上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.53-62.

主体的な筆算の手続きの獲得を目指した小数のかけ算の授業の研究
―RME 理論を手がかりとして―

徳留　信登
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

小学校高学年で学習する「単位量当たりの大きさ」「小数,分数の乗除」「割合」「速さ」「比」等は，乗法構造に関わる学習であり，一般的に理解が困難とされている.この課題に対し，系統性を重視したり，数直線を用いたりする研究(佐藤，2008; 馬場, 2005)など，多くの研究がなされているが，なかなか解消には至らない．これは教師が有効と考える授業や表象が，児童にとって必ずしもそうではないことを示していると考えられる.

この課題に対し，高橋(2000)は，RME 理論を手がかりに,児童の主体性を重視した「小数のかけ算」の研究を行っている.高学年の導入期に学ぶ「小数のかけ算」において，児童が主体的に学ぶ中で数直線やそこに内在する比例関係の理解を促すことができれば，その後の学習でそれらが有効に働くと考えたものである．しかし，高橋の研究では児童が筆算の手続きを獲得する過程については明らかにされていない．この過程においても児童の主体性が生かされれば，さらにそれを高めることが期待できると考えられる.

そこで本研究は，「小数のかけ算」においてRME 理論を手がかりに，乗法構造の理解を促す授業を構想し，児童が主体的に筆算の手続きを獲得する過程を明らかにするとともに，実験授業の学習過程から，提案した授業を考察し，改善に向けた示唆を得ることを目的とする.

２．乗法構造と比例的推論の関わり

2.1 乗法構造とは

G. Vergnaud(1988)は，乗法構造の概念領域を,「一般的に解決に乗法・除法を要する全ての場面」(p. 141)と定義し，「経済的，物理的，科学的，機械的領域の理解と欠かせない関係がある」と,その重要性と広汎性を述べている.

Vergnaud は，児童が解決への手続きの過程や演算を選択した際に用いた数学的な関係である TIA(行為における定理)を見出すため，いくつかの問題を提示し，児童の記述から TIA を分析している．その一例に次の課題での TIA を示している.

例)コニーは4台のおもちゃの車が欲しいです．それらは1つ5ドルです．代金はいくらでしょう？

乗法を用いた解法は次の２通りである.

解法 a：4×5＝20　　20 ドル

解法 b：5×4＝20　　20 ドル

Vergnaud はこの２つの解法から，それぞれの TIA を,図を示して次のように表している.

解法 a の場合，4 台の車の費用は 1 台の費用の 4 倍．つまり， 4×1 台分の値段と表せる．これは数学的な記号を用いて，n が整数の場合, f(n・1)＝n・f(1)としてより一般的に表現でき，さらに一般的に表すのであれば，実数がλの場合，f(λ・1)＝λ・f(1)と表せる(図 1).

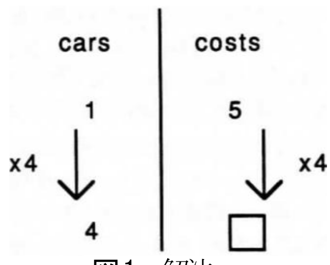

図1　解法a
Vergnaud1988)より引用

それに対し，解法 b の場合，「1 台当たりの値段×車の台数」として述べられる．つまり，f(x)＝ax と記号的に表現されることになる(図 2)．

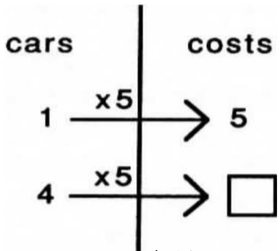

図2　解法b
Vergnaud(1988)より引

この 2 つの解法の違いを見た場合，解法 a は，同じ測度空間の比をもとにしていることから，「変化の関係」を用いた解決方法であり，解法 b は，異なる測度空間の比を用いていることから，「対応の関係」を用いた解決方法といえる．

ここから小学校の学習内容に含まれる乗法構造には，対となる 2 組の数の間に「変化」と「対応」の数量関係が成り立つという要素を含んでいると考えられる．

2.2 比例的推論と乗法構造のかかわり

日野(2002)は，比例的推論について「一方が m 倍になれば他方も m 倍になるといったように，伴って変わる 2 量の間の比例関係を前提として未知の量を求めたり量を比較したりすること及びそれに準じる考え方」(p. 20)と定義している．このように比例的推論を捉えると，上述した乗法構造での「変化の関係」をもとにした考え方であると理解される．

日野(1997)は，「比」と「比例」での児童の思考過程を分析し，「内比に依存した比例的推論は，a : b のみならず，比例の表や式においても理解や意味付けを進めていく上で重要な足場を提供していった」(p.　77)と述べている．

これは変化の関係を豊かに捉えられることが，その後学習する対応の関係を理解する上で，重要な役割を果たすことを示唆していると考えられる．同様の見解は土屋(2002)でも見られる．

以上から，長期にわたる乗法構造の学習において，その導入期に「変化の関係」にもとづいた児童の比例的推論を発達させておくことは，その後の学習で児童が主体的に学ぶための足掛かりになり得ると考えられる．

３．RME 理論について

RME 理論はオランダの H. Freudenthal が創設したフロイデンタール研究所の理論であり，その基本概念には Freudenthal の「人間の活動としての数学」が置かれている．同研究所に所属する K. Gravemeijer は，抽象的な数学的知識をいかに児童に教えるかという問題に対し，モデルの発展を通して行うという立場に立つ．それは現実場面に即した文脈上の問題に対し，児童がもつインフォーマルな知識や方略をもとに作り上げたモデルを発展させていくことで，抽象的な数学的知識を獲得していくことを意味している．

Gravemeijer(1997)は RME 理論の原理として，「導かれた再発見・漸進的な数学化」「教授学的現象学」「自分で発展させたモデル」の 3 つについて述べている．

3.1 導かれた再発見・漸進的な数学化

導かれた再発見とは，数学者が発見した過程と類似した過程(数学史の順と同じではなく，歴史上の発見過程での行き詰まりや遠回りを取り除いたもの)を児童が経験する機会をもち，学習過程のレベルが内在された一連の数学化を行う活動である．

再発見の過程は，児童が生み出す多種多様な解決手続きを認める文脈上の問題が基盤となる．それに対し児童が記述したり，図式化したりする活動から，種々の問題状況を解決していく中で，中心的な関係を見つけることが漸進的な数学化を意味すると考えられる．

3.2 教授学的現象学

教授学的現象学とは，状況に特有のアプローチが一般化されるような問題の状況を，教師が見つけることである．つまり，垂直的数学化の基盤として用いられる典型的な解決手

順を，引き起こすことが期待される状況を教師が見つけることであると考えられる．

以上 3.1，3.2 から，児童がモデルの作成や漸進的な数学化を行うためには，教師が児童にとって現実的な場面を課題として取り上げ，それらを系列的に組むことで，そこに内在する中心的な関係を見出せるように学習環境を整えていく必要があると考えられる．

3.3 自分で発展させたモデル

自分で発展させたモデルとは，児童のインフォーマルな知識と形式的な数学的知識との差を橋渡しする役割として，モデルの働きを児童が主体的に発展させていくことである．

Gravemeijer は児童の学習レベルとモデルの段階を対応させた 4 つを示し，以下の通り解説している．

○状況的レベル(situation)
領域固有で状況的な知識とストラテジーが状況(主に学校外)の文脈の中で用いられる．
○参照レベル(model-of)
モデルと方略は，(主に学校で調整された)問題上に表わされた状況を参照し，生み出される．
○一般的レベル(model-for)
方略に関する数学的な焦点が，文脈への参照よりも優勢になる．
○形式的レベル(formal knowledge)
型通りの手順と表記法を用いて活動する．

2 つのモデルは，それぞれ参照的レベルと一般的レベルに相当するが，この model-of から model-for への転換について，さらに以下のように述べている．

> まずモデルは児童によく知られた状況でモデル化される．そして，一般化と形式化の過程を通して，実在するモデル自身が，数学的な推論を行うモデルとして用いることが可能になってくるのである．(p. 329)

つまり，状況を表したモデルが，一般化と形式化の過程を経て，数学的な推論を行う対象として扱われた時に，モデルの転換が図られたと捉えることができる．

4．実験授業の構想

実験授業では，5 年「小数のかけ算」において，児童が比例的推論を発達させ，それを基に主体的に筆算の手続きを獲得していく過程を捉えることを目的とする．

そのために，まず本実験授業でのモデルとインフォーマルな知識，4 つの水準を次のように設定した．

○モデル・・・・・乗法構造を表す数直線
○インフォーマルな知識
・・・・・ 比例的推論(2 倍程度)
・situation
同じ値段のものを複数個買う際に，児童が支払う代金を考える場面 ：(単価)×(いくつ分)
・model-of
文脈上の問題に示された数値から，比例関係を表す矢印や感覚的な倍を書き入れて目的の数値を表しているモデル
・model-for
文脈上の問題に示された数値から，比例関係を用いて新たな数対を作り出し(推論し)，そこから目的となる数値を表すためのモデル
・formal knowledge
小数のかけ算の筆算での手続き的知識

この水準を経るように，計 10 問の具体的な課題を設定していく．

但し，本来の RME 理論であれば，モデルは児童が生成する必要がある．しかし，本実験授業では対象校の児童の現状を踏まえ以下 2 点を考慮することとした．

○モデルとなる数直線を 1 から作ることは時間的な制限から難しい．
○児童がその後の乗法構造を含む単元を学ぶ際，教科書には一般的に数直線が示されている．よって，学年，担任が変わったとしても児童が数直線を見れば，それを足掛か

りとして主体的に学べることが期待できる．

よって，本研究では児童の多様な考えを表す際，教師が継続的に数直線を用いる(model-of)．また，数直線には「変化の関係」である倍を児童が視覚的に捉えられるようにするため，馬場(2005)が用いたように，数と数の間に「矢印」と「倍」を書き入れて表す(図3)．

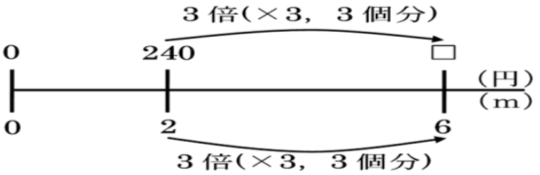

図 3 馬場(2005)をもとに筆者が作成

そして，多様な考えを表したモデルからそれぞれの考え方の違いを比較検討していく活動を取り入れる．よって，児童に数直線の使用を強要したり，ストラテジー指導をしたりはせず，使用するモデルは児童の主体性に任せることとする．

５．データの収集方法

本研究のデータは，平成 26 年 5 月 12 日～29 日まで筆者が授業者として行った「小数のかけ算」の単元で，児童が(整数)×(小数)の筆算の手続きを獲得するまでの 8 時間をカメラ及び，IC レコーダーで記録したものである．

児童の詳細な変容を示すため 3 名の抽出児(石，中，布：いずれも仮名)を選出した．

石は，算数科の学習を好み自分の意見を意欲的に発言する児童ということであった．

中は，真面目な性格でコツコツと積み重ねながら理解を進める．新しい考えを生み出すことは少ないが，既習を生かして学習に取り組む児童ということであった．

布は，算数科の学習にやや苦手意識を抱いており積極性に欠ける面がある．しかし，教師や友達の話を聞き，地道に学習を積み重ねる児童ということであった．

授業全体を記録するため，教室の前後にビデオカメラを 1 台ずつ設置した．また，抽出児の学習過程を記録するために，動きや表情を捉えるようビデオカメラを座席の前に 1 台ずつ設置した．また，発話を明確に記録するため，IC レコーダーも同様に設置した．さらに，課題ごとに A3 のワークシートを配布し，マジックで考えを書き込むようにした．

これらのデータから，授業の詳細な発話記録を作成した．また，本研究で重要な役割を果たすモデルは書き順を明確に示すため，表わされた順に番号を振っていくこととした．

本稿では紙幅の関係上，児童・中の学習過程についてのみ分析・考察を行う．

６．実際の授業と考察

6.1 転換を図るまでの課題：１～4 時間目

model-of から model-for への転換を図る課題の前に計 7 問の課題を設定した．

6.1.1 「単位量当たりの大きさ」と「整数の乗除」を統合する授業：1 時間目

1 時間目では，直前の単元である「単位量当たりの大きさ」で用いられた数直線が，「整数の乗除」でも使用できることを，児童が理解するために設定した．課題は次の通りである．

課題① りんごを 1 人に 6 こ配ります．4 人に配る時，りんごは全部で何こいるでしょうか．
課題② みかんが 15 こあります．このみかんを 3 人で等しく分けると 1 人何こもらえるでしょうか．

この 2 つの課題に対し，中はまず式と答えを書くと，その後は次のように自身の考えを表していった(図 4,5)．

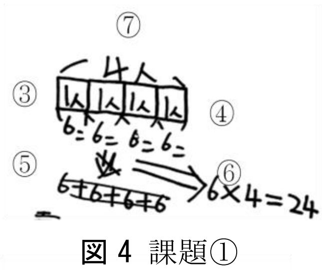

図 4 課題①

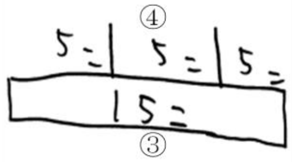

図 5 課題②

図から，それぞれ大きな長方形が全体の量を表し，それらを区切ることで，1 人分を表していることが理解される．つまり，「基準量×いくつ分」で捉えていると考えられる．また，長方形の中央部分に数が書き込まれていることから，

白石(2006)が述べる「幅としての見方」がなされていると考えられる．

ここで中が表した図は，立式，解答後に表わされたものであり，推論の対象とはなっていない. よって model-of の水準と考えられる．

1 時間目の終末に教師は，「整数の乗除」を表す一つの方法という文脈で数直線を示した．中は教師がモデルを表す際に，「(教師の「人数が×4 になる」)で，上も×4」と教師の書き込みに合わせてつぶやく等，数直線と比例関係に一定の理解を示す様子が見られた．

6.1.2 比例関係の意識化を図る授業：2〜4 時間目

課題③〜⑦では，長さと代金の文脈での問題とした．また，中村(1996)の「1 当たり量を示さない」ことを受け，基準量を 3m-270 円とした．これにより，児童が 1 当たり量や倍を意識できると考えた．そして，目的の数値を段階的に複雑にしていくことで，比例関係の意識的な使用を目指した．

課題③ 3mで270 円のリボンがあります．このリボンを6m買うと代金はいくらになるでしょうか．

まず中は，「270×2 ＝ 540」と書き，倍比例の考えで立式，解答した．そして，図 6 を表した. しかし，隣の児童との話し合いの場面で改めて自身のシートを見ると，戸惑い始め，最終的に「270÷3…．七八，八三 24 か．90．90 円．90×6 …540 円．」と帰一法の考え方を発話した．

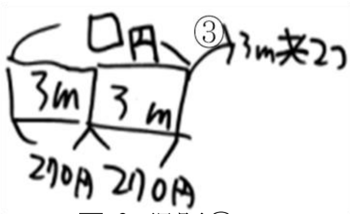

図 6 課題①

この要因には，3m と 6m の関係から感覚的に 2 倍を感じ取り立式，解答したものの，改めて問題文を見ると「2」が表れていないことから，倍比例の方略に確証を持てないでいることや，直前に学習した「単位量当たりの大きさ」の影響を受けていること等が考えられる．

課題③の図では，1 時間目同様に「幅としての見方」がなされており，「基準量×いくつ分」で捉えていると考えられる．併せて，図は立式後に表わされていることから，model-of の水準と考えられる．

全体では，倍比例と帰一法の 2 つの考え方が発表された．それぞれを教師がモデルで整理し，表れたモデルの矢印の向きから，「一発」「寄り道」と特徴を表す名前が付けられた．

課題④ 同じリボンを 24m買うと代金はいくらになるでしょうか．

課題④では，「270÷3=90 90×24=2160」と帰一法で立式，解答し，図 7 を表した．

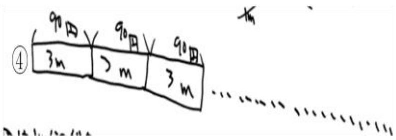

図 7 課題④−1

この図では 3m と 1m の単位の取り違えは見られるが，課題③と同じく「幅としての見方」が表れている．これまでと同様に「基準量×いくつ分」で捉えていることが理解される．しかし，目的の数値が 24m となったことで，3m 分を長方形 3 つ，残りの 21m 分を「…」で表す等，簡素化している．

この図を表した後，中は図 8 のように倍比例の考え方も図で表していった．

ここでは，図 7 同様に「幅としての見方」によって，3m-270 円が表現されている．しかし，比例関係を表す「矢印」「倍」の書き込みもなされている．これらが表された順は，既知数間の長さが 8 倍であることが先行し，その後，既知数−未知数間の代金が 8 倍になるという順で表されている．

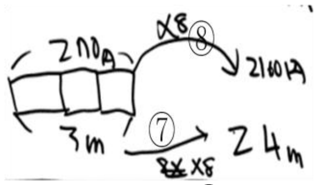

図 8 課題④−2

また，この考えについて隣の児童と話し合う場面では，「3m が 24m になるまでに，×8 されているから，3m 分の代金も×8 すると 2160 円になると思います」と発話している．ここから中は，「基準量×いくつ分」ではなく

比例関係の考え方を用いたと理解される．

ただし，どちらも推論のために用いられていない．よって model-of の水準と考えられる．

課題⑤ 同じリボンを 30m買うと代金はいくらになるでしょうか．

課題⑤から中は，教師が用意した数直線シート（以下 複図シート）を用いるようになる．

個人思考開始後，間もなくすると複図シートを手にし，図 9 の順で数直線を表した．

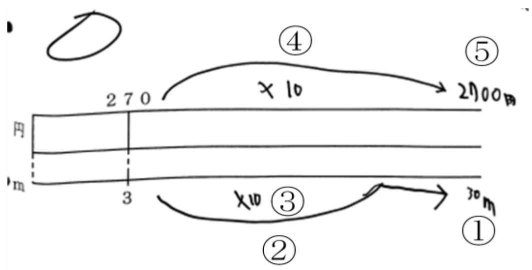

図 9 課題⑤-1

その後，中は複図を見ると「えっ？式？」と発話し，戸惑う様子を見せた．そして「270÷3＝90 90×30＝2700」と帰一法の考え方で立式，解答した．その後，納得いかない表情で複図シートを見続けた．そして，しばらく考えた後，「そうか」と発話すると，再度シートを取りに行き，図 10 を表した．表し終えると，納得した表情へと変容した．

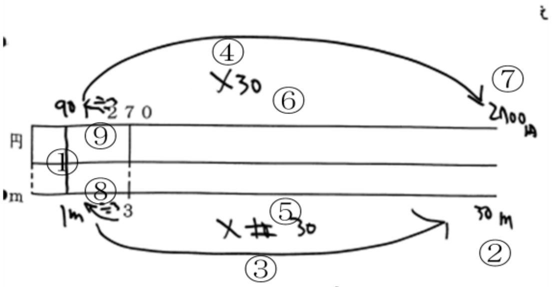

図 10 課題⑤-2

この 2 つの図から，ここまでの課題の系列や教師が表したモデルにより，「幅としての見方」から，「位置としての見方」へと変容していることが理解される．モデルへの理解が深まっていることが見て取れる．

反面，当初表した倍比例のモデルに対し，その後は帰一法の式を表している．ここから，中が問題文中に現れない数「10」を用いる倍比例と比べ，問題文中に現れる数「30」を用いて解決する帰一法に依存していると考えられる．但し，中は，これまで帰一法のモデルには，「基準量×いくつ分」を表す図を用いていた．しかし，本課題では数直線をもとに比例関係を用いて帰一法を表している．同じ帰一法でも比例関係を用いて帰一法が表せることを理解したのだと考えられる．

中は，その後の課題⑥10m の代金，課題⑦5m の代金を求める際も，帰一法で代金を求めた．そして，どちらの課題でもモデルに表わすことはなかった．

6.2 転換を図る授業：5 時間目

転換を図る課題として，倍比例，帰一法のどちらの考え方も使用できない数値を設定した．これにより，比例関係を用いて新たな数対を推論し，目的の数値を求める必要性を高めることができると考えた．

課題⑧ 6mで 20 kgの鉄の棒があります．この鉄の棒 15mの重さは何kgでしょうか．

この課題に対し，当初中は，モデルを使用せず 11 回の計算で解決を試みた．しかし，答えを求めることができなかった．

11 回の計算の内，前半の 8 回は除数，被除数を変えて除法を行っており，後半の 3 回は除数，被除数を変えて除法を行い，その商を「×15」している．この「×15」は，文中にある「15ｍの重さ」の「15」だと考えられる．ここから，中は前半の 8 回の計算で様々な数を当てはめ，1m 当たりの重さを求める計算を試み，後半の 3 回は 1m当たりの重さと思われる商を 15 倍し，15 kgの重さを求めたのだと考えられる．つまり，依存している帰一法での解決を試みたのだと考えられる．

その後，中は斜め後ろの児童が，モデルを用いて解決する姿を目にすると，「すげぇ．あれ使ってみよう」とつぶやき，自身も複図シートで図 11 を作成した．その後，複図シートを

見つめると，本シートに「20÷2＝10 10×5＝50 50 kg」と式と答えを書き込んだ．

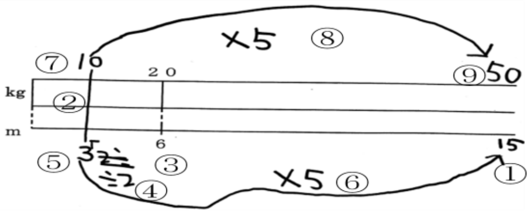

図 11 課題⑧

ここから，中は，周囲の児童の活動が契機となり，自身もモデルを使用することを選択したと考えられる．そしてその後は，モデルをもとに比例関係を使って，新たな数対を作り，立式，解答している．これまで，1 当たり量を求めることに依存していた中であったが，モデルを使用したことにより，比例関係を用いて下位単位を構成する考えへと変容したのだと考えられる．

ここでの中のモデルは状況を表すモデルから推論の対象へと変容していると理解される．つまり, model-of から model-for への転換が図られたのだと考えられる．

6.3 筆算の手続きを獲得する授業：6〜8 時間目

課題⑨では，1 当たり量を示し，目的の数値を小数値とした．

課題⑨ 1mで80円のリボンがあります．このリボン4.5mの代金はいくらでしょうか．

中はまず，4m の代金と 0.5m の代金を求めるビルドアップで解答(360 円)を求めた．その際「たし算使っちゃった」と発話すると，その後，「やってみよう」とつぶやき，80×4.5 の筆算を試みた．そして，筆算に表れた「3600」を見ると「あれ？」とつぶやき，少し考えた後,「3600」の一の位と十の位の間に小数点を打って「360」とした．

その後，中は複図シートを手にした．シートを少し見つめた後,「そうか」とつぶやくと，図 12 を 50 秒ほどで完成させた．

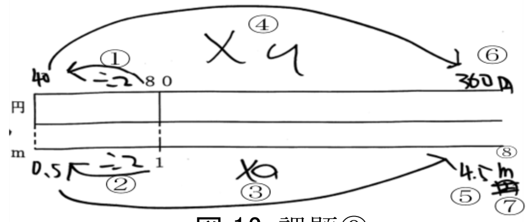

図 12 課題⑨

そして，図を見ながら，「80÷2＝40 40×9＝360 360 円」と立式，解答した．

課題⑨において中は，当初小数値になったことから戸惑い，ビルドアップの方略を用いている．さらに，「80×4.5」として筆算を試みているが，小数点を打つ際，戸惑いが見られることから，最初に行ったビルドアップでの答えに合わせて，小数点を打ったと考えられる．つまり，小数点を打つ位置や理由については理解できていないと考えられる．

また，2 つの方略で答えを求めているにも関わらず，3 つ目の方略も試みている．ここから比例関係を用いて解答を得たいという意図が伺える．そして，中は課題⑧で獲得した比例関係を用いて下位単位を構成する考えを用いて解決に至っている．下位単位が小数値でも戸惑わない姿から，転換を経たことで比例関係への信頼が高まり，柔軟に数対を推論できるようになっていると考えられる．つまり，比例的推論の発達が見られる．

全体の話し合いでは，中のように「0.5m の下位単位を構成する考え」の他,「4.5m を 2 倍し，9m 分の代金を求めた後，÷2 する」考えや「4.5m を 10 倍し，45m 分の代金を求めた後，÷10 する」考え等，「大きな数対を求めて，戻す」考えが発表された．

「4.5m を 2 倍し，9m 分の代金を求めた後，÷2 する」考えが発表された際，式を見て戸惑う隣の児童に対し，中は,「80 円は 1m 分で，そして，×9 して，×9 は，え〜と．×9 して 720 になって，最初×2 したから，また最後に戻さなきゃいけないから÷2 した．(下線筆者)」と説明した．

この発話にある「戻す」という言葉に着目する．おそらくこの「戻す」という発話は，この

式をモデルで表した場合(図 13)，「最初×2 したから」が①を，「戻さなきゃいけいから÷2」が②を指すものだと考えられる．

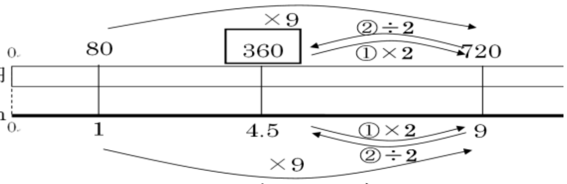

図 13 中の思考のモデル

ここから中は，教師がモデルに表わしていない状態でも，比例関係を基に他者の式を整理し，理解していると考えられる．そのため「戻す」といったモデルの矢印の向きを表すような発話がなされたのだと捉えられる．このような発話からも，中が model-for の水準に達していることが理解される．

課題⑩ 同じリボンを 2.4m買うと代金はいくらでしょうか.

この課題は，対象校の市で使用されている教科書と同じ数値である．

中は，モデルに表わすことはせず，「2.4×5=120 80×120=9600 9600÷5=192 192 円」と式のみで答えを求めた．

「2.4×5=120」と，途中計算で位の間違いが見られるが，この式から中が比例関係を用いて，「2.4 を 5 倍し，12(整数値)に直し，その後÷5 して戻す」という思考を働かせたのだと考えられる．一般的な授業で，2.4 を 5 倍して整数値に直すといった柔軟な思考はあまり見ることができない．このような柔軟な思考がなされたのも，これまでの課題の系列により，中が比例的推論を発達させ，比例関係を柔軟に使用できているためだと考えられる．

学級全体では，中のように「5 倍し，÷5 する」考えの他，「10 倍し，÷10 する」，「0.1m 分の代金のいくつ分」，「ビルドアップ」の考えが発表された．そして，それぞれの考えをもとに小数の筆算の手続きを獲得する場面へと移行した．

中は，当初「1920」までを通常の筆算の手続きで求めると，その後，「2.4」の小数点にマジックの先を持っていた．そして，そこからマジックをまっすぐおろす仕草を見せ，「192.0」と小数点を打った(図 14)．しかしその後，中は表情を曇らせたまま，黒板とシートを交互に見つめ続けた．直後，中は隣の児童と個別指導に当たる担任とのやり取りを耳にした．

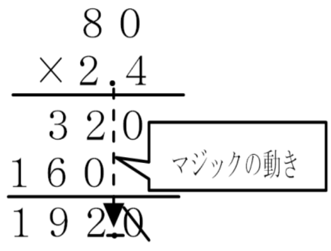

図 14 中の筆算①

担任：うん？何々どの考えでやったの？
梅 ：(8 秒静止後，首をひねりながら)え～．②の考え(10 倍して，÷10 する考え)．

このやり取り後，中は，「②の考え…．」と発話し，その後，「2.4」の小数点の上にマジックの先を持って行った．そして，3 回「＼」を空書きした後，「2.4」の小数点を「＼」で消した．その後，中は表情が明るくなり，周りの児童にも筆算化ができたことを話し始めた．さらに，筆算化できずに困っている隣の児童に対し，中は次のように説明した．

中：うんと，まず小数点を消して，そして，計算して，それで最後に(もっているマジックを体の前で右から左に動かす)点をここに付ける(192 と 0 の間を指す).(下線筆者)」

以上から，中は当初「まっすぐおろす」ことで小数点を打っていた．つまり，この段階では比例関係を用いた考えと小数点の打ち方がつながっていない状態だと考えられる．しかし，その後は納得しない様子を見せている．これは，これまでの学習と自身の筆算の手続きが「つながらないこと」に違和感を得たためだと考えられる．

そして，中は外的な要因(梅と担任のやり取り)を受け，「10 倍し，÷10 する考え」に着目する．その後，2.4 の小数点に「＼」を入れることや，その後納得した表情を見せること，併

せて，隣の児童に対し筆算の手続きを説明する中で，もっているマジックを体の前で右から左に動かすこと等から，図 15 のように「10 倍し，÷10 する」という考えがもととなる小数のかけ算の筆算の手続き的知識を獲得したのだと推察される．

```
    ８０
  ×２.４   ×10(10倍)
  ３２０
１６０
１９２.０   ÷10(戻す)
```

図 15 中の筆算②

以上から中は，主体的な筆算の手続きの獲得，言い換えれば formal knowledge の段階に到達したと考えられる．

７．まとめ

7.1 モデルの発展

以上から，中は課題の系列を通して，主体的に小数のかけ算の筆算の手続きを獲得できたと考えられる．

中の学習過程をモデルの発展から見た場合，転換を図る前までは，モデルを立式，解答後に表していた．また，初期のモデルは，リボン（長方形）をつなげるような状況を反映したものであった．その後，漸進的に比例関係の理解が進むと，「数」「矢印」「倍」といった乗法構造を表すもののみを用いるように簡便化されていった．

転換を図る課題⑧以降は，モデルを推論の対象として用い，そこから新たな数対を生み出し課題解決に当たる姿が確認された．つまり，model-for へと転換したと捉えられる．

さらに，転換後は他の児童の考えを読みとる際，教師がモデルに表わす前に「戻さなきゃいけないから÷2」と発話する等，視覚化されていない状態でも，モデルを対象として式を整理し，理解する姿が確認された．これも model-for への転換が図られたからこその姿と考えられる．

筆算化の手続きを獲得する場面では，「10 倍し，÷10 する」という考えに着目すると，それと小数のかけ算の筆算の手続きとを結び付けて理解する様子が見られた．つまり，formal knowledge へと到達したと考えられる．

以上から中は，具体的な場面から課題の系列を通して，モデルを発展させたことで，抽象的な数学的知識である小数のかけ算の筆算の手続き的知識を獲得できたのだと考えられる．

7.2 比例関係の気づきと比例的推論の発達

7.1 で述べたように，中が主体的に筆算の手続きを獲得できた背景には，比例関係の気づきと比例的推論の発達があると考えられる．

中は課題①～④で乗法を「基準量×いくつ分」で捉えていたと考えられる．しかし，その後，課題の系列や教師が表すモデルを参照したことから，漸進的に比例関係の理解を深めたと考えられる．変容は課題④でのモデルから表れ始める．中は，課題④で，帰一法のモデルとして，24m のリボンを長方形と点で表した．ここでは「基準量×いくつ分」の捉え方をしていた．それに対し，倍比例のモデルでは，長方形に「矢印」と「倍」が書き込まれ，比例関係による考えが表れ始める．課題⑤では，複図シートで倍比例の考えを「矢印」「倍」を使って表した．しかし，戸惑う様子を見せると帰一法で立式，解答し，その後再度シートを手に取ると，改めて複図シートを使い，比例関係をもとに帰一法を比例関係で表し，納得する表情を見せた．そしてその後は帰一法も比例関係を用いたモデルへと変容している．

ここから，中は当初，「基準量×いくつ分」で捉えており，その後，課題の系列から，帰一法は「基準量×いくつ分」，倍比例は「比例関係」と分けて捉えていったのではないかと考えられる．しかし，課題⑤で自身の表したモデルと式との齟齬を契機として，帰一法も比例関係を使って表せることを理解し，統合していったのだと考えられる．

但し，その後は比例関係でも表せる帰一法に依存し，比例関係を柔軟に用いて様々な解決を試みようとする姿は見られなかった．

転機が訪れたのは，転換を図る課題⑧である．当初，中は依存していた帰一法に，様々

な数を当てはめ，「1 当たり量」を求めようと試みたが，成功しなかった．その後，後ろの児童の活動が契機となり，自身も複図シートをもとに比例関係を用いると，「3-10」の下位単位を推論し，目的の数値を求めている．この経験後は，1 当たり量にこだわることなく，小数値の下位単位を構成したり，大きな数対を求めて戻したりと比例関係を柔軟に用いている．つまり，比例的推論の発達が見られた．

ここから，中は，転換を図る課題を第 2 の契機とし，比例関係を用いることで様々な数対を推論できることを理解したと考えられる．

つまり，中は課題の系列や教師が表すモデルを通して，漸進的に比例関係を理解し，主体的に比例関係の使用を選択していったと考えられる．中の思考過程に見られた変容は，本研究において RME 理論を手がかりとし，多様な考えを認める文脈上の課題を系列的に組んだことや，モデルの使用を児童の主体性に任せたことが要因となり生じたと考えられる．

８．おわりに

本研究では，RME 理論を手がかりとした実験授業により，児童が主体的に小数のかけ算の筆算の手続き的な知識を獲得していく過程を調査したものである．中は，課題の系列を通して，モデルとそこに内在する比例関係を柔軟に用いて自らの手で筆算の手続きを獲得することができた．しかし，課題⑥，⑦では，帰一法に依存し，比例関係を柔軟に用いる様々な解決方法を模索するような姿は確認されなかった．

ここから，課題自体を転換させる必要があったと考えられる．つまり，代金を求めることから，代金を求める手続きに着目させ，多様な求め方を考えていくことを課題とする教師の働きかけが必要であったと考えられる．

この過程を踏むことで，児童の比例関係の使用のさらなる促進が期待されると考えられるが，その検討は今後の課題としたい．

引用・参考文献

馬場雅史．(2005)．小数の乗法における意味理解の構成に関する研究．日本数学教育学会誌, *87*(4), 3-11.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant(Eds,),*Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). East Sussex, UK: Psychology Press.

日野圭子．(1997)．一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析：比例的推論との関わりにおいて(Ⅱ)．日本数学教育学会誌, *79*(4), 70-78.

日野圭子．(2002)．授業におけるこの認知的変容と数学的表記の役割:「単位量当たりの大きさ」の授業事例研究を通して．日本数学教育学論究, 79, 3-22.

中村享史．(1996)．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌，*78*(10), 7-13.

佐藤　満．(2008)．比例的推論の発達を促す統合的な授業の効果に関する研究：6 年「倍と割合」「比」の実践を通して．上越数学教育研究 *23*, 53-64.

白石信子．(2006)．小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究：数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して．上越数学教育研究 *21*, 69-80.

高橋久誠．(2000)．小数の乗法の授業構成に関する考察：比例の考えをもとにして．上越数学教育研究, *15*, 75-74.

土屋利美．(2002)．比例の見方を用いた「割合」の指導実践．日本数学教育学会誌，*84*(8), 30-37.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.141-161). Hillsdale, NJ: LEA.