上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.93-100.

空間図形領域における学習の困難性についての一考察
～角そのものの性格に焦点を当てて～

三ツ間　伸太朗

上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

数学教育における空間図形の学習・指導についての研究が，これまで盛んに進められてきた．以下にいくつかの先行研究を示そう．

熊倉他 (2002) は，空間図形についての理解に関して，「ア.基本的な立体図形に関する理解　イ.空間における直線や平面に関する理解　ウ.空間図形の操作能力　エ.空間図形への活用能力」の 4 つの観点を設定し，空間図形に関する困難性について考察している．そこでは見取図の見え方が問題解決に影響を与えることや立体図形の内部を通る 1 つの平面を想定して思考を進めることなどの困難性を指摘している．

影山 (2004) は，数学教育における空間的思考の水準に関する研究を行っている．そこでは，思考水準と思考活動をまとめ，思考の水準の中に思考の質を導入することで生徒の種々の空間的思考を提案している．

狭間他 (1989) は，小学校第 1 学年から中学校第 3 学年までの児童生徒の三次元具体物の二次元表現について，木製立方体から構成されたポリキューブ（面からなる立体の模型）を紙に描いて遠くの友達に伝える課題と，ストローで構成されたスケルトンモデル（辺からなる立体の模型）を紙に描いて遠くの友達に伝える課題の 2 つの課題から，立体の二次元表現についての発達的特徴を報告している．

これらの研究は，‘子ども’の図や図形の認識に関する困難性や‘子ども’の空間図形に対する思考水準など，子どもに焦点を当てている．特に，子どもの空間図形の認識について，多くの研究が進められてきた．

一方，三次元空間における図形は，2 次元の平面図形と比較すると，複雑で必ずしも容易に捉えられるものではないように思う．例えば，三次元空間における角は，面と面によって作られる角，直線と直線によって作られる角など様々なものが存在し，何を角とするのか必ずしも明確でない．さらに，歴史的にも，立体を特徴付ける性質として頂点と辺という概念に注目したのは 18 世紀のオイラーからとの指摘もある（ラカトシュ，1976, p. 7）．つまり，空間図形にはいくつもの要素があり，そこでどの要素に注目すべきか，といったことは必ずしも明確ではないのである．しかし，こうした立体を構成する要素は何か，三次元空間における角とは何か，といった空間図形そのものに焦点を当て，その複雑さゆえに生じる学習者の困難性を検討した研究は多くはないようである．

そこで筆者は，空間図形の図形そのものの性質を考察することにより，学習者が空

間図形に関する問題を解決する際にもちうる困難性を検討することとした．特に，本稿では，先に触れた三次元空間における角について考察を進めたい．

この目的を達成するため，まず，図形とはいかなるものか検討する．具体的には，Parzysz (1988) を参考に，図形と図，そして両者の関係を明確にする (2 章)．次に，三次元空間においていかなる角が考えうるのか明確にし，それぞれの性格及び複雑さを検討する (3 章)．そして，今日の中学校数学空間図形領域において角がいかに扱われているのか，教科書等を用いて示す(4 章)．その上で，三次元空間における角に関わる困難性を，これまでの先行研究で扱われてきた問題を用いて検討する．図形そのものの性格という視点からの考察により，先行研究で指摘されてきたものとは異なる，角に関する学習困難性の可能性を示す (5 章).

2. 図形と表現

学校数学の図形領域では，空間図形領域に限らず，‘図形’という語と‘図’という語が用いられる．それぞれは何を意味するのであろうか．本研究では，図形そのものの性格に注目するため，まず図形や図がいかなるものか検討する．

英語では，図形に相当する語として，shape や figure などの表現がしばしば用いられる．shape は小学校で扱われる‘かたち’に相当するものであろう. 一方, figure は図形に近い意味で用いられるものの，日本語の‘図’にも相当する．一般に，日本語では，何らかのものが２次元の紙面上に表現された物質的なものを‘図’と呼ぶ.

数学教育学研究において，figure の意味するところは必ずしも明確ではない. Duval (1995) は, geometrical figure という語を「表現」すなわち紙面上に描かれたものに対して用いる (p. 142)．抽象的な幾何学的な対象を指すのではなく，物質的なものを指すのである. 一方, figure の語を抽象的な数学世界の幾何学的対象として捉える研究もある．Parzysz (1988) は，figure を,「それを定義する文章 (text) によって描写される幾何学的対象」(p. 80)とし，直接見たり触ったりすることのできない，想像上のものに対して用いる. そして, figure というものは一般に何かしらの方法で表現されるため，その 2 次元の表現を drawing ，3 次元の表現を model と呼ぶ.

図形と図という二つの語がわが国の学校数学，特に中学校で用いられることからすれば，Parzysz の figure と drawing の区別に従い，図形を抽象世界の幾何学的対象，図を図形の物質世界での表現と捉えることが適切と考える．そこで本稿では，このような立場で議論を進めることとする．

前述のように，図形は文章や図によって表現されることにより，図形がもつ情報が伝達される．図形領域の問題を解決する際には，特に図がその大きな役割を果たす．ただし, 空間図形については, Parzysz (1988) が指摘するように，２次元の図のみならず３次元のスケルトンモデルやポリキューブのようなモデル(模型) もその表現となる．そして，異なった表現では，当然ながら伝達できる情報が異なる．さらに，空間図形の場合は図とモデルではその違いが非常に大きい. こうしたことを, Parzysz (1988) は，図形と表現の関係として図 1 のようにまとめている (p.80).

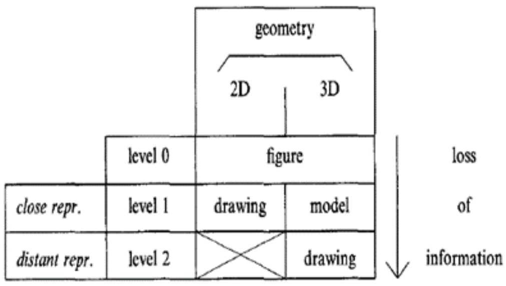


図 1：図形と表現の関係

図 1 では，図形 (figure) から下に離れた表現ほど情報の欠落が大きいことを示している．例えば，2 次元の図形では，図 (drawing) による表現は，さほど情報の欠落がないものの，3 次元の図形を 2 次元の図で表現する場合は情報の欠落が大きいのである．実際，空間図形を 2 次元で表現した場合，角の大きさや辺の長さの関係などが失われることが多い．

以上のことからすれば，空間図形の学習においては，与えられた図形の表現からいかに図形の性質を読み取るかが大きな課題となる．空間図形の認識が研究課題となるゆえんである．ただし，図形性質の読み取りには，その性質を概念として理解していることが求められる．筆者は三次元空間における角は，その理解自体が難しいのではないかと考えるのである．

3.　三次元空間における角

三次元空間では，種々の角を考えることができる．それは平面図形の場合と比較にならないほど多様である．以下では，複数の異なった角を整理し，三次元空間における角の複雑さについて考察する．

三次元空間では，二次元平面の場合に考えられた直線と直線のなす角以外に，いくつかの角を考えることができる．例えば，交わった二つの平面の開き具合を示す角や三つ以上の面により作られる立体的な角（立方体の頂点に作られるようなもの）などである．これらの種々の角は，学校数学では必ずしも扱われないが，ユークリッドの原論（以後，原論）などで古くから扱われてきたものである．ここではまず，原論を参照し，三次元空間における角を整理する．

整理した結果を表 1 に示す．この表において,「名称」は原論に見られた角に対して，筆者が種々の文献を参考に命名したものである．「定義」は，原論から引用したものである．なお，この表では，球面上に作られる角については割愛した．

表 1：原論における角の種類とその定義

名称	定義
平面角	平面角とは平面上にあって互いに交わり，かつ一直線上をなすことのない 2 つの直線相互の傾きである．(原論 1 巻　定義 8)
直面角	線分の平面に関する傾きとは，その線分の平面外の端から平面に垂線がひかれ，このようにして生じた点(垂線の足)からもとの線分の平面上の端へ線分が結ばれたとき，このようにひかれた線分と平面上に立つもとの線分とによってはさまれる角である．（原論 11 巻　定義 5）
二面角	平面の平面に対する傾きとは，平面の双方において同じ点で交線に対し直角にひかれた線分によってはさまれる鋭角である. (原論 11 巻　定義 6)
立体角	立体角とは相会しかつ同一平面上にない二つより多くの線分のすべてが互いになす傾きである．あるいは立体角とは 1 点においてつくられ同一平面上にない，二つより多くの平面角によってかこまれる角である．(原論 11 巻　定義 11)

ここで, ‘平面角’は, 平面図形についての原論第 1 巻に見られるものである．これは空間図形においても考えられ，2 直線が交わる場合に適用できる. ‘直面角’とは, 面と直線との間にできる角のことである（図 2)．原論では，直線と平面の交点ではない直線上の 1 点から平面に垂線を下し，直線と平面の交点，平面上にない直線上の点，垂線

の足からなる直角三角形をつくることで直面角を平面角に帰着させ，一意に定めている．この場合，直面角の大きさは平面角の大きさによって求められる．また，直面角は，直観的には面と直線との開き具合を示しているため，図 2 右図のように，直線と平面の交点，平面上の任意の点，平面上にない直線上の点から三角形を考えてしまうと, 直面角をうまく決めることはできない.

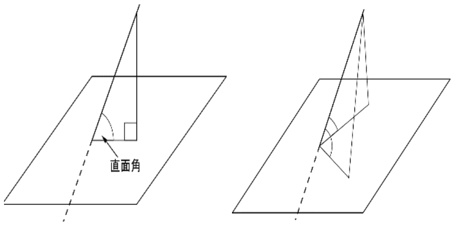


図 2：平面に垂線を下した場合（左図）と平面上任意の点を取って角を考えた場合（右図）

二面角とは，面と面との間にできる角である．原論では，二つの平面が交わる直線（交線）上のある点を通り，各々の平面上の，交線に“垂直”な 2 直線のなす平面角に帰着させ，二面角を一意に定めている（図 3）．すなわち，面と面の 3 次元的な開き具合を平面角に帰着させて定義しているのである．その大きさも当然ながら平面角の大きさにより求められる．二面角は直観的には面と面の開き具合を示している．図 3 の下図のように，交線と垂直ではない 2 直線の傾きを考えた場合，二面角をうまく定めることができない．

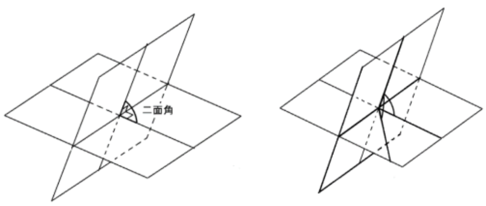


図 3：二つの平面上にある交線と垂直な直線同士の傾きを考えた場合（左図）と垂直ではない直線を考えた場合（右図）

立体角とは, 直面角･二面角とは異なり，線や面で囲まれた部分の大きさを平面に帰着せずに，空間の広がり具合として考える角である. 原論では, 三次元空間において，同一平面上にない 3 本以上の線分によってくられる空間の広がり，または同一平面にない 3 つ以上の平面角によって囲まれる部分であると定義している．

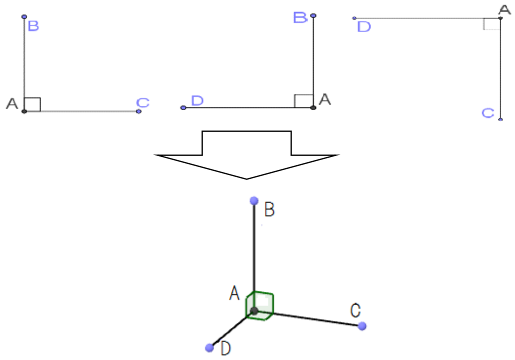


図 4：３つの平面角からできる立体角（頂点に集まる角はすべて直角）

立体角は平面角に帰着させないため，その大きさを表す方法が問題となる．一つの方法は球面法である．球面法とは，立体角の頂点を中心とする球を作り，立体角に切り取られた球面の一部の面積を角の大きさと考える方法である．平面の場合における弧度法（角によって切り取られる円弧の長さを角の大きさとする）と同様の考え方である．例えば，図 4 の立体角の大きさは曲線で囲まれた部分の面積である（図 5）．

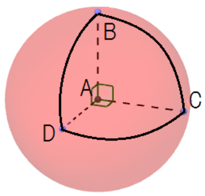


図 5：切り取られる球面

その他にも，自然な考えとして，頂点に集まる平面角の和（図 4 ならば 90°+ 90°+ 90°＝ 270°）として立体角の大きさを考えることができそうである．しかし，この考え方では，図 6 の頂点 A にできる立体角と図 5 の立体角の場合が同じ大きさで表され

る．これは，直観と異なり，立体角の大きさをうまく定めることができない．

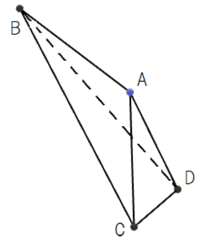


図 6：∠CAB=∠DAB=120°
∠CAD=30°の三角錘

以上のように三次元空間における角には様々なものを考えることができる.そして，それぞれの角をより正確に捉えようとすると，その定義は複雑なものとなった．直面角や二面角の場合は，複数の条件を考慮して平面角に帰着させ，立体角では，平面角に帰着させてその大きさを捉えることができなかった．

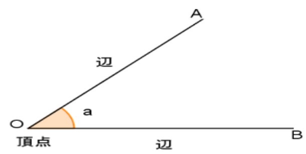
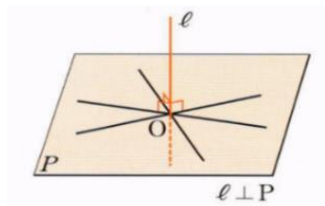
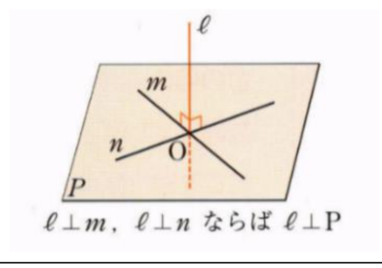
空間図形の問題を解決する際にも，これまでに示したような角の複雑さが影響を与えるのではないだろうか．この点については 5 章で考察する．

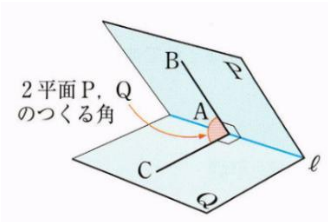
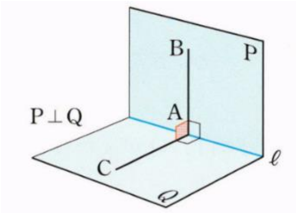
4.　中学校数学における角の扱い

前章までは，学校数学に限定せずに，一般的に考えられる三次元空間の角について考察した．そこでは，角の多様性による複雑さや，問題解決の際に生じる角の複雑さの可能性が示唆された．本章では，学校数学に立ち返り，中学校数学の空間図形領域において，三次元空間における角がどのように扱われているのか示す．

中学校数学において空間図形領域の学習が行われるのは第 1 学年および第 3 学年である．特に第 1 学年で平面角や直面角が扱われる．学校図書の教科書では「小学校で学んだ直方体の辺や面を手がかりにして，空間内の直線や平面の位置関係を調べよう(市松信，2012，p.187)」という問いの中で次のように平面角，直面角，二面角について扱っている（表 2）．本稿では，学校図書の教科書をまとめているが，その他の教科書においてもほぼ同様の扱いをされている．

表 2：教科書における角の扱い

名称	定義
平面角	右の図(下図)の角は，1 点 O を端とする 2 本の半直線 OA，OB によってつくられている．このとき，O を角の頂点，OA，OB を角の辺という．この角を表すのに，記号∠を使って∠AOB と書き，「角 AOB」と読む． (p.151) 
直面角（垂直な場合）	直線 l が平面 P と点 O で交わり，O を通る P 上のすべての直線と垂直であるとき，直線 l と平面 P は垂直であるといい，l⊥P と書く．このとき，直線 l を平面 P の垂線という．(p.188)  直線 l が平面 P と点 O で交わり，O を通る P 上の 2 直線と垂直であるとき，直線 l と平面 P は垂直である．(p.189) 

二面角	2 平面 P，Q が交わるとき，その交線 l 上に点 A をとり，右の図(下図)のように， P 上に AB⊥l Q 上に AC⊥l となる半直線 AB，AC を引く．このとき，∠BAC を 2 平面 P，Q のつくる角という．(p.190)  また，∠BAC=90°のとき，平面 P と平面 Q は垂直であるといい，P⊥Q と書く．(p.190) 
立体角	扱われない

平面角は，平面図形領域で直線と直線のなす角と定義され，空間図形領域において改めて定義されない．そのため表 2 では定義を平面図形から引用した．平面角の大きさは主に，交わった 2 直線が垂直かどうか，が扱われるが，側面や底面の多角形の内角の大きさにも触れられている．直面角は，垂直である場合のみ定義され，一般の場合には定義されず大きさも扱われない．一方二面角は，一般の場合が定義され，平面と平面の垂直の語も定義される．定義は原論の定義と同様である．しかし，そのように定義する理由には触れず，一般の場合の二面角の具体的な大きさが問われる問いもない．立体角は，定義が扱われないどころか，3 つ以上の平面で決まる空間の広がりを角と考えることも扱われていない．

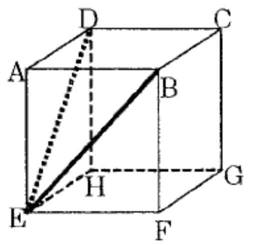
また，第 3 学年では三平方の定理の応用として空間図形が扱われるが，「角」についての学習は特にない．

以上のように，空間図形領域において角の扱いは比較的少ないように思う．特に，直面角や二面角の角度を具体的に求めることはほとんど扱われない，その代わり，直線や平面の位置関係として空間図形の角を扱っているようである．つまり，2 直線や平面と平面，平面と直線がどのように交わっているかについてのみを学習内容としているのである．

5.　角そのものの性格という視点から

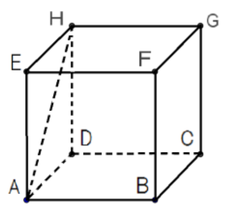
本章では，角そのものの性格という視点から問題 1，2 を考察し，角という概念の複雑さゆえの困難性の可能性を検討したい．ここでは，数学教育学研究等でしばしば見られる次の問題を用いて考察を進める．

問題 1：下の立方体において∠DAB の大きさを求める問題



熊倉他(2002)

問題 2：下の図のような立方体に，面 ADHE の対角線 AH を引いたときの∠HAB の大きさを求める問題



(1) 問題 1 の考察

問題 1 は熊倉他 (2002) などの調査で用いられた問題である．この問題に対し，正答の 60°ではなく，90°などと答える生徒が少なくないことが報告されている．

問題 1 において，子どもたちが正答を与えられない要因は何であろうか．‘はじめに’でも述べたように，これまでは空間図形をうまく認識できないこと，イメージできないことなど，子ども側の問題のように考えられてきた．しかしながら，本稿で考察した角そのものの性格を考慮すれば，必ずしも子ども側の問題のみではないように思える．

問題 1 は，平面角の大きさを求めるものである．ただ，3 章で述べたとおり，∠BED をいかなる角と捉えるのか，その可能性は複数ある．例えば次のものが考えられる．

① 平面角：平面 BDE 上にできる線分 BE と DE からなる角
② 直面角：線分 BE (or DE)と面 AEHD (or ABFE) がつくる角
③ 二面角 : 面 ABFE と面 AEHD がつくる角
④ 立体角：線分 EA,EB,ED からなる角

以上のように，∠BED と一概にいっても様々な角と捉えられる可能性がある．さらに，上のいずれかとして捉えると，さらに様々な解答の可能性が考えられる．

①の平面角と角を捉えた場合，△EBD が正三角形になることから∠BDE＝60°や，∠DAB の移動だから∠BDE＝90°などの解答が考えられる．②の直面角と角を捉えた場合は，BE，AE が同じ平面 AEHD 上にあるので，∠BDE の大きさは∠BEA と同じ大きさだから∠BED＝45°としたり，点 B から平面 AEDF に垂線を下したときの足は A だから平面と直線の角は∠BEA＝45°なので∠BED＝45°などといったものが考えられる．また，③の二面角と角を捉えた場合，立方体の面同士は垂直なので∠BED＝90°などとの解答が考えられる．さらに，D の立体角と角を捉えた場合，立体角の広がりをなんとか数値化しようとし，例えば一つの頂点に集まる平面角の和を考え，立方体の面は正方形で DE，BE は対角線だから∠DEA＝∠BEA＝45°なので∠BDE=90°などといった解答が生じうるであろう．

(2) 問題 2 の考察

問題 2 は平成 24 年度学力･学習状況調査の大問 5(1)の類題である．対角線が引かれた位置が異なる．この問題は，線分 HA,AB がなす平面角の大きさを求める問題であり，正答は 90°である．平成 24 年全国学力・学習状況調査では，この類題に対し，正答率は 62.5%であった．また，報告書では，直方体における辺と面に含まれる直線との位置関係の理解に課題がある(p.242)とのことである．位置関係の理解がこの問題の困難性なのだろうか.

立方体が面から構成されていると考えれば，面がないところの角の大きさが問題となっている．これは，初学者にとって奇妙に感じるのではないであろうか. その結果，平面角を考えず，他の角に注意がいくこともあろう. 例えば, 次のものが考えられる．

(ア) 直面角：線分 HA と面 ABCD からなる角
(イ) 二面角 : 面 ABCD と面 ABGH からなる角（これは面を考えた生徒のみ）
(ウ) 立体角：線分 HA,AE,AB からなる角

これらの角の捉え方に応じて解答は異なる. (ア)や(イ)と捉えた場合（図 7 上図）は，立方体の面は正方形では対角線だから∠HAB＝45°である．(ウ)の立体角と捉えていた場合（図 7 下図）は，もちろん容易には求められないため，何かしらの工夫がなされるであろう．例えば，存在する面を用いて，∠HAE と∠EAB の和が∠HAB と考え，∠HAB＝∠HAE+∠EAB＝135°などの解

答が想定される．

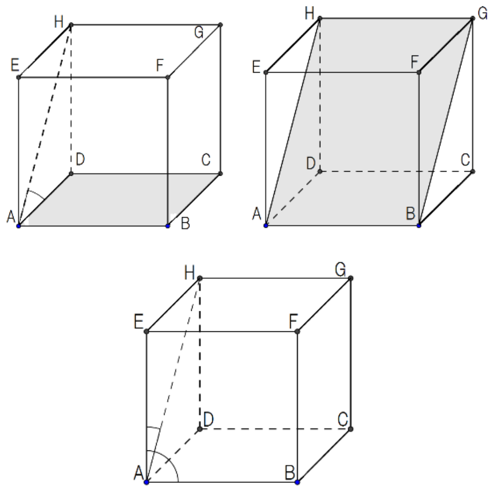


図 8：直面角(上左図)，二面角(上右図)，立体角(下図)

一方，この問題に対して，論理的により正確に 90°の解答を与えることもさほど容易ではない．これは直面角などの定義が複雑であることに起因する．実際，この問題では，ABCD-EFGH は立方体であることなどから ADHE⊥AB を示し，さらにある平面に対して直線が垂直であるならば平面に含まれるすべての直線に対してその直線が垂直であることから，HA⊥AB が導かれる．

以上のように，三次元空間における角そのものの性格という視点から考察することができる．その場合，角という概念が複雑だからこそ，種々の角の捉え方が可能であり，そして捉え方に応じてさらに様々な解答が可能であることがわかる．これは，角という概念の複雑さゆえの困難性といえるのではないだろうか．

6. おわりに

本稿では，空間図形の図形そのものに焦点を当てて，空間図形の困難性を考察した．それにより，空間図形における角の複雑さという，これまでとは違った困難性の要因を考察することができた．今後の課題は，調査を通して，空間図形を図形そのものの視点から考察することの妥当性を検証していくことである．

【引用・参考文献】

Duval, R. (1995). “Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings”. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, pp. 142-157. Springer.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), pp79-92.

市松信　他 (2012). 学校図書 中学校数学 1

影山和也. (2005). 「数学教育における空間的思考の水準に関する研究」．日本数学教育学会誌．臨時増刊，数学教育学論究，第 83 巻, pp25-34.

熊倉啓之，中西知真紀，八田弘恵，国宗進．(2002).「空間図形についての理解に関する研究」. 数学教育論文発表会論文集．第 35 巻．pp.289-294.

国立教育政策研究所 (2012).「平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」 https://www.nier.go.jp/12chousa/12kaisetsu_chuu_suugaku.pdf/02/19 確認.

狭間節子，重松敬一，橋本是浩，瀬沼花子風間喜美江. (1989). 「立体の二次元表示に関する調査研究」．数学教育論文発表会論文集，第 22 巻, pp151-156.

ラカトシュ(1976). 数学的発見の論理―証明と論駁―（佐々木力訳）．共立出版．

ユークリッド(1996). ユークリッド原論縮刷版．（中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵訳・解説）．共立出版