上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.43-52.

小学校5年「小数のかけ算」のための素地的活動についての研究

ー比例的推論と数直線を利用してー

加藤　正典
上越教育大学大学院修士課程２年

1. はじめに

筆者の経験の中で、小学校高学年児童の算数における学習意欲や学力の格差は大きく、苦手意識を示す児童の割合が多いと感じた。特に、小数・分数の乗除のように乗法構造を含む問題において、抵抗を示す児童が多く見られた。小数・分数の乗除は問題場面が複雑になり、問題場面の理解が不十分となる。そのため、児童の解決が困難になり、苦手意識につながっていると感じてきた。また、全国学力・学習状況調査の乗法構造に関わる問題に着目して検討してみると、A問題の平均正答率と比較し、乗法構造を含んだ学習は正答率が低い傾向にあり、苦手意識をもっている児童は全国的にも多いと推察される。

そこで、本研究では、先行研究から得られた知見をもとに構成した、小数のかけ算のための素地的活動の授業における児童の学習過程を分析・考察していく。そして、そこから授業に導入した比例的推論の発達を促す活動の果たす役割を、明らかにすることを目的とする。

2. 実験授業の構想

乗法構造についての白石(2006)、佐藤(2008)の研究は、比例的推論の発達を促すことで新たな問題や複雑な問題に対しても、児童が積極的に働きかけるようになることを示している。

また、中村(1999)、白井(1997)の研究は、比例的推論を児童が意識化するのに有効とされ、児童の思考を助ける道具となる数直線の効果を示している。しかし、山本(1995)の研究から、児童にとって数直線を慣れ親しんだものにする必要性があることが指摘されている。

また、佐藤(2008)が指摘しているように、高学年の算数の学習が始まる前に、４年生までの学習を整理し、学習の系統性を児童に意識させれば、既習事項と高学年の算数の学習とがつながりやすくなる。その際に、数直線を取り入れて学習することで、児童を数直線に慣れ親しませることも必要である。

また、数直線を児童が操作することによって、比例的推論を視覚化し、意識して比例的推論を用いることが可能となる。児童に数直線を操作する経験を積ませることで、比例的推論の発達が促され、問題場面の理解が深まることが考えられる。

2.１　数直線の見方

先行研究から、児童が数直線を有効に使える道具として授業に取り入れるためには、数直線を児童に慣れ親しませることと、数直線を活用できるための段階的な指導が必要だと示されている。そこで、素地的活動の導入にあたり、数直線の見方についての指導が必要だと考えられる。数直線の見方として、「位置としての見方」「矢印の導入」について検討していく。

（1）位置としての見方

実験授業に先立ち、事前調査において対象児童に図をかかせたところ、全員が量を区間の幅として見るような図をかいていた(図１)。

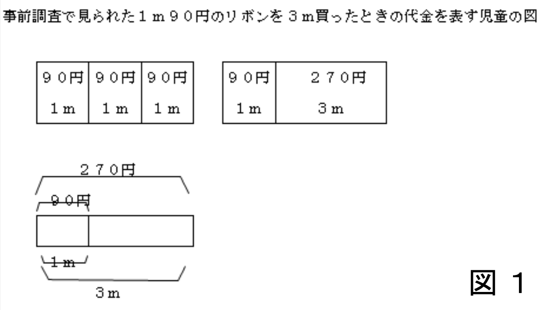

図 1

数直線へ矢印を導入するにあたり、数値間の関係を矢印で表す際に、端点の位置として量を見ること（図２）で、どの数値間の関係を対象にしているのかが、明確に捉えやすいと考えられる。そのため、対象児童がもっている区間の幅としての見方より、端点の位置として量を見ることもできるようにする必要があると考えられる。

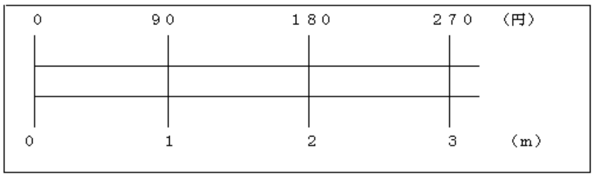

図 2

（2）矢印の導入

馬場(2005)は、「倍」の関係の視覚化を図ることで、数直線上の「基準量×倍」の構造をより直観的に児童が認識できると述べている。そこで、数直線による数の操作をする際に、馬場(2005)の実践などで用いられている倍関係を矢印で表現する方法を取り入れる(図３)。数値間の関係を矢印で表すことにより、どの数値との関係を対象にしているのかが示される。これにより、児童に倍関係を明確に捉えさせることができるものと考えられる。

また、中村(1999)で示されているように、完成された矢印をたどっていくことによって、数直線が立式の根拠になると考えられる。

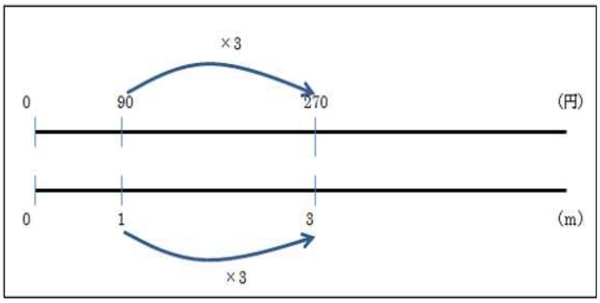

図 3

2. 2　数直線に慣れ親しむ

先行研究から、図が児童にとって馴染みのものであるとともに、数直線等の図は見るだけでなく、操作をして児童が関わることで有効性が高まることが示されている。そこで数直線を使って様々な値を求める経験を積むことが、比例的推論の発達を促し、児童の思考に対し有効に働くものと考えられる。

2. 3　中継点を意識させた数直線の操作

素地的活動を５年「小数のかけ算」への橋渡しとするために、調査対象校で使用されている教科書における５年「小数のかけ算」の内容を検討しておく。

単元最初の問題は、「１ｍの値段が８０円のリボンを、２．３ｍ買いました。代金はいくらですか」である。ここで「８０×２．３」という立式をした後に、計算の仕方を考える学習活動が取り入れられている。教科書においての計算の仕方は、次の２点が例示されている。

①　２．３ｍは０．１ｍの２３個分なので、０．１ｍの値段を求めて２３倍する。

②　２．３ｍを１０倍し２３ｍ分の代金を求めてから、１０でわる。

①の方法は、０．１ｍの値段を思考の中継点として、目的の２．３ｍの値段を求めている。同様に、②の方法は、２３ｍの値段を思考の中継点としている。これらの方法を、先に述べた矢印を導入して数直線に表すと、図４のように、倍関係が２段階の矢印で表現される。しかし、４年生までの教科書を見る限り、こ

のように数を操作する経験が十分に行われているとは言い難い。また、この計算の仕方の根本にある、長さが１／１０になったとき、それに伴って値段も１／１０に変化するという考え、つまり、比例的推論も必要とされる。

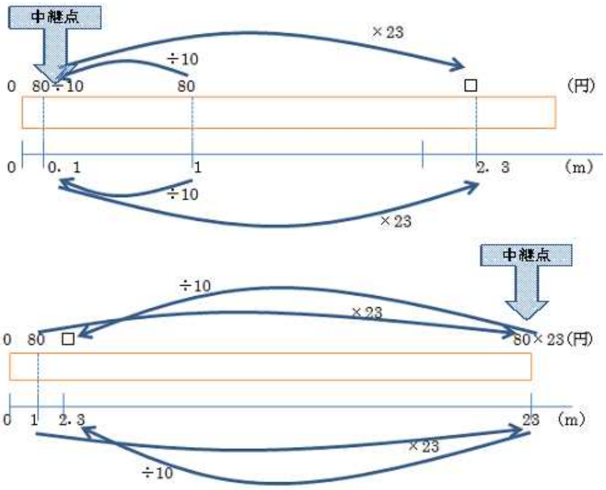

図 4

白石(2006)の研究では、比例的推論を用い、数直線の操作に慣れさせることで、整数から小数へ意味の拡張を図る際に、児童にとって、数直線が有効な道具となったことが示されている。

以上のことから、５年「小数のかけ算」への橋渡しとするために、素地的活動において直接の倍関係で解決できない問題（中継点を意識させ、２段階の矢印を用いて数直線の操作をする活動）を取り入れることが効果的であると考えられる。

素地的活動で使用する問題は、４年生までの既習事項を用いることで解決できる整数の計算をもとに構想した。また、５年「小数のかけ算」へ児童が抵抗なく取り組むことができるように、「小数のかけ算」の導入で用いられているものと同様の、長さと値段の場面を設定することとした。

問題は段階を踏んで、数直線の操作に慣れさせ、比例的推論の発達が促されるように構成した。

素地的活動を通して、数直線の見方を知り、数直線の操作に慣れ親しませる。そして、数直線を操作する経験を積むことで、比例的推論を発達させることにつながるものと考えられる。

さらに、数直線に倍関係を表す矢印を記入し、数を操作することで、乗法構造が視覚化される。このことで、４年生までの既習事項が整理され、５年「小数のかけ算」への活用も促進されるものと考えられる。

3. データの収集方法

本研究のデータは、第４学年１クラス６名に、平成２６年２月２５日から２月２８日まで４時間行った算数の授業を、ビデオカメラ及びＩＣレコーダーで記録したものである。

比例的推論の変容を示すために、抽出児２名を選出した。

担任によると、抽出児ユアは、まじめでこつこつと学習を進める。教師の発話に対する反応がよく、学習に対する理解もよくできているとのことであった。なお事前調査による図では、問題場面の連続量を分離量のように表していた。

抽出児エナは、自力解決の際に近くの児童と相談したり、自分の考えを話したりしながら学習を進めることが多い。事前調査による図としては、問題場面を連続量で表し、クラスで一人だけ数直線図に近い図をかいていた。

抽出児２名の学習過程を、ビデオカメラ及びＩＣレコーダー、ワークシート等より特定し、抽出児の授業プロトコルを作成した。

なお、本稿では紙幅の関係上、エナの学習過程についてのみ分析・考察を行う。

4. 実際の授業と考察

4.１　第1時目

ねらい：数直線を全体で共有する。

問題：１ｍで９０円のリボンがあります。このリボンを３ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

１ｍや９０円の表現方法は幅としての見方

しかみられなかった。数直線に数値間の倍関係を表す矢印を導入するためには、幅としての見方より、位置としての見方を押さえさせる必要があった。数直線の数値を位置としてみることを促すために、実物を使って児童に考えさせた。巻き尺を下に貼り、リボンを引き出していった。ゆっくりとリボンを引き出しながら、「１ｍはどこか？」と児童に尋ねた。５０ｃｍでも８０ｃｍの所でもなく、１ｍの所ただ１点が１ｍであることを捉えさせた。値段の位置も同様に押さえた。

次に実物大のリボンを使って４ｍ、５ｍ、６ｍの時の値段が求められるか確認した。その際、教師が６ｍを表そうとすると教室に入らないことから、具体物を小さくし、簡略化した図にしてもよいかと児童に問いかけ数直線を導入した。

さらに、数直線を使っていく中で、数量間の倍関係を表すものとして矢印を導入していった。

そして、数直線を使って、いろいろな長さの値段を求めてみようと投げかけ、それぞれの児童に自由な長さの値段を求める時間を設定した。エナは、１１ｍの値段を求めることを課題に設定した。数直線への矢印の記入や立式を行わず、筆算を用いて解答に至った。

この時、教師から「式と答えと矢印もかけるか」と問われると、９０×１１と立式する。次に数直線へ矢印をかくが、０から１１へ矢印を記入した。

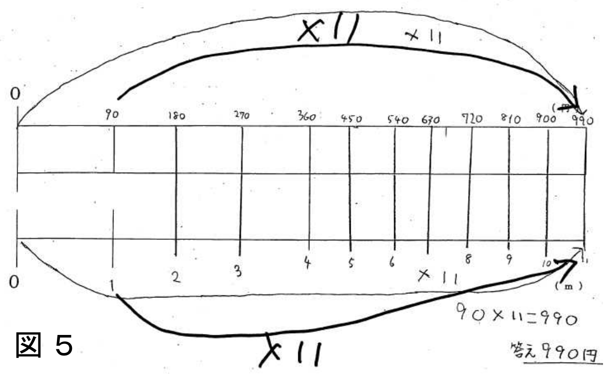

図５

教師から声をかけないと矢印を書かなかったり、０を矢印の始点にしたりする姿が見られた。これは矢印と倍関係の数値をかくことが理解できていないということではなく、これまで数直線に親しむことがなかったこと、矢印はこの時間に初見であったことが原因であると考えられる。

教師が矢印の始点について問うと、エナはすぐに訂正したことから、数直線の見方や矢印の操作についてあまり抵抗なく導入できたものと見られる。

エナは筆算で計算し解答が出た後に数直線を完成させた。このことから、この段階で問題解決に対する数直線の有効性は感じられてはいないものと推察できる。

児童にとって、数直線はこれまであまり馴染みがないようだったので、最後に数直線図がこれまでの学習の中にも登場していたことを教科書で確認すると、「本当だ」と驚いた反応を示した。数直線図についてはこれまで教科書で目にすることはあっても、使用した経験はあまりなかったことが推察される。

4. 2　第2時目

ねらい：中継点を意識させる問題（１ｍあたりの値段が中継点となり得る問題）で数直線を操作する。

問題①：３ｍで２４０円のリボンがあります。このリボンを６ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

前時とは変わって、立式よりも先に数直線から記入した。はじめに３ｍと６ｍの点を数直線にかく際に、エナは数直線上の０から３ｍまでの長さを定規で測り、２倍の長さの所に６ｍを引いた。６ｍは３ｍの２倍であることをエナが感覚的にとらえていることが見て取れる。次に２４０×６＝１４４０と計算した。３ｍ、６ｍに対応する代金が２４０円と１４４０円であり、比例関係にないことに違和感を感じることなく数直線に記入した。ここから本時の時点では、エナは比例の感覚や

数直線図から量をとらえる力が未発達であったり、図と計算の整合性に注意が向かなかったりしていることが推察される。

また、２４０×６と誤って立式し、３ｍから６ｍへの矢印を３倍とした。問題文に表れている数値「３ｍ、２４０円、６ｍ分」に対し、エナが数直線と立式に用いた数値もこの３つの数値のみである。エナは６ｍが３ｍの２倍であることを感覚的にとらえているにも関わらず、３ｍから６ｍへの倍関係について３倍と記入した。これらのことから、エナは問題場面を十分に理解せずに、問題文に表れている数字を乗法に当てはめているだけと見ることもできる。

そこで、３ｍと２４０円が表裏に書かれた半具体物を渡した。半具体物を２つつなぎ合わせることで３ｍの２倍が６ｍとなることを理解し、数直線と立式を修正した。

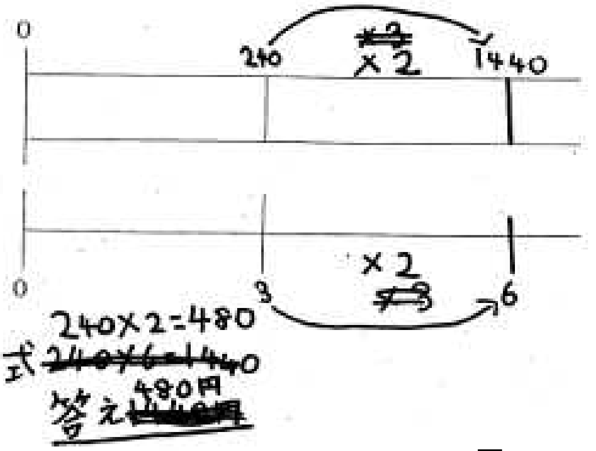

図６

問題②：３ｍで２４０円のリボンがあります。このリボンを２ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

３ｍから２ｍへ矢印÷２を記入し、その後、式を２４０÷２＝１２０とした。教師から解決方法の説明を求められると「さっきユアさんがやったので、（３ｍから）１ｍの値段を求めるのに、÷３だったから、２ｍのときは÷２だと思って計算したら１２０になった。」と答えた。そこで、エナの考えを半具体物で確認することにした。

半具体物を半分に折る操作をすると、「１ｍと５０ｃｍ。じゃあ、あれは１ｍ５０ｃｍ。」と自分の求めた値が問題の２ｍの代金ではなく、１ｍ５０ｃｍの代金であることに気づいた。このことから、エナは、問題文からだけでは問題場面を想起するのは難しいが、問題場面を視覚化できるように置き換えれば、場面の理解を進められる可能性がある。

この時点では、数直線よりも教師が用意した半具体物がエナにとって有効な思考の道具であると言える。しかし、エナ自身が数直線を思考の道具として、自由に使いこなすことができれば、自力解決が促進できる可能性が考えられる。

その後、帰一法での解決（１ｍあたりの値段を求め、２倍する方法）を他の児童が紹介した。すると、エナは「もう１個分かった。２４０÷３で８０になって、８０＋８０＝１６０」と自分なりの解決方法を見つけていた。

また、ここで用いられたように直接の倍関係で解決することができず、１ｍあたりの値段という中継点を通って２段階の矢印を用いる方法を、児童は、「遠回り」と名付けた。

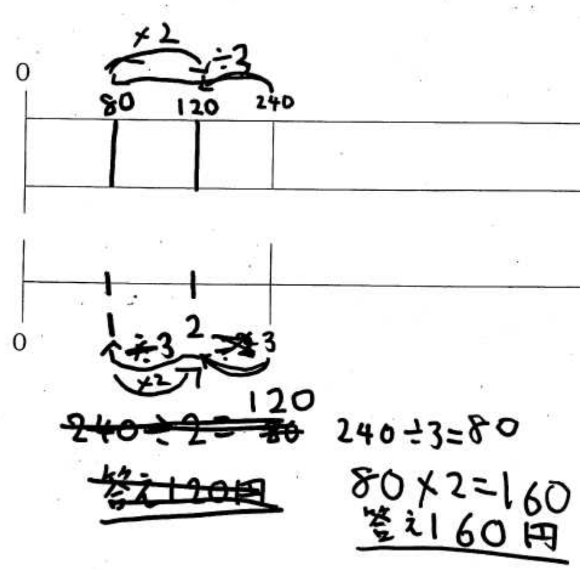

図７

4．3　第3時目

ねらい：中継点を意識させる問題（１ｍあたりの値段が中継点となりうる問題）で数直線を操作する。

問題①：３ｍで２４０円のリボンがあります。このリボンを５ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

２時目においての児童が戸惑いを見せたことから、当初予定していた１ｍあたりの値段が求められない問題場面よりも、１ｍあたりの値段が求められる問題場面に再度取り組ませることにした。

前時では問題場面の数値を乗法に当てはめただけのように立式していたエナだが、本時の１問目では数直線に問題場面を表すことで問題場面に即した立式ができた。前時は用いることがなかった帰一法を用いて解決した。

１問目の解決に直接は関係のない数値（２ｍ１６０円、６ｍ４８０円）を数直線に書き込んでいくことで 「６ｍひく８０円でもできたか。」というエナの発話にあるように別の解決方法にも気づくことができた。

前時に使用していた半具体物は使わず、数直線に情報を書き込んでいくことで解決の道筋が見えてきているので、数直線がエナにとって有効な道具となってきている様子がうかがえる。

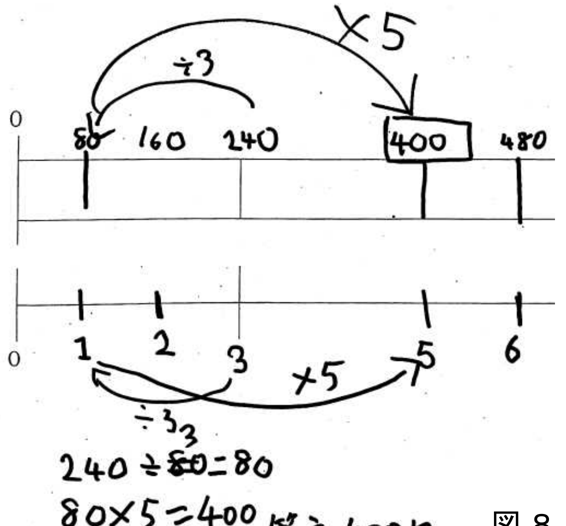

図８

問題②：３ｍで２４０円のリボンがあります。このリボンを４．５ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

数直線を操作して試行錯誤するが、なかなか解決にたどり着くことができないでいた。

自力解決のはじめの段階では、８０×１．５＝１２００や、８０×４＝３２０とし、３２０×０．５＝１６００といったように、問題場面に表れている数値や計算結果に表れた数値を組み合わせて解決しようとする様子が見られた。しかし、この活動に納得がいかないようで、明らかになっている数値を数直線に書き込んでいった。

数直線による問題場面への働きかけにより、４ｍと５ｍの代金は分かるので、０．５ｍの値段が分かれば解決できるという彼女にとって明確な課題が浮き彫りになった。エナは１ｍの半分を求めればよい、それは８０÷２という既習の整数のわり算で解決できるとして、既習事項と本課題を結びつけて解決することができた。

ここでも、問題場面を数直線に表すことがエナの場面理解を進め、課題解決に有効に働いたことが分かる。

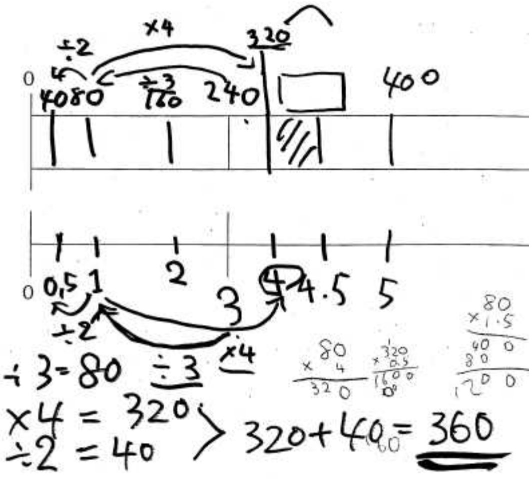

図９

さらに、教師が９ｍを中継点にすると解決できないかと問いかけると、９ｍの値段を半分にするという操作をし、解決できた。

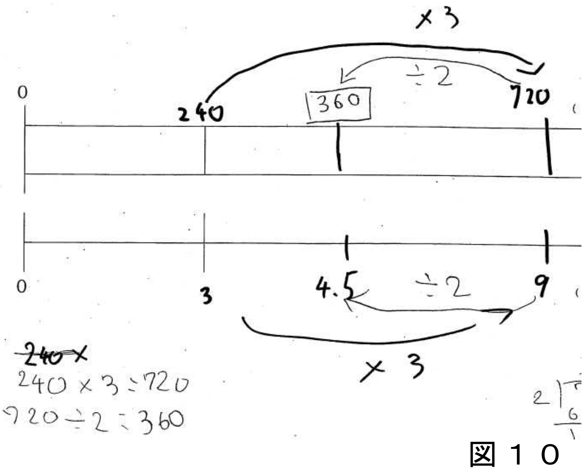

図１０

５ｍの値段を求める問題は、全員が解決できた。しかし、１ｍあたりの値段が求められる問題においても、４．５ｍの値段を求めるといった小数の値を求めることには、全体的に児童の戸惑いが見られた。

4.4　第4時目

ねらい：中継点を意識させる問題（１ｍあたりは求められないが、与えられた長さの１／２の値段は求められる問題）で、数直線を２段階の矢印を使って操作する。

問題①：３ｍで２００円のリボンがあります。このリボンを１．５ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

前時までの児童の様子から、本時予定していた問題（１ｍあたりは求められないが、与えられた長さの１／３の値段は求められる問題「９ｃｍで６円のリボンがあります。このリボンを１５ｃｍ買ったときの代金はいくらでしょう。」）は、難易度が高いと判断し保留した。そこで、前時に計画していたが、実施できなかった１ｍあたりの値段が求められない問題（与えられた長さの１／２の値段は求められる問題）を提示することとした。

問題を提示すると、本時の課題では１ｍあたりの値段が求められないことに気づいた児童がおり、そのことを全体で共有した。だが、前時まで、エナにとって有効な方法であった１ｍあたりの値段を求めること（帰一法）に固執する姿が見られ、エナは混乱を示した。

しかし、隣の席の児童と会話する中で、求めたい１．５ｍは３ｍの半分であることに納得すると、数直線に数値と、倍関係を表す矢印を記入し、立式・解答に至った。

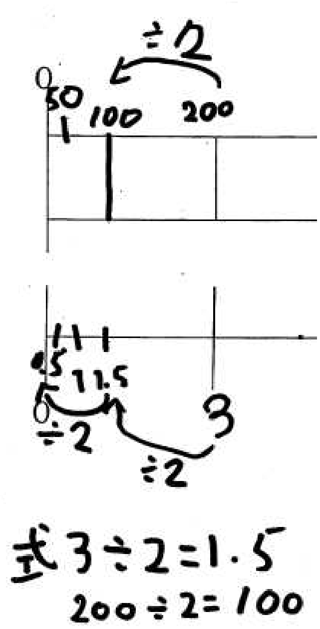

図１１

問題②：３ｍで２００円のリボンがあります。このリボンを４．５ｍ買ったときの代金はいくらでしょう。

１ｍあたりの値段は求められないことを導入で確認し、本人も 1 問目において１ｍあたりの値段を使わずに解決したのだが、ここで再び、「あー１（m）の計算求めたい。1（m）の計算求めないとできないんだよ」と、１ｍあたりの値段を求めようとし、混乱していった。

しばらくして、近くの席のリカのワークシートをのぞき込む。すると、「リカさんの考え合ってるわ。リカさんの考え超簡単なんだけど」「÷２して×３」と発話した。

リカの数直線を見ただけで、エナは１問目で使った１．５ｍの値段を３倍すれば、４．５ｍの値段になることに気づいた。そこから自分も数直線を用いて自力で解決した。

個人思考の時間が終わり、全体の場でエナにリカの考えを説明させた。エナの説明する場面は以下の通りである。

エナ：「３÷２をして１．５にして」
Ｔ　：「まず１．５ｍの値段を求めたのね？」
エナ：「（うなずいて）次に１．５×３をして

４．５」
Ｔ　:「うん。だから値段は？」
エナ:「値段も一緒で、２００÷２をして
　　１００にして１００×３をして３００」

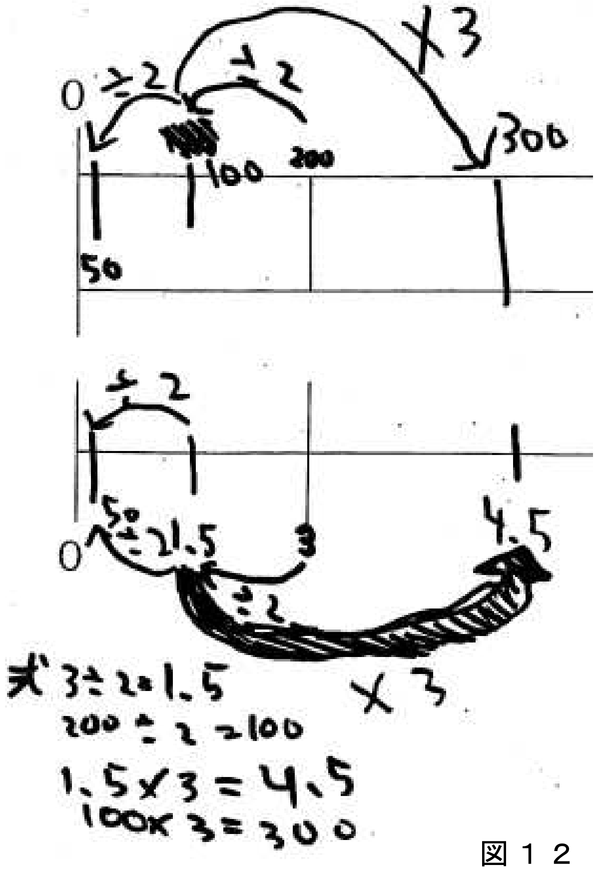

図１２

エナは、数直線をみるだけでリカの解決方法を理解した。これはエナが数直線の見方に慣れ親しんで来たことを表している。さらに、その後、リカの解決方法を説明することもできているので、数直線に場面を表すことが問題場面の理解を進めたと考えられる。

さらに、「値段も一緒で～」と発話していることから、長さと値段が比例関係にあるということをエナが意識している様子がうかがえ、比例的推論がエナの考えの根拠となっていると言える。

5. まとめ

5.１　場面への働きかけによる課題の明確化

３時目の「３ｍ２４０円のリボンを４．５ｍ買ったときの代金を求める」問題において、問題場面を提示した時点で、すぐに解決にいたる児童は見られなかった。

しかし、この時間におけるエナの姿は、本研究における大きな成果と言える。

３ｍ２４０円のリボンを４．５ｍ買ったときの代金を求める際に、エナは問題場面に与えられた数値や計算結果から出てきた数値を組み合わせて立式し、妥当な数値が表れるのを試すような活動をしている。これは問題場面が複雑になったことで、何を目的として活動すればいいのかが見えていないため、手探りで活動している状態と見ることができる。

ここでエナは、自分のもっている情報である４ｍと５ｍの代金を数直線上に記入することで、問題場面を理解し、解決に至るためにはまず０．５ｍの代金を求めることが必要だという、明確な課題を見つけることができている。０．５ｍの代金を求めるためには既習事項である整数のわり算を用いれば解決できると気づき、すぐに０．５ｍの代金を求めることができた。そして、４ｍの代金と０．５ｍの代金を合わせることで、４．５ｍの代金を求めるという本課題の解決につなげることができた。

４．５ｍの代金という最終地点への道筋は見えないが、数直線によって問題場面に働きかけることで、最終地点の前に、０．５ｍの代金という通過地点を通れば、最終地点にたどり着けるであろうということが、エナに見えたと考えられる。０．５ｍの代金という明確な課題を見つけたことでエナのもつ既習事項が呼び起こされ、課題解決につながったと言える。

5.２　数直線による場面の理解

素地的活動の当初に提示した整数の問題場面のように、問題の構造が単純であった場合には、数直線は自分の立式の説明にのみ使用されていた。そのため、児童は問題場面から

直接立式し、解答まで至った後に数直線を完成させていた。
しかし、素地的活動の後半のように問題場面が複雑になってくると、児童の活動の順序に変化が見られ、数直線に問題場面を表してから立式するようになっていった。
問題文を読むだけでは問題場面が容易に見えてこないために、数直線に表すことが問題場面の理解に役立っていると思われる。
数直線から立式する際には比例的推論が考えのもととなっていた。小数のかけ算の学習において比例的推論の発達を促すことで、乗数が小数になっても、これまでの整数の場面と同様に倍の考えで立式できるものと考えられる。立式で戸惑いが生まれなければ、児童は計算の仕方を考えるという課題に、すぐに取り組むことができるようになる。
素地的活動の当初において、エナは問題場面に表れた数値を適当に式に当てはめ、問題場面に整合しない数値が出ても矛盾を感じないでいた。このように問題場面をあまり意識しないままで処理を進めてしまっている児童は、エナだけではないと思われる。この時に半具体物で問題場面を表現するとエナは問題場面がイメージされ、矛盾に気づくことができた。さらに学習が進むにつれて、数直線で問題場面に働きかけるようになり、エナの場面理解が進んでいる様子が見られた。問題場面へ働きかけることで、児童の場面の理解は進むものと考えられる。

5．3　比例的推論による数の操作

本研究の後に、エナが５年生に進級し、実際に小数のかけ算を学習するところを調査した。
純小数をかける場面（１ｍの値段が８０円のリボンがあります。このリボン０．８ｍの代金はいくらでしょう）では、エナは立式することができない。これは、「答えが小さくなるからわり算」という考えにとらわれてしまっているからと推察される。
しかし、この時間のエナは、立式はできないものの課題を解決することはできていた。
エナは、「８０÷０．８」と立式したために混乱を示すが、隣の児童の「遠くの彼方から、÷１０する」という発話から、「遠回り」のことを想起したと考えられる。
「÷１０」という発話から、解決の道筋を反対方向から考え、０．８を１０倍した８ｍを「遠回り」の中継点とすればいいということに気づいたと思われる。８ｍの代金を求めるのは、既習事項である整数のかけ算であり、８ｍから０．８ｍに行くのも既習事項である整数のわり算である。ここでのエナは小数のかけ算の学習を既習事項である整数の計算を活用して解決していると見られる。
友だちからの発話をきっかけとしてではあるが、未習の純小数をかける学習を既習事項の整数の計算を活用して解決することができていた。
さらに、立式ができないために解決をあきらめてしまうことなく、なんとか自分のもっている知識を活用して解決しようとしている点も、素地的活動の大きな成果と言える。
ここでエナが未習の内容と既習事項を結びつけることができたのは、素地的活動においての比例的推論による数の操作が有効に働いたことが要因だと思われる。比例的推論による数の操作を用いることで、乗法構造を含んだ学習において、児童は未習の内容と既習事項を関連づけて課題解決できることが考えられる。

5．4　思考の有効な道具としての数直線

第４時目においては、説明がなされなくても、エナは数直線を見ただけで解決方法に気づいた。その後、解決方法を自分のことばで説明できていることから、エナが解決方法を正しく理解したと見ることができる。比例的推論を用いて数直線上で数の操作を経験して

きたことにより、エナにとって数直線が思考の有効な道具となってきたと考えられる。

学級全体の場で、数直線の操作を立式の根拠として説明すると全員が受け入れていた。このことから、数直線は学級全体としても共通の思考の道具となっていたことが見てとれる。

6. おわりに

本研究では、４年生児童に、５年「小数のかけ算」の学習の素地となる授業を行い、比例的推論の発達について調査を行った。

エナは数直線上で数の操作を行いながら学習を進め、１あたりの量が求められる問題については、よく理解していた。しかし、１あたりの量が求められない問題になると、数を操作することが難しくなる様子が見られた。児童が、もっと自在に数を操作できるようにするための研究が必要であり、今後の課題としたい。

引用･参考文献

青山尚司. (2013). 割合の見方・考え方を育てる指導の工夫.日本数学教育学会誌, *95*(10), 2-10.

柄園高士. (1983). 関数の考えを用いた乗法の指導５年小数のかけ算:数直線を使った指導を通して. 日本数学教育学会誌, *65*(6), 34-38.

国立教育政策研究所・教育課程研究センター (2014). 平成２６年度全国学力・学習状況調査解説資料小学校算数:一人一人の児童の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて. 国立教育政策研究所.

佐藤満. (2008). 比例的推論の発達を促す統合的な授業の効果に関する研究: ６年「倍と割合」「比」の実践を通して. 上越数学教育研究, *23*, 53-64.

白井一之. (1997). 乗法・除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導. 日本数学教育学会誌, *79*(6), 51-56.

白石信子. (2005). 子どもの理解に基づいた小数のわり算の指導について:数直線への比例的な見方を通した意味の拡張. 上越数学教育研究, *20*, 163-174.

白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究:数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, *21*, 69-80.

田端輝彦. (2001). 小数倍の導入についての一考察:小数倍に表すよさに焦点をあてて. 日本数学教育学会誌, *83*(12), 2-12.

中島健三. (1968). 乗法の意味指導について. 日本数学教育学会誌, *50*(2), 2-6.

中村享史. (1996). 小数の乗法の割合による意味づけ. 日本数学教育学会誌, *78*(10), 7-13.

中村享史. (1999). 乗除法の指導における数直線の教育的役割. 新しい算数・数学教育の実践を目指して:杉山吉茂先生ご退官記念論文集, (pp. 87-95). 東洋館.

布川和彦. (2008). 小学校算数科で思考力をはぐくむ.上越市立大町小学校「思考力をはぐくむ授業：構想と展開のポイント」日本文教出版.

馬場雅史. (2005). 小数の乗法における意味の構成に関する研究.日本数学教育学会誌, *87*(4), 3-11.

日野圭子. (2002). 授業における個の認知的変容と数学的表記の役割:「単位量あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して.数学教育学論究, *79*, 3-22.

福島県教育委員会. (2013). 平成 25 年度全国学力・学習状況調査結果.2013 年 9 月 20 日 http://www.gimu.fks.ed.jp/shidou/kikaku/25zenkokutesuto.pdf より入手

山本正明. (1995). 問題解決における数直線や線分図等の図の効果.日本数学教育学会誌, *77*(8), 116-123.