱ「微分の考え」において概念的操作として扱うことができるのではないかと考えられる。これについては，第 5 節において述べていきたい。

4. 極限の概念形成

第 4 節では，極限の概念形成の困難性を掴むために，数学史の視点から極限の概念の形成のどこに関連する困難性がみられるか考察する。極限の概念形成の困難性を考えるに当たって，塚原(2002)が挙げている微分積分法の誕生の動機である 4 つの課題を取り上げることにする。

4.1. 微分積分法の誕生の動機

塚原(2002)は「17 世紀における微分積分の法の誕生の動機は，次の四つ課題①瞬間速度を求めること②接線を求めること③最大値・最小値を求めること④曲線で囲まれた部分の面積を求めることの解決であると言える。」(p.108)と述べている。これらは「微分・積分」の単元においても，基礎・基本であるとし，授業の流れの構造図を次のように考えている。

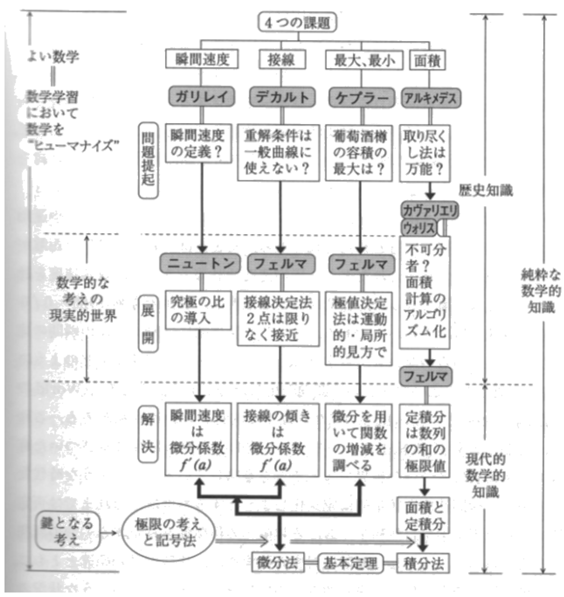

図 2：授業の流れの構造図
(塚原，2002，p.137)

本稿では，4 つの課題の内，瞬間速度の流れについてカギとなる考え，すなわち極限の考えに焦点を当ててみていきたい。

4.2. ガリレイにみる極限の概念

塚原(2002)は「極限を捉えるためには，その誕生において以下の二つの視点が重要なものとなる。」(p.138)と述べている。二つ

の視点について，一つ目は「極限の考えが，数学的モデルを作るための一つの手段になっている」こと，二つ目は「極限の考えが引き起こされる現象の結果ではなく，その途中を捉え，記述するための手段として用いられる」ことである。一つ目の視点に着目したいとして，一つはガリレイが行った自由落下運動の観察・実験に向けられている。自由落下運動は，ガリレイが仮説として「速さが時間に比例して増加する等加速度運動においては，距離が時間の 2 乗に比例する」を立て数学的に証明した等加速度運動である(伊達，2014，p.14)。塚原(2002)はガリレイの極限の視点を以下のように述べている。

「無限(連続性)に関わる記述を，有限の範疇においていかに巧妙なトリックで記述されるのかが要求されるのであり，そのためには数学的モデルを作る必要があり，そのための手段が極限の考えであるといえる。これこそがまさに数学的思考であり，ガリレイが問題提起したことであったと考える。学習場面においては，実験で得られたデータから平均速度が計算できるが，これをもとにいかして瞬間速度へとアプローチするかが問題提起となる。」(p.138-139)

ここでは，ガリレイが自由落下運動の実験データをもとに平均速さから瞬間の速さを求めようとした。その際，数学的モデルを考える必要があり，その手段として極限の考えを用いたとされている。

4.3. ニュートンにみる極限の概念

もう一つの視点は，ニュートンが考えた「究極の比」という概念に向けられている。「究極の比」について塚原(2002)は以下のように述べている。

「ニュートンは，「ある有限な時間内に，しだいに等しくなり，かつ，その時間が終わる間に，一方が他方に対し，任意の与えられた差よりもなお近づくところの二つの量，または二つの比は，究極において等しくなる」と述べている。記号で書けば，任意の$\varepsilon > 0$に対して適当な$t > 0$を選べば，$|f(t) - g(t)| < \varepsilon$が成り立つということである。これは，ある一つの量が他方の量に近づくというときに，近づき終わった結果を問題にするのではなく，近づくときの途中の状態を捉えることを主張している。この考えは，ニュートンが瞬間速度の運動の結果として捉えたために生じる奇妙な矛盾(移動した距離/時間＝0/0)を自覚し，それを回避するために用いた極限の考えの本質であると考える。」(p.139)

点の運動の途中を捉える方法としてのニュートンの流率法の概略は以下の通りである。

ある点の運動でtにおける点の位置が$(x(t),\ y(t))$であり，その時の水平方向の速度が$\dot{x}$, 垂直方向の速度が$\dot{y}$であったとする。$x(t)$，$y(t)$に当たるものを「流量」，$\dot{x}$，$\dot{y}$に当たるものを「流率」と呼んだ。そして，例えば流量の関係が$\sum a_{ij}x^i y^i = 0$であることが分かっているときは，流率の間に成り立つ関係を$\sum(i\dot{x}/x + j\dot{y}/y)a_{ij}x^i y^i = 0$と求めることができた。すなわち，ニュートンは$o$を微小量とし，流量の関係の式の$x$，$y$にそれぞれを$x + \dot{x}o$，$y + \dot{y}o$代入しその式を整理し$o$で割った後$o$を含む項を省くことによって流率の間に成り立つ関係式を求めたとされている。(伊達，1993，p.146)

このことから，ニュートンはガリレイが提起した自然現象の数学的記述という問題において，一つの数学的モデルとして「究極の比」という概念を与え，流率法におい

ては 0 を含む項を省くという方法をとっているということができる。

4.4. 極限の概念形成の考察

極限の概念の指導の困難性を掴むために塚原(2002)の 4 つの課題をガリレイとニュートンに焦点を当ててみてきた。ガリレイは自由落下運動について数学的に証明を行う際に，発展的な問題として平均の速さから瞬間の速さを考えるアプローチを問題として考えており，その問題を解決するために「極限の考え」を用いたと考えられる。ごく直観的な「極限の考え」を考えたとされる。その後，ニュートンはガリレイの問題提起を受けて，一つの数学的モデルとして「究極の比」を考え，その方法として流率法を生み出した。塚原(2002)はガリレイとニュートンの研究を以下の図 3 にまとめている。

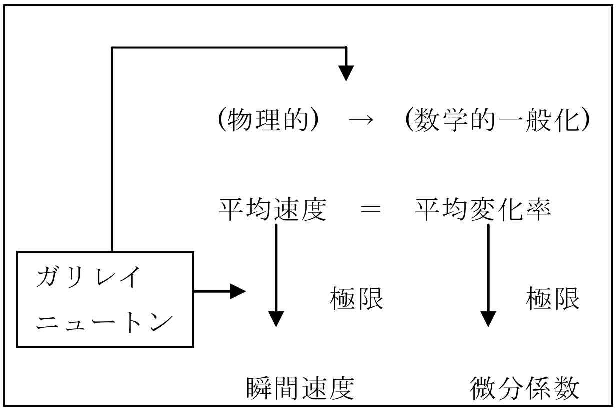

図 3：瞬間の速さと微分係数の概念の構造化(塚原，2002，p.141)

5. 「極限の考え」の学習とその指導

第 5 節では，始めに山口昌広(2014)の調査研究を取り上げ，極限の考えが中々捉えられない生徒の状況を述べる。次に，第 4 節で述べた数学史の極限の概念形成とどのような関係にあるか，数学Ⅱで扱う「極限の考え」の学習の必要性と極限に関わる指導の留意点について考察していく。

5.1. 山口昌広(2014)の調査研究

山口昌広(2014)は，高等学校数学Ⅱにおける「微分する」ことの意味理解に，平均変化率から微分係数に至るまでの極限の考えが必要であると考えている。そのため，極限値を考える上で変化の割合と結びつけて平均変化率から導入を行う学習では，極限値を考える必要性を感じることが出来にくいと述べている。大学生を対象に行ったアンケート結果では,「平均の速さを求めた後に瞬間の速さをどのように求めるか」という問いに対し,

・わかりません
・瞬間の速度を求めることができない

という回答が半数以上だった。瞬間の速さの回答で極限に近い解答をした者は 17 名中 2 名であったことから,「微分の基礎となる極限の考え」を捉えることができていないことが明らかになっている。

これを踏まえて，山口昌広(2014)は微分学習の導入時における瞬間の速さの授業を考案している。この授業では，瞬間の速さについて考えることで「微分の基礎となる極限の考え」を捉えさせるものであり，授業の流れは以下の通りである。

① 斜面を転がる鉄球の動きについて考察する。(距離が時間の 2 乗に比例するように設定した教具を使用)
② 表から各々の時刻における目盛りと距離，平均の速さを求める。
③ 瞬間の速さをどのようにして求めればよいか考える。
④ 近似値の計算を行い，瞬間の速さが平均の速さに限りなく近づくということを捉える。
⑤ 瞬間の速さを考えるときの考え方を踏まえてグラフにしたとき，どのように表すことができるか考えさせ，実際に接線に限りなく近づく直線を作図することで極限としての接線を

捉えさせる。

①では鉄球が，0 の目盛り位置から 3 秒後に目盛り 9 の位置に移動したときの鉄球の動きの変化を捉えさせている。②では表を用いて瞬間の速さを求めることができないことに気づかせようとした。③では，②で求めることができない瞬間の速さをどのように考えればいいか考えさせている。最後に④では，生徒が近似値の計算を行うことで，平均の速さが求めたい瞬間の速さに限りなく近づいていくことで「極限の考え」を捉えさせる。

これに対して，生徒の極限の理解には段階があると考えられる。その過程を以下にまとめている。

(1) どのような速さでも距離を時間割れると考えている。
(2) 平均の速さの中に瞬間の速さの存在に気付く。
(3) 瞬間の速さにおける時間幅を少なくする。
(4) 瞬間の速さが時間幅を 0 に近づけたときの速さを考える。
(5) 最終的に瞬間の速さにおける時間幅が 0 であると認識する。

この段階の(4)から(5)に至るまでにおいて，時間幅を限りなく 0 に近づけることは考えられるが時間幅を 0 と考えることに困難性が見られる。また，授業者と生徒のやり取りの中で，生徒が瞬間の速さの時間幅をあるかないのか比べる発言が見受けられた。そしてこの段階では，生徒がどのように平均の速さと瞬間の速さを比べてよいのかという発言もあったが，最終的に瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることができていなかったとことが判明している。

5.2. 「極限の考え」の指導に関する考察

前述の山口昌広(2014)の研究において，授業者と生徒とのやり取り中で時間幅をあるかないか比べる発言があり，生徒は「$h \to 0$」という「h に 0 に近い限りなく小さい値」を近づけさせることで，時間幅が 0 と考えられない状況が述べられている。瞬間の速さを考える生徒の状況として，平均の速さの中に瞬間の速さがあり，時間幅が 0 に近づいていくことは考えられるが，時間幅を 0 と考えることに依然抵抗があると判明している。

生徒のこの状況はニュートンが「究極の比」を考える状況と似ていると考えられる。ニュートンの「究極の比」について，林(2000)は次のように述べている。

> 「導こうとする事々の証明を消えゆく量の究極の和や比，または新たに生まれつつある最初の和や比へと帰着させる方を好んできた。すなわち，和や比の極限へと帰着することであり，その極限の証明をできる限り簡潔に提示することである。
>
> (略)
>
> 消えゆく量の究極の比例に極限などないという反論がある。なぜなら，消えてしまう前は，究極のものではないし，消えてしまった後には，何もないからである。」(p.24)

ニュートンの「究極の比」を考える状況は，現在の生徒が中々「極限の考え」を捉え切れない状況と対比して考えることができる。これは，高等学校数学Ⅱ「微分の考え」で行う瞬間の速さの学習であり，瞬間の速さの極限を捉える生徒の考えはニュートンの研究においても現れていたとみることができる。

時間幅が 0 に近づいていく過程で時間幅を 0 と考えることには抵抗があり，当時のニュートンの研究への反論にもあったように，0 と考えるのではなく，時間幅が消えてしまったように感じてしまったのではな

いかと考えられる。

これまでに考察したことをまとめると，次のようになる。

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の学習を生徒により身近な現実場面から始めるには，関数の値の変化をみる学習からではなく「瞬間の速さ」を考える学習から始めることが必要である。「瞬間の速さ」を考えるには「極限の考え」の獲得が必要となる。この「極限の考え」の獲得には困難性が伴うが，数学史上「極限の考え」が生まれる背景にある「極限の理解段階」（山口昌広，2014)を踏まえた工夫を行えば，数学Ⅱ「微分の考え」においても代数的操作だけでなく極限の概念的操作を盛り込むことができ「極限の考え」を獲得させることができると考える。

6. まとめと今後の課題

本稿は，学習指導要領解説で述べられている「関数$f(x)$の値の変化を極限の考えを用いて調べる活動」の中の「極限の考え」はどのように学習されるのであろうか，という問いに答えるため，高等学校数学Ⅱ「微分の考え」において学習されるべき「極限」について考察をしてきた。

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の指導にみられる課題と，高等学校数学における「極限」の扱いを明らかにした。極限の概念の指導の困難性を掴むために数学史の視点から極限の概念形成に焦点を当てて考察し，極限の考えが中々捉えられない生徒の状況と数学史の極限の概念の形成過程との関係を捉えることができた。さらに，数学Ⅱで扱う「極限の考え」の学習の必要性と極限に関わるその指導の留意点について考察を深めた。

今後の課題は，数学Ⅱ「微分・積分の考え」の指導改善に関する研究を更に進めていくことである。

7. 引用・参考文献

C*ARL B. BOYER.(1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development.New York:Dover.*

C.H. Edwards, Jr. (1937). The Historical Development of the Calculus, NewYork: Springer-verlag.

文部科学省(2009).『高等学校学習指導要領解説　数学編』，実教出版.

高橋陽一郎　他(2013).『詳説数学Ⅱ』，啓林館.

高橋陽一郎　他(2013).『諸説数学Ⅲ』，啓林館.

塚原久美子(2002).『数学史をどう教えるか』，東洋出版.

中村幸四郎(1980).『近世数学の歴史-微積分の形成をめぐって-』，日本評論社.

林知宏(2000).『無限小量をめぐる論争と基礎付けの問題，ライプニッツ，ヴァリニョン，ヘルマン』，数理解析研究所講究録 1195 巻，pp.14-37.

金井孝太(2008).『高校数学における数学的概念の関係性』，群馬大学教育実践研究，第 26 号，pp9-25.

伊達文治(2009).『アルキメデスの数学』，森北出版.

伊達文治(2014).『2 次関数のルーツとその教材化-ガリレオ・ガリレイ『新科学対話』を読む-』，上越数学教育研究，第 29 号，上越教育大学数学教室，pp.13-20.

山口直也(2013).『数学Ⅱ「微分の考え」における『極限を用いない微分法』を用いた指導の可能性の検討』，日本数学教育学会　第 46 回秋期研究大会発表集録，pp.189-192.

山口昌広(2014).『高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究-微分することの意味理解に着目して-』，上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).