上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.73-87.

《翻訳》明日の社会における数学指導 －来たるべきカウンターパラダイムの弁護－

イブ・シュバラール (Yves Chevallard)
エクス=マルセイユ大学 (Université d’Aix-Marseilles)
大滝孝治（北海道教育大学）・宮川健（上越教育大学）訳

本稿は次の論文の全訳である．
Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow’s society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173–187). Springer.

要約

中等段階の数学指導の歴史的分析は，時代に応じて異なった学校教育パラダイムの変遷を明らかにする．本稿は，まだ産まれて間もない新たな教授パラダイムである「世界探究 (questioning the world)」というパラダイムについて述べ，その分析を試みる．このパラダイムは，次の四つの相互に関連する概念によっている．それは，「探究 (inquiry)」という概念と，「ヘルバルト的 (Herbartian)」，「前進認知的 (procognitive)」，「開かれた人 (exoteric)」という概念である．今日の数学教育の危機がこれらの方向性にそって，願わくは，いかに解決されうるのかを簡潔に示すことが，筆者の目標である．これらの方向性は，「作品訪問 (visiting works)」という，依然として支配的である旧来のパラダイムを一時的に取り繕おうとすることだけを求める方略の繰り返しを断ち切るのである．

キーワード：教授人間学理論，探究，数学，世界探究パラダイム，調査と研究の経路

教授人間学理論

40 年以上前，正確にいえば 1972 年の二月に，マルセイユ（フランス）の数学教育研究所(IREM; Institute for Research on Mathematics teaching)に加わって，私は正式に数学教育に取り組み始めた．私は，この大変光栄に思う名誉あるハンス・フロイデンタール賞の 2009 年受賞者として本稿を執筆する．私が到達した主な結論を概観することで，そして関心のある読者にそれらの見解の適切さを判断して貰うことで，このメダルに報いたいと思う．

まずもって，この発表は私の名前と結びついている理論的枠組みである ATD，つまり教授人間学理論(*anthropological theory of the didactic*)を基盤にしている，といっておく必要があろう．経済的事実や政治的事実があるのと同様に，教授的事実(*didactic* fact)が存在する．以後，私はそのようなものすべてを指して教授(*the didactic*)と表現する．教授は人間社会の重要な一側面である．少しばかり簡潔にいえば，それは誰かが何かを「勉強(study)」（そして「学習(learn)」）[訳註1]できるように，誰かが何かをする（あるいはそうすることを意思表明する）多種多様な社会状況から構成

される，といえる．勉強されるべきもの（そして学習されるべきもの）を，その状況における教授争点(*didactic stake*)と呼ぶ．すでにお気づきであろうが，この教授の定式化では，形として二人の人物に言及されている．第一の人物を示すために文字 y を，そして第二の人物を示すために文字 x を用いる．それにより，y は x が何かを勉強する（学習する）のを助けるために何かをする（あるいはしようとする），ということができるようになる．勿論ときには y と x は同一人物となりうる．そのような自律的な学習という（基礎的な）場合には，x は教授争点を勉強するために自身を助ける．y がしたりしようとしたりする「何か」は，教授行為(*didactic gesture*)と比喩的に呼ばれ，それは教授全体の一部を為す．

基本的に教授学は，そのような「教授状況(didactic situation)」[訳註2]，つまり x，y，教授争点 O から構成される「教授三項(didactic triplet)」によって定まる社会状況を支配する諸条件を研究する科学である．数学教授学は，教授争点 O が数学に直接的に関連するとみなされる場合に携わるものである．より一般的にいえば，O は ATD において「作品(work)」と呼ばれるものである．それは，ある決まった機能を果たすことを目的に，人間の意図的な行為によって作り出された物質的もしくは非物質的な何かである．更なる一般性をもたせるために，人物 x を人物の集合 X で置き換えよう．これにより得られる教授三項(X, y, O)によって，典型的な高等学校の授業をモデル化できる．X は生徒のグループ，y は作品 O を指導することになっている教師である．勿論，我々は(X, Y, O)の形式の教授三項を考えることもできる．そこでは，Y は教授「支援者」のチームであり，一人前の教師や様々な種類の「アシスタント」がここに含まれるだろう．ここで一言つけ加えておきたいのは，ATD において，ある条件が少なくとも短期的に人物(person)や制度(institution)[訳註3]によって修正されえないのであれば，その条件はその人物や制度にとって制約(*constraint*)と呼ばれる，ということである．よって教授学における基本的な問いはおおよそ次のように述べられる．諸制約の集合 K が教授三項(x, y, O)に課されているとすると，O に対する何らかの決められた関係を x が達成するために，x や y はいかなる条件を創造したり修正したりすることができるのか，つまりいかなる教授行為を行なうことができるのか？この問いが以下に続く議論の出発点である．

作品訪問パラダイムとその欠点

私が明示しようとしている（そして明確であることを願っている）我々の社会における教授的な側面に関する見通しは，ある決定的な歴史的事実の内に要約されうる．すなわち，数多くの学校制度において未だに繁栄している古い教授パラダイムは，まだ第一歩を踏み出したばかりの新しいパラダイムに道をゆずる運命にある，というものである．長い話を手短にすますために，教授パラダイムを，勉強されるべきもの（教授争点 O になりうるもの）やそれらを勉強する形態となるものを暗黙裡にではあるが規定する規則の集合と定義する．

私がいままさに述べた「古い」パラダイムというのは，ときには長らく忘れ去れている様々な独特なパラダイムの後に続くものである．これらのパラダイムのうち最も古風なものは，19 世紀の間に多くの国々から姿を消した．数学や他の多くの知識領域において，この最古のパラダイムでは，原理や体系（数学や哲学などの）の勉強が中心的に計画されていた．この原理や体系は，人間の創造の歴史において傑出した成果と考えられるものであり，それらに外からアプローチするのである．このパラダイムの内では，我々の多くがプラトンやヘーゲルの哲学体系を今なお勉強している方法で（あるいは勉強したいと熱望して

いる方法で)，ユークリッドの『原論』を勉強していた．「名作称賛(hailing and studying authorities and masterpieces)」パラダイムと呼んでいるこの最初のパラダイムは，学校パラダイムに次第に取って代わられていった．学校パラダイムは，今日，否が応でも我々全員が大いに楽しむことになっているもので,「偉大な体系」を勉強するという，より古いパラダイムから数世紀をかけて進化してきた．体系を著してきたとされる「偉大な人物」は退けられ，体系そのものは知識の小片へと砕かれた．数学に限れば，ピタゴラス，タレス，ユークリッド，ガウスなど，知識の小片を権威づけるラベルが未だにその起源を示している．

教授人間学理論の枠組みでは，このパラダイムは，「作品訪問」パラダイム，あるいはATD における比喩に従って「記念碑訪問」パラダイムと呼ばれる．なぜなら，三角形の面積に関するヘロンの公式のような知識の小片それぞれがそれだけで自立した記念碑のように扱われるからであり，生徒はたとえその過去や現在における存在理由(*raisons d'être*)についてほとんど何も知らない場合でさえも，それに感嘆しそれを楽しむことが期待されるからである．

数多くの教師や教育者の果てしなき知的巡礼の旅への永きにわたる献身にも関わらず，そして数多くの生徒がガイドとしての教師にしばしば称賛に値するほど従順であったにも関わらず，この一度普及したパラダイムは今日終わりを迎えようとしている．なぜそうなったのか．次のようにいうことができる．つまり，記念碑訪問パラダイムでは，訪ねられる作品がほとんど理解されない傾向にあるからである．「なぜこれがここで起こったのか？」,「その有用性は何か？」といったことは，一般的に答えられることのない問いとして取り残される．関心のある読者は，このことがどれだけ多くの数学的なものにもいえることかを確認してみて欲しい．例えば，優角という概念はどのような目的のためにあるのか？同様の問いは角一般についても生じるし，平行線，交線，半直線，線分などについてもまた然りである．勿論，同じことは分数の約分や多項式の展開にもいえるし，10 進数という概念，そしてその他にもいえる．もし全くやむをえないというわけではないのなら，どのような状況においてそしていかにこの数学的なものが有用であることを示せるのであろうか？これらの問いはたいていの場合もみ消されるため(記念碑訪問には「何のために？」や「だからどうした？」という疑問の生じる余地はない)，教育者が熱意をもって生徒らに数学作品の純粋なスペクタクルを「楽し」ませようとしているときでさえ，生徒らはほとんどただの観客に矮小化される．

いくつもの要因が，記念碑としての作品を訪問するパラダイムの長期にわたる優勢と近頃のその衰退（そして私の示唆する迫りくる終焉）を，少なくとも部分的に説明する．歴史的にみて，第一の原因は，このパラダイムと，かつて非民主主義であった国々の社会構造もしくはもっと最近の弱々しい不完全な民主主義の社会構造との一致にあるようである．そのような社会は，命令の立場にいる者と服従の立場にいる者とを不可分につなげる広く行き渡った様式(pattern)に基づいている．ほぼすべての制度（家族，学校，国家）は，この基礎的な二元論的様式の複製によっている．ここで私はこの古い社会の構造化について議論する気はない．この広く行き渡っている権力構造の仕組みが権限，権力，もしくは階級（好きなように呼べばよい）の乱用という形で容易に生み出してしまう固有の危険性を強調したいだけである．権限をもつ者と服従する者という二元論的構成の存在は，制度を存続させるために必要だったということで,「技術的」には確かにその正当性を証明できるかもしれない．しかしそのような技術的に正当

化される二重構造は，通常は時間的に限られており，そして何よりも範囲が限られている．権限は決められた数の特定の状況に制限されるか，あるいは制限されるべきであり，したがって，生活のあらゆる側面への侵害を控えるべきである（それが圧政に変わらない限り）．しかしすべての人がこの規則を尊重するわけではない．「知識の記念碑」訪問という古典的パラダイムは，今日，権力の二元論的様式との歴史的な関連が無意識的に生み出す教育権力の繰り返される乱用に，たとえ些細なことでも，多くのレベルで苦しんでいる．

この歴史的状況がもたらす帰結は多い．何よりもまず，既にほのめかされている認識論的「記念碑主義(monumentalism)」という形態への学校数学カリキュラムの無抵抗な展開という帰結について述べよう．この記念碑主義では，知識は伝統によって神聖化される塊や小片になり，その想定される「美」は歳月を重ねた風格によって高められる．そして生徒はそれを訪問し，それにお辞儀をし，それを享受し，それを楽しみ，それを「愛し」さえしなければならない．しかしこれらはすべて，多くの生徒に関する限り（ほとんど配慮を必要としない幸運な少数の生徒ではなく），勿論夢想でしかない．

この長期的な状況の主たる結果は，生徒らが「公式」との関係を作り上げる傾向が増大することである．それは，「ゴミ箱」の原理（指導されたすべての知識は，試験が終わるとすぐに当然のことのように忘れさられるか，より正確にいえば無視される）と私が呼ぶものと一致する学校の知識との関係である．勿論これは学校－試験システムと同じくらい古いだろう．しかしそれは，制度的で短期的で不安定な動機によって促進される知識との関係を形作ってきた．こうした関係は，取り組んでいる問題について更なる研究を可能にするために，状況（それが数学的であろうとなかろうと）を理解したり，決断を下したり，決断を延期したりするといった，現実世界の有用性に基づいた知識への機能的アプローチとはかけ離れたものである．

正確には帰結ではないかもしれないが，関連することがさらに困難な事実の中にある．すなわち，学校教育の後も残っている僅かな知識が学校の外で人が直面する状況に耐えうるとはほとんどないであろうということである．このことは数学的知識の場合に特によく当てはまる．したがって，学校で生み出された知識は，その「残骸」がそれに固有の機能を発揮できないという点で，使えない傾向にある．しかし問題はそれだけではない．記念碑の訪問は，ガイドとしての教師によってなされる，訪問される記念碑についての報告や説明を聞くことに基本的に帰着する．これはATD のフランス語において発表(*exposé*)と呼ばれるものである．この文脈では，この言葉が英語で持っている否定的な意味は取り去る必要がある．いかなる説明，報告，あるいは発表においても，その本性より，「詳細」が省かれる．その詳細とは，多かれ少なかれ選択者が恣意的に無視したり完全に削除したりした側面である．フランスのカリキュラムから例を一つだけ挙げれば（おそらく世界中の数学カリキュラムにおいても似たようなものであろうが），昔から三次方程式の代数的解法は取り扱われない一方，二次方程式は徹底的に考察されることになっている．それゆえ，生徒は数学的世界への学校での訪問によってある終着点に達するが，その終着点の先にはたいてい生徒らにとっていつまでも未開の地のままとなる数学の地が広がっている．もしも生徒らが後の人生で，三次方程式とは何で，どのようにそれが解けるのかを知る必要がでてきたら，この生徒はどうするのだろうか？現在のパラダイムの方向性に従った学校教育は，この問いへの明確な答えをもっていないようである．

数学作品の訪問に伴う知識と無知との関係

は，人々の需要や要求にますます相応しくないものになってきている．今日では，数学的な知識は全くそれなしに済ますことができるようなものである，という信念が人々に広く共有されるにまで至っている．一方，一昔前は，数学は膨大な数の個人の問題や集団の問題を解くための鍵としてみなされていた．この点において，記念碑訪問パラダイムにおける主要な欠陥は，このパラダイムが生じた非民主主義的なエートスに関わっており，学校で訪問すべき「記念碑」の選択に関わる．いうまでもなく，この選択は，たいていの場合，長く続く伝統と不規則な間隔でおこる大忙しの改革の複合的な結果である．おそらくその決定は，この選択を担う人々がこれからの世代の啓蒙に相応しいとか，合っているとか，もしくは「よい」とさえ考えるものを，少しも越えるものではない．訪問されるべき記念碑の選択は，少しも実験に基づいておらず，少なくとも豊富かつ適切な経験に基づいてなされてはいないようである．以下において，「世界探究パラダイム」と私が名づける新たな教授パラダイムを選択することにより，「離れ業」が達成されうるという根拠を提示してみたい．

世界探究：新しい教授パラダイムに向けて

ある程度まで，我々は新しい教授パラダイムに賛同して現在の教授世界をまもなく捨て去るだろう．それは，古いパラダイムと対比すればカウンターパラダイム (*counterparadigm*) のようなものである．しかし以下でみるように，それは先人とのすべての関係を絶つ運命にあるわけではない．私が強調する主な変化は，わずかではあるが抜本的である．ここで再び三項(X, Y, O)を考えてみよう．伝統的な教育におけるほとんど目立たないが決定的である原則は，X のメンバーである x は子どもか若者であるということである．伝統的に，教育的な企ては成熟以前の若い人々に関するものである．成熟した時点ですべての者は教育されている，ということになっており，その教育のよしあしはまた別問題である．この教育観とは対照的に，世界探究という教授パラダイムでは，教育は生涯的なプロセスである．教授三項(x, y, O)における x は幼児でもあり，成人でもあり，老人でもある．社会の教授的な企ては，すべての者，つまり将来の市民以上に市民に適用されるものである（そして評価される）．したがって，この決定的な取り組みの評価は，もはや若者だけに焦点を当てるものではない．我々は 15 歳の人間が知ることになることを検討すべきであるだけでなく，30 歳から（少なくとも）70 歳までの人々へと取り組みを広げるべきである．何といっても，社会の教授の成果は，人々が何を知っているかによって単純には知れないということである．成果は，人々が何を<u>学習する</u>ことができるのか，そして<u>どのように</u>それを学習できるのか，に基づいて判断されなければならない．

世界探究パラダイムのもう一つの中心的な原則は，何らかの作品 O について何かを学習するために，x は，しばしば何者か y の助けを借りながら，O を研究しなければならないということである．偶然によって三次方程式の解法を学習することはない．目の前に生じた問いに立ち止まり，考えなければならない．今日のよくある文化では，おそらく多くの人々は，答えが明確でないようなあらゆる問いを避けようとする傾向にある．新しい教授パラダイムが作ろうとするのは，何らかの問い Q が生じた際に，x がそれについて考察し，多くの場合，y から少しの助けを借りながら，価値ある答え A に到達するために，可能な限り頻繁にそれについて<u>研究</u>するような，新しい認知的なエートスである．換言すれば，x は，出会ったことも解いたこともない問題を含む状況に常に尻込みしない，ということが想定されている．詳しくは述べないが，私は，

未回答の問いや未解決の問題に対する理解ある態度を，ドイツの哲学者であり教育学(pedagogy)の創設者であるヨハン・フリードリヒ・ヘルバルト (1776–1841) にちなんで，ヘルバルト的 (*Herbartian*) と呼ぶ．この態度は，通常では科学者の研究領域における態度であるが，すべての活動領域における市民の態度となるべきである．

新しい教授パラダイムは，未来の市民や成熟した市民がヘルバルト的になることを望む．十分生じそうな「オープンな」問いの簡単な，多岐にわたる事例を三つ紹介しよう．事例①：社会科学研究に携わるが学校や大学で統計にほとんど触れたことのない多くの人々が，ピアソンのカイ二乗検定に出会い，自由度という理解しづらい概念に突きあたり，「『自由度』とは一体何なのか？」という問題に悩まされる．事例②：物理を専攻する学生は，「に比例する」の奇妙な記号（∝：《8 を横にしてその一部を取り去ったもの》(Miller, 2011)）の操作が数学的にいかに正当化されうるのか少しもわからずにこの記号を使わなければならないことに動揺するであろう．とりわけ変数 z が変数 x と変数 y に比例するならば，z はそれらの積 xy とも比例する，というようなおもしろい結果に関してである．事例③：生物の多様性の問題に関心のある誰もが次のような数式と出会うであろう．

$$H_e = 1 - \frac{1}{1 + 4N_e\mu} \tag{1}$$

頑固な非数学者にとって，第一の疑問は「それは何を意味するのか？それは何をもたらすのか？」というものである．我々皆にすぐ生じる第二の疑問は「それはどこから来たのか？それはどのように到達されえたのか？」というものである．勿論，前ヘルバルト的な市民は，数学的にみえるどんなものからもたいてい尻込みするので，これらすべての問いを一般的には無視する．しかし，新しい教授パラダイムと同調する市民は問いに直面し，可能のときはいつでも，それらの問い各々に取り組む．いかにそれが可能であろうか？

記念碑訪問パラダイムによって形作られた教授世界では，ほとんどの人々は「後退認知的(retrocognitively)」にふるまう．私は「後退認知」という言葉を，古い超心理学的な意味においてではなく，単に，既知の知識を優先的にそしてほとんど排他的に引き合いに出すように人を導く認知的態度を表現するために用いる．この意味での後退認知は，次のようなほとんど前提のようなものに支配されている．それは，一度学校や大学を卒業してしまえば，もし直面する問いへの答えを前もって知らなければ，賢明な答えに達するためのあらゆる強がりを放棄した方がよいというものである．勿論これは，前例のない問いを回避するという上で述べた傾向と関連する．対照的に，世界探究パラダイムはかなり異なった態度を求める．それは，前進認知的 (*procognitive*)（「精神錯乱や方向感覚喪失を和らげる」薬に関わる言葉遣いと関係のない意味で）と私が呼ぶものであり，この態度は，まるで知識が基本的には今でも発見すべきそして勝ち取るべき（もしくは再発見し新たに獲得すべき）ものであるかのように行動することに人を方向づける．したがって，後退認知的な性向においては，知ることは「後ろ向きに知ること」である一方，前進認知的な献身においては，知ることは「前向きに知ること」である．

私が提示するシナリオでは，人はどのように問い Q に対する答え A を構成しその正当性を確認するのか？基本的に問い Q の探究は，二つの動きを必要とする．最初に，「探究者」x は問い Q への既存の答えを求めて関連文献を調べる．この動きは伝統的に学校では禁止されるが，科学的研究においては反対に不可避である．ATD では，文字 A の肩に小さいひし形もしくはダイヤ（細長のひし形）をつけた $A^{\diamond}$ を用いて既存の答えを表記するのが通

例である．これは，そのような既存の答えが，ある意味，それを認証した何らかの制度によって創造され発信されてきたことを表わすためである．勿論，答え $A^{\diamond}$は「真実」であったり「有効」であったりする必要はなく，答え $A^{\diamond}$が適切であるかどうかを検討しその答えを評価するのは x の責任である．この行為もまた，教師の与える答えが保証されているという学校の慣習から逸脱したものである．自分自身の答え（「作った者の印」とみなされる小さいハートを肩につけた $A^{\heartsuit}$で通常示される）に達するために，探究者 x は数学的であったりなかったりする「ツール」，すなわち本性の異なる作品を使用しなければならない．$A^{\heartsuit}$に向かう研究の過程は，「認証された」答え $A^{\diamond}$と作品 O（答え $A^{\diamond}$を勉強するためと答え $A^{\heartsuit}$を構築するための両方のためのツールとして用いられる）の複合的な研究から始まる．

x によって導かれる Q の探究は，<u>調査と研究の経路</u> (*research and study path*)[訳註4]と呼ばれる経路を切り開く．この経路に沿って進むために，探究チーム X は，メンバーがまだ未知の知識（答え $A^{\diamond}$や他の作品 O と関連している知識）を用いなければならない．この知識は，答え $A^{\heartsuit}$へ向けた道を進むためには精通しなければならないものである．要するに，この点における必要条件は，X や X のあらゆるメンバーx が，新しい知識（新しい作品）との出会いを望みながら，<u>前進認知的</u>にふるまうことである．

ここでいくつかのより教授的な側面を強調すべきである．第一に，世界探究パラダイムでは，調査と研究の経路に沿って新しい知識に出会ったり，古くて半ば忘れ去られている知識に再会したりすることが，探究者 x の<u>学習</u>方法であるということである．探究者らは，答え $A^{\diamond}$や仕事道具 O, 最終的には答え $A^{\heartsuit}$を学習したり再学習したりする．すると，記念碑訪問パラダイムでの通常のものとは反対に，この文脈では，学習される<u>内容</u>が<u>事前に計画されず</u>，次の二つの要素によって本質的に決定されるということは明らかである．それは，まず研究する問い Q であり，それから歩まれる調査と研究の経路である．後者は，答え $A^{\heartsuit}$を作り上げるために遭遇し勉強する $A^{\diamond}$や O によってさらに決定されるのである．第二に，（数学的あるいは非数学的）作品 O の勉強（答え $A^{\diamond}$についても同様）は，答え $A^{\heartsuit}$に到達する企てによって決定されるということを強調しなければならない．作品訪問パラダイムにおける x と y に強いられるフィクションとは反対に，与えられた作品 O の「標準的」もしくは「自然な」勉強のようなものは存在しないのである．すべての<u>発表</u>は特別であり，すべてやり尽くすということはなく，多くがそれらの恣意性を隠し損なうのである．何らかの問い Q の探究の文脈における作品 O の勉強は，質的にも量的にも，答え $A^{\heartsuit}$を作成する際の O の使用に大いに依存している．このように文脈に束縛される O の勉強において明らかにされるべきことは，研究者によって獲得される O についての知識が，それが問い Q の探究によってまとめられているため<u>機能的に首尾一貫しているということ</u>，そのため適切な事例においてその使用を説明する O の<u>存在理由</u>が容易に明白になるということである．

社会，学校，新パラダイム

世界探究パラダイムとそれを実現する探究は真空には存在しない．それらは社会と学校に基盤を持たなければならない．これまで概説してきた<u>ヘルバルト図式</u>(*Herbartian schema*)と呼ばれる教授図式の関連領域は，学校に制限されるものではなく社会全体に渡るということを，ここでもう一度強調しておきたい．あらゆる個人は教授三項(x, y, O)における x でありうる．（教授「支援者」y は存在しないかもしれないが，そのような場合は$(x, \varnothing, O)$と表記され，したがって教授三項は二項へと本当は削減される．）勿論，目立った差異に

気づくのは簡単である．多くの現代社会において，人生の最初の部分（つまり子どもである間）で学校へ通うことが強制される．確かに，一般的には大人のための義務教育のようなものは存在しない．この点において，ここで提唱されているシナリオは根本的な変化を前提とする．その変化は，教育の権利を,「学校(school)」と呼び続けることができる適切なインフラによって提供される万民のための生涯教育の権利へと拡張することを伴う．しかし，ここでの学校は古代ギリシャ，より正確にはギリシャ語 *skhole* の意味でのものである．そもそもこの言葉は余暇に充てられている予備的な時間を指していた（例えば，プラトンの時代ではまだこの意味で使われていた)．後にそれが「勉学に励む余暇」,「知的議論のための場所」,「自由な勉強のための時間」という意味に変化した．このように，我々の社会における教授の新しい役割は，以下で私がより純粋に *skhole* と呼ぶような広く行き渡った制度の開発を示唆する．勿論，我々が知っているような学校は，その今日的な形態において，新しい教授パラダイムにとってかなり異質ではあるが，*skhole* の鍵となる一構成要素である．しかし学校が *skhole* のすべてであるわけではない．例えば，大人にとっても子どもにとっても，*skhole* の大部分は家庭で生じる．家庭での *skhole* 教育(home *skhole*ing)は，すでに *skhole* の主要な構成要素であり，今後もそうであろう．以下では，たとえ *skhole* のいくつかの部分が未だに古い学校パラダイムの支配下にあるとしても，世界探究パラダイムの展開と繁栄を促進するために，*skhole* の可能性に迫ってみたい．

私は大人の *skhole* 教育(*skhole*ing)の場合を考えることから始める．今日の「大人の学校教育(schooling)」と我々が呼ぶものは，*skhole* 教育の些細な構成要素でしかない．実際，多くの市民は，部分的にではあるが，例えば日常生活において悩まされる多くの問いを自ら探究できるように,すでに準備ができている．そうであれば，大人の *skhole* 教育の発展を妨げている主な制約は何だろうか？また大人の *skhole* 教育の発展を助ける条件は何だろうか？第一の条件は，x は問いに直面したときに逃げるのではなくきちんとそれに向き合う，という事実にある．そのようにするために x は，少なくとも自らに対してそれらの問いを明確に定式化しなければならない．単純に聞こえるかもしれないが，そのようなふるまいは,「親分(master)」と「子分(underling)」の分離とでもいえるような，我々の文化の根本的な決定要因と対立する．この文化では,「親分」は世界（自然世界や社会世界）について子分が問いを立てること，あるいは慣用句にもあるように世界について「問う」ことを禁止し，「親分」ひとりが世界を問い世界を変える正統性をもつ．純然たる観察（しかしこの結論は容易に実験することができる）により，多くの人々がほんの少しの問いを自ら立てることでも興奮することがわかる．問いを立てることは市民の絶対の権利になってきたが，歴史的にみれば，それは強力な支配者の特権であった．しかし，この権利は，十分に発達した民主主義においてあるべきようには，未だ行使されていない．

ある市民が何らかの問い Q を探究しようと決心した，つまり教授三項$(x, ?, Q)$における探究者 x になったと想定しよう．この研究の段階において，二つの問題が生じる．一方で，x は何者か Y から助けてもらおうと考えるだろう．もう一方で，問い Q の答え $A^\heartsuit$ と関連作品 O を求めて「世界を調べる」必要がある．これら二つの問題のうち第一のものには今のところ決まった解決策はないが，第二の問題にはおおむねよい方法がある．それはインターネット特にウェブによって与えられる情報の全体にある．実際，私は *sensu latissimo* な（最も広い意味での）インターネットへ言及したい．つまりここでいうインターネットとは，

今日の語法とは異なり，世界中のすべての図書館を含むものである．というのも，どんな文献もすでにインターネット上で利用可能であるか，もしくはまだ利用できないだけとみなすことができるからである．ここで例を一つだけみてみよう.「に比例する」の記号（∝）についての数学の探究事例において，Jeff Miller の『関係記号の初期使用』(2011)についての有名なウェブサイトから始めたとき，人は数学的表記の歴史に関する Florian Cajori の古典(1993, vol. 1, p. 297)へと辿り着く．この本は今度は三冊のより古い本，記号「∝」を導入した Emerson (1768), そして Chrystal (1866), Castle (1905) へと次々に探究者を向かわせる．今日，これらの本はすべてオンラインで無料利用できる．加えて，インターネットは，例えばインターネットのフォーラムや議論スレッド上で，多くの探究者 x が臨時の支援者 y から助けを得ることを可能にもする．第二の問題への主な解決策が第一の問題へも（部分的な）解決策も提供しているのである．

sensu latissimo なインターネット上での探究は，よく知られている困難と出会う．第一に，もし少なくともいくつかの適切な資料が見つかることを x がほぼ知っているならば，研究される問いをさらに深めていくことを可能にする文献は多くないであろう．第二に，探究者 x は，既存の適切な文献を見つけだすことも，集めてきたわずかな情報を最大限利用することも,いずれもできないことがある．このように，探究者の知的装備（より正確には, ATD 特有のプラクセオロジー(*praxeology*)の語の意味では，探究者のプラクセオロジー装備(*praxeological* equipment)）は，オンラインやオフラインの資料の場所を突き止める能力と，それらをうまく活かすために必要な知識という，二本の柱に支えられている．これは, 集められた作品 O をうまく使用するという問いへと導く．最も一般的な問い Q は様々な知識領域と関連する作品 O の使用を伴うため，Q の研究は，共通の企てのために様々な「学問」からツールを集めて行なわれる，学際的な追求であらねばならない．この点で，私が市民と呼ぶ者は，ある政治的コミュニティのメンバーという意味での個人ではないということを強調しなくてはならない．それとは全く反対に, 市民は, 自身の成果や可能性，特にあらゆる種類の問いの探究者としての成果や可能性に照らして認められるのである．このことから次のことが生じる．つまり，新しい教授パラダイムの前進認知的な視座では，市民は多くの領域で教育されるべきであるというだけではなく，自らにとって新しい知識の領域を，たとえゼロからであっても，勉強し学習する準備ができている必要があるということである．市民とは単なる遵法の民に留まらない．探究は勉強を要求するのだから，市民は聡明でなければならないし，いつまでも未知の作品を勉強する心構えができていなければならない．

私がここで描く市民は，自らに要求されていることに従って行動することができないと感じるかもしれない．この感情は，基本的に学校や社会の古い教授体制 (didactic organisation) から生じる．それは，我々が経験するどんな知識の欠乏に対しても，知りたいことを何でも教えることができる神がかった人物がどこかに存在するという幻想を押し付ける．そのような幼稚な信念は，我々の届く範囲外の催しへの無抵抗と服従に通ずる．世界探究パラダイムでは，何らかの関心のあるテーマについての授業や会議に出席することは，勿論軽視されない．しかし我々はそれを，共通の結末へと至るための手段，つまり問い Q への答え $A^{♥}$ を生み出すために役立つと考えられる何らかの確固とした作品 O について何かを学習するための手段として捉えなければならない．そのような状況では，古い学校パラダイムにさらされていることから生じ

る無知と知識との関係のために，我々は必要とされるすべての知識をもっていないことにいら立ちを感じがちである．その知識とは，歴史学，生物学，数学，物理学，化学，哲学，言語学，社会学など，いつまでも続くすべての知識である．ここで暗黙裡に空想されている性格は，私が閉じられた人(*esoteric*)（したがって形容詞を名詞としても使用している）と呼ぶに至ったものであり，必要とされるすべての知識を既に知っていると想定される者である（「歴史学者」，「生物学者」，「数学者」，「物理学者」などに対して多くの人々がもっている考えは，このファンタジーと一般に類似している）．対照的に，開かれた人(*exoteric*)はいつまでも勉強し学習しなければならず，閉じられた人という捉えどころのない地位へは決して達することがない．確かにすべての真の学者は開かれた人であり，学者であり続けるためにはそうであり続けなければならない．私がここで定義するものとしての閉鎖主義(esotericism)は寓話である．

したがって，新しいパラダイムにおける市民は，ヘルバルト的であり，前進認知的であり，開かれた人であるよう求められる．この新しい市民性をいかに促進できるだろうか？純粋な無知から十分な知識へのすべての道を進むために必要な認識論的な情熱に取り憑かれること以上に，決定的な条件となるのは，大人の生活において研究と調査に割り当てられる時間であると確実にいえる．たいていの場合，この時間は年月が経過するうちにどんどんゼロに近づいていくようである．この点に関して，私は，古代ギリシャが打ち立てたトリックを何度も繰り返していいたい．つまり一部の現代人が大いに謳歌しているようである余暇の時間を研究と調査の時間に変えるといった，真正な *skhole* の伝統におけるトリックをである．そのような追求は，フロイトが一度 *Kulturarbeit*「文明的仕事(civilisational work)」と呼んだものに関連しており，抜本的な変化はまだ起こっていないが，それは新しい教授パラダイムの出現に絶対不可欠なものである．

研究と調査に割り当てられる時間の問題には，普通の学校教育の場合は簡単な解決策がある．若者は *skhole* の定義する原理に従って，研究をしに学校へ通う．しかしどの程度学校は新しい教授パラダイムを受け入れるのだろうか？私はこの問題に長居するつもりはない．しかしながら，あまりに多くの場合において，いわゆる「探究ベース」の指導が何らかの形で「偽探究」を講じているということを述べたい．大抵そのような探究を生み出す問い Q は，教師が事前に決めた作品 O を生徒に見つけさせ勉強させるための単なる浅はかなトリックだからである．勿論，これは作品訪問パラダイムによる支配のわかりやすい帰結である．このパラダイムは，カリキュラム内容が複数の作品 O によって定められるということを意味する．対照的に，世界探究パラダイムでは，カリキュラムは複数の問い Q によって定められる．しかしながら，これらの問い Q を探究した結果として勉強した作品 O は，カリキュラムを定めたり改善したりする過程において中心的な役割を果たす．「初源的」な問いの集合 Q から始め，最終的に勉強されるカリキュラム内容 C は，答え $A^{\diamond}$ や作品 O とともに，問い Q や答え $A^{\heartsuit}$ を含んでいるであろう．

しかしここで二つの疑問が生じる．第一の疑問は，「初源的」な問いの集合 Q に関わる．これらの問いはどこからどのような仕組みで現れるのか？国定カリキュラムの場合，学校で研究されるべき初源的問いの集合は，「コア・カリキュラム」つまり社会と学校の間の国家的取り決めの基盤を構成する．結局，集合 Q が何から構成されるかを注意深く民主主義的に決め，カリキュラムの耐久年数の慎重なモニタリングに基づいてその内容を定期的に改訂・更新するのは国家の責任である．それは社会とその学校教育システムとの関係に

とって本質的なので，コア・カリキュラム（つまり「初源的」問い）は，社会の *skhole* において決定的な役割を果たす．しかし，カリキュラムが初源的問いのみによって定められるわけでは必ずしもない，ということは明らかである．これらの問いによって引き起こされる探究は，決して一意的に定められない．周知のように，探究は様々な研究と調査の経路を辿り，そこで探究する問いや，遭遇しある程度勉強するその他の作品は，確かに経路に依存している．結果として，たとえコア・カリキュラム（上で定めた意味で）が詳細にされたとしても，結果としてのカリキュラムはそれに内在する変動性のため曖昧に定められるであろう．この状況に対して，いかによりうまく対処できるだろうか？

問いの（有限の！）族を O としてもつ教授三項(X, Y, O)を考えてみよう．生徒の集まりに対して二種類の教授三項が想像できる．第一に，初源的問いとそれらの研究が生み出す問いから成る問いの動的な族が O となるセミナーである.（ここで描かれるシナリオは幼児から上級の生徒にまで適用することを想定しているため，私がここで使用している用語はかなり広い意味，つまり多種多様な具体的状況へ適応できるような意味でとらえなければならないことに注意してほしい.）このセミナーは，初源的問いがただ一つの学問領域へ分類されることはほとんどないため，基本的に学際的である．第二に，セミナーにおいて提案された，ある特定の学問に本質的に関わる問いや作品を勉強するための，学問的ワークショップである．例えば，化学のワークショップ，数学のワークショップ，歴史学のワークショップ，生物学のワークショップなどがあろう．実際のワークショップは，セミナーにおいて研究された初源的問いに大いに依存するだろう．鍵となる事実は，この二段階の過程（セミナーたすワークショップ）において，いくつかの作品 O といくつかの学問は，探究において頻繁に必要とされるので，何度も繰り返し出てくるということ，その一方で他のものはたまにしか出会わなかったり全く生じなかったりするということである．ある作品 O についての「流通の程度」は，もしそれがある学校段階で行われているすべてのセミナーに渡り全国的な平均値を取れれば，絶え間なく改定される曖昧な集合（実際のカリキュラムの本質に対するより適切な見方）と比喩的にみなされるカリキュラムにおける作品 O の「メンバーシップの程度」となる．上で指摘したように，そして基本的に主観的な意見に基づいて作られたカリキュラムを押しつける昔からの習慣とは反対に，世界探究パラダイムは，自然世界や社会世界を問うたり知ったりする試みにおいてどの資料が本当に利用されているのか，有機的な方法により浮き彫りにすることを可能にする．

数学をどう位置づけるのか？

ある時点で，何らかの便利なツールが探究者にとって利用不可能であることがわかると，探究がストップするであろう．探究が急停止する主たる理由は，進展し続けるために理想的には必要となる，何らかの作品 O の本質的な部分の習得が探究者の手に負えないものになっていることである．ここで強調したいのは，これは，学校での探究にも研究チームの探究にも共通に見られる法則であり，決して「レベルの低い開かれた人」だけに限ったことではない，ということである．それは探究という技芸の本質的な部分であり，そのような「出来事」は探究者の冒険における曲折の一つにすぎない．しかし，ある探究において辿った経路は，その決定要因がなんであれ，上で示した教授シナリオにおいて重大な結果をもたらす．つまり，もしある作品 O が国中のセミナーやワークショップにおいてほとんど引き合いに出されなければ，この作品 O は国家カリキュラムから結局は消えることにな

る．より率直にいえば，これは伝統的な教科の一部の消滅という結果を生み出しうる．なぜなら，新しいカリキュラムにおいてある学問が占める場所は，カリキュラムの生み出す問いを探究するために，その学問がどれだけ有効なツールを提供できるかに依存するからである．その場所は，疑問も呈されない過去の遺産であった，昨今に確立されたどんな学問階級にももはや依存しないのである．伝統的に繁栄してきた学問は，学校における自身の未来が気になるところだろう．栄え続けるのか？今にも衰えるのか？この問いはすべての学問に突きつけられている．特に数学に．

もし知識が，我々が合理的に理解したり達成したりできるようにするものによって価値づけられるならば，我々が直面する問題は，学問の運命というよりも，むしろセミナーやワークショップにおいて行なわれている探究の価値や質である．この点からすれば，先述のシナリオは，カリキュラムに関わるあらゆる問いに「制御の問い」を追加する可能性を認めることによって，大幅に改善されうる．これはある意味，セミナーやワークショップから全国規模へと広まるボトムアップの情報の流れに，監督する権威者によってもたらされるトップダウンの学校の規制についての制御を加える．どんな問い Q も確かに，問い Q の探究の質や徹底さや深遠さを制御するための試金石となるような一つあるいは一連の「補助的な問い(side question)」Q^*によって，有意義に補足されうる．このような方法で，研究される問いを深めるために何らかの作品 O の有用性を有意義に（全くの強がりからではなく）指摘することが可能になる．例えば，生物多様性について問いに，遺伝的多様性についての問いや，上述の数式（1）の意味や興味深さについての問い，つまり遺伝的多様性の探究における数学の重要性に探究者の注意を引くような問いが，適切に加えられるであろう．

知識の様々な領域と関連する無数の作品にとってと同様に数学にとって，そのような制御の問いのシステムは x と y に次のようなことを思い出させるために不可欠なようである．それは，問いの探究には，x と y が越えることがまさに期待される文化的境界の内側からすれば，研究下にある問題から遠くかけ離れたもののように最初は思われるツールの使用が必要になる，ということである．数学作品の場合，これに特に当てはまる．根深い歴史的な事情から，数学は今日，形式的に崇められていると同時に，精力的に避けられている．多くの人々は，数学を「する」義務がなくなるやいなや数学から逃げていく．このことは，俗にいう「数学って楽しい！」ということを「数学不信心者」に納得させ，彼らに再度気に入られるために誘惑方略に取り組む決心を多くの数学教育者にさせてきた．ここで簡潔にいっておきたいのは，この方略には二つの主要なデメリットがあり，私の考えでは，それは完全に捨て去られるべきものである，ということである．第一の欠点は今日の教育世界において寛大に無視されているようである．深い政治的理由や道徳的理由から，学校でなされる指導は，感情や信念を操作することを控えなければならない．x（と y）の信心の自由に関わる限り，我々は非の打ちどころのないようにしなければならない．その結果，数学教育者は，生徒が数学を「愛する」ように仕向けようという誘惑に耐えなければならない．数学教育者の唯一の使命は，生徒が数学を知るようにすることであり，それはもう少し大変な仕事である！好き嫌いは，真に私的な空間に属する個人的な秘められた感情である．勿論，数学をよりよく知ることが数学に向けた何らかの形の熱中をもたらすことは大いにありうるだろう．しかしこれはすべて個々人の信心に関わる．

非常に定評のある誘惑方略の第二の欠点は，いわせていただければ，その非常に低い生産

性である．他の学問と同様に数学も抱えている問題は，大衆の問題である．私の考えでは，その根元は，数学がこれまで長い間苦しんできた文化的拒絶の過程にある．それは，真に数学的な制度の外では，数学は「一般人」の景色から完全に消えてしまい，そのため数学と全然無関係というわけでもないトピックについての多くの文献に数学の足跡が一切みられないという重大な帰結を伴うものである．これは，多くの探究の質を危険にさらす事実である．ここで簡単な例を与えよう．「なぜ氷は水に浮くのか？」という問いを考えてみよう．「氷は液体の水よりも密度が小さい」はその答えの一部である．ではなぜ氷は液体の水よりも密度が小さいのか？よくある答えは，H_2O 分子の配列が液体の水よりも氷においてより広い空間を占めるからである，というものである．この答えの吟味はいくつかの簡単な計算へと通ずる (Ravera, 2012)．確かに，特定の条件下で，氷の単位格子が，長さ 452 pm の辺と 60°の角をもつひし形を底面に，737 pm（737×10^{-12} m）の高さであることは示しうる．単位格子の体積は，そのため以下の通りである．

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 452^2 \times 737 \times 10^{-33}\mathrm{L} \qquad (2)$$

水のモル質量はおおよそ 18 g/mol である．氷の単位格子の質量は四つの水分子の質量であると知られている．アボガドロ数はここでは 6.02×10^{23} mol^{-1} とする．これより単位格子の質量 M は次のようになる．

$$M = \frac{4 \times 18}{6.02 \times 10^{23}}\mathrm{g} \qquad (3)$$

氷の密度はしたがって以下のようになる．

$$d = \frac{M}{V} \approx 917\mathrm{g/L} \qquad (4)$$

この（おおよその）結果は氷が液体の水よりも軽いということを裏づける．この計算はすべて 15 歳で習得する（ことになっている）初等的なツールを使用している．それにも関わらず，この計算はインターネット上で利用可能なもっとも適切な説明にもたいてい出ていない．これは例外的事態ではない．数多くの場合，提示されているトピックについての数学が明らかに欠けており，まるでそれが全く存在していないかのようである．これがまさに数学教育者が戦わなければならないものである．この点においては，数学が関わる限り，研究することを提案されるどんな問いに対してもとりあえず追加されるべき「試金石となる問い」は，次のようなものになる．「その事柄についての数学は何か，そしてそれに気づくことでいかに答えの質は高まりうるのか？」

これが本当に数学が誘い込まれてきた歴史的トラップから抜け出す方法になるのだろうか？私はそう信じる．ごく僅かな人々に対してだけうまくいっている誘惑方略という手だては落とし穴にすぎない．私の考えでは，唯一の現実的な解決策は，次のことについて，市民を合理的に説得する試みにあり，さしあたり生徒を説得する試みにある．それは，数学を省くことは，自然世界と社会世界の両方において我々の理解を決定的に貧弱にし，そして我々の取り組みの質を劇的に悪化させるということである．勿論，これは立派な言葉だけでは達成されない．学校の内外において，特に生活を豊かにするために国民により学習に割り当てられた余暇の時間において，日々の行動が必要となる．この追求において，数学教育者は，これまでとは異なる決定的な役割を果たすことになる．

何世紀もの間，文化的な制度としての数学は，二つの自己表現をまとって繁栄してきた．つまり数学は，広く浸透したエートスとやや帝国主義的な気配とともに，「純粋」数学と「混合」数学から構成されるものとして理解されていた．後に「応用」数学と呼ばれる「混合」の部分は，ここ数十年の間，学校において着実に衰えてきた．それに対して，前者の部分

の内の残ったもの（初等的ではあるが，純粋数学）は古の「帝国」を象徴化し維持しようとした．この時代は今終わろうとしている，と私は考える．今日，混合数学の認識論的精神を復活させねばならない．しかしそれは，文化的な傲慢さをもつことなく，しかし数学が我々人類にとって問題ではなく解決策であるという考えを活性化するために必要な政治的そして社会的意思をもってなすべきである．

引用・参考文献

Cajori, F. (1993). A history of mathematical notations (Vols. 1-2). Mineola, N.Y.: Dover.

Castle, F. (1905). *Practical mathematics for beginners*. New York: Macmillan.

Chrystal, G. (1866). Algebra: An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges (vol. 1). London: Adam and Charles Black.

Emerson, W. (1768). *The Doctrine of fluxions*. London: Richardson.

Miller, J. (2011, November 11). *Earliest uses of symbols of relation*. Retrieved from http://jeff560.tripod.com/relation.html

Ravera, K. (2012). Pourquoi la glace flotte sur l’eau. In Tangente (Eds.), *Mathématiques et chimie. Des liaisons insoupçonnées* (pp. 80-82). Paris: Pole.

訳註とそれに関わる引用・参考文献

訳註１：今回の訳出において,「勉強」はすべて「study」の,「学習」は「learn」の訳である．「study」は文脈次第では「研究」とも訳されている．訳註４も参照．

訳註２：「didactic situation」や「didactical situation」はしばしば「教授学的状況」と訳されるが(cf. 宮川，2011)，この翻訳では他の「didactic～」の訳語との統一性を重視し，「教授状況」と訳出する．意味に違いはない．ちなみにブルソー(G. Brousseau)の理論では「didactical」が，シュバラールの理論では「didactic」が，形容詞としてそれぞれ用いられる傾向にあるようである．

訳註３：ATD において「institution」は特殊な意味をもっており，例えば，宮川(2011)はそれを「知的集合体」と翻訳しているが，本訳文内では簡潔のため一貫して「制度」と訳出する．

訳註４：フランス語では「*parcours d’étude et de recherche*」である．これに対して様々な英訳が当てられてきたが，最近は「研究と調査の経路: Study and Research Path」に統一されつつあるようである．この用語における study と research の併用について，シュバラールは次のように述べている:《ここでは「study［研究］」は包括的な用語として扱われており，意味として調査(research)を含んでいる．しかし，もし以下で私が明確にしようとしている意味でこの言葉が理解されるようであれば，学校での study［勉強］は，しばしば調査の邪魔をする．[...] 今日，ほとんどの学校の study［勉強］は事柄を見つけること(*finding things*) [...]，つまり必要な活動(praxeology)を与えたり記念碑になったりする作品を見つけることから成り立っているようである．そのような諸作品は，それらがそこにある理由を見つけ出す(find *out*)作業を試みられることもなく，ただ訪ねられるのみである.「研究と調査の経路」における「調査」には，調査する，つまり「事柄を見つけ出す(find things out)」可能性を生徒に与えるためにそのような経路がデザインされる，という考えが込められている.》(Chavallard, 2006, p. 29).

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21–30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

宮川健(2011).「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *94*, 37–68.

謝辞

日本語訳版の掲載をご快諾いただいたばかりでなく，訳者の素朴な質問に丁寧に答えてくださった，エクス=マルセイユ大学（フランス）名誉教授イブ・シュバラール先生に感謝の意を表したい．加えて，本訳文のベースとなった本論文の草稿の翻訳をチェックしてくださった福田博人さん（広島大学大学院国際協力研究科院生）と森山健さん（島根県中学校数学科教諭），シュバラール先生へのインタビューをサポートしてくださったヨハンソン浅見由紀子さん（イェーヴレ大学，スウェーデン）にもお礼をいわねばならない．ありがとうございました．

（大滝孝治・宮川健）