上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.13-18.

円周率教材のルーツ

－アルキメデス『円の計測』に学ぶために－

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

１．はじめに

円周率を 3.14 として用いることや円の面積を求める公式など，現在学校で教えられている円周率教材のルーツは，アルキメデスの書『円の計測』(*MEASUREMENT OF A CIRCLE*) にある。この訳本では，次のものが現在よく活用されている。

Heiberg,J.L.ed.(1910). Archimedes Opera Omnia, 3vols, Leipzig, Teubner.

Heath(1912)は，英訳であるが，ほぼHeiberg(1910)のラテン語訳の英語への置き換えになっていると思われる。Heath(1912)では，ギリシャ文字はアルファベットに置き換えられ，原文の内容を損なわない程度に比や数式の現代的な表記が使用されていて，私たちには馴染みやすいものになっている。邦訳には，三田(1972)，佐藤(1979)がある。三田(1972)は，Heiberg(1910)を基にHeath(1912)を参考に訳出したもので,アルファベットと比や数式の現代的な表記が使用されている。佐藤(1979)は，Heiberg(1910)に従って訳出したものであるが，訳出されているのは命題２と命題３の前半部分だけである。

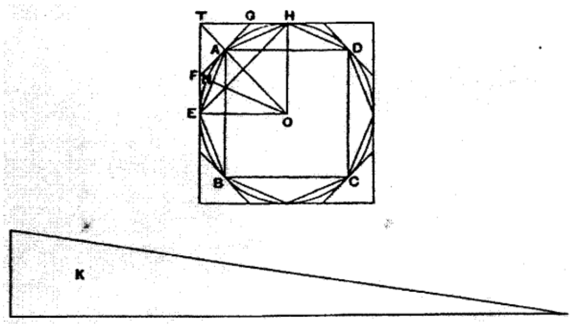
本稿の目的は，円周率教材のルーツであるアルキメデスの書『円の計測』の（現在学校で使われているものに近い平易な表現を心掛け，馴染みやすい）日本語訳を作成することである。ここではHeath(1912)の英訳に従い，アルキメデスの書『円の計測』を訳出する。

２．アルキメデス『円の計測』

命題１．

円の面積は,直角を挟む一辺が円の半径に,もう一辺が円の周長に等しい直角三角形の面積に等しい。

ABCDを与えられた円とし，Ｋをその三角形とせよ。



そうして，もしその円がＫに等しくないとすれば，それはより大きいか，より小さいかのどちらかである。

Ⅰ．もし可能であるならば，その円がＫより大きいとせよ。

正方形ABCDを描き，弧AB，BC，CD，DAを半分にし,（もし必要であれば）更にそれを半分にし，というように，円がＫより超過している分よりも総和が小さくなるような切片（弓形）に分割していき，分割点を頂点とする多角形の辺になるまで続けていく。

そうすると，多角形の面積はＫよりも大きい。

AE をその多角形の辺とし,ON を中心 O から AE に引かれた垂線とせよ。

ここで ON は円の半径より小さく,それ故に K の直角を挟む一辺よりも小さい。また，多角形の周長は円の周長より小さい，即ち，K の直角を挟むもう一辺よりも小さい。

それ故，多角形の面積は K より小さい。これは仮定に矛盾する。

よって，円の面積は K より大きくはない。

Ⅱ．もし可能であるならば，その円が K より小さいとせよ。

正方形が描かれ，E, H で円に接し隣接する 2 辺は T で出会うとせよ。隣接する接点間の弧を 2 等分し，分割点における接線を引く。A を弧 EH の中点とし，FAG を A における接線とせよ。

そうすると，角 TAG は直角である。

それ故，　　TG＞GA

　　　　　　＞GH.

その結果,三角形 FTG は面 TEAH の半分より大きい。

同様にして，もし弧 AH が 2 等分され，分割点における接線が引かれたとすると，それは面 GAH から半分より多くを切り取るであろう。

こうして，この過程を繰り返し続けていくと，外接多角形と円との間隙が埋められていき，そして遂には,（外接多角形と円との差である）切片の総和は，K が円より超過している分よりも小さくなるであろう。

そうすると,多角形の面積は K より小さい。

さて，O から多角形の各辺に引いた垂線は円の半径に等しく，多角形の周長は円の周長より大きくなるから，多角形の面積は三角形 K よりも大きいことになる。これは不可能なことである。

よって，円の面積は K より小さくはない。

したがって，円の面積は K より大きくも小さくもないから，円の面積は K の面積に等しい。

命題２.

円の面積は，その直径を一辺とする正方形の面積に対して, 11 が 14 に対する比を持つ。

［ここにヒースの注釈が記されているが,省略する。］

命題３.

円の周長の直径に対する比は，$3\frac{1}{7}$ より小さく，$3\frac{10}{71}$ より大きい。

［ここにヒースの注釈が記されているが,省略する。］

Ⅰ．円の直径を AB とし，中心 AC を O, A における接線を AC とせよ。さらに角 AOC を直角の 3 分の 1 とせよ。

そうすると,

$$OA:AC\ [=\sqrt{3}:1] > 265:153 \cdots\cdots (1),$$

そして

$$OC:CA\ [=2:1] > 306:153 \cdots\cdots\cdot (2).$$

一回目として，角 AOC を 2 等分し，D で AC と出会う OD を引く。

今，$CO:OA = CD:DA$,

［ユークリッド原論, 第 6 巻, 命題 3］

であるから,

［$CO+OA:OA = CA:DA$，または］

$$CO+OA:CA = OA:AD.$$

それ故［(1)と(2)より］

$$OA:AD > 571:153 \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

となり,

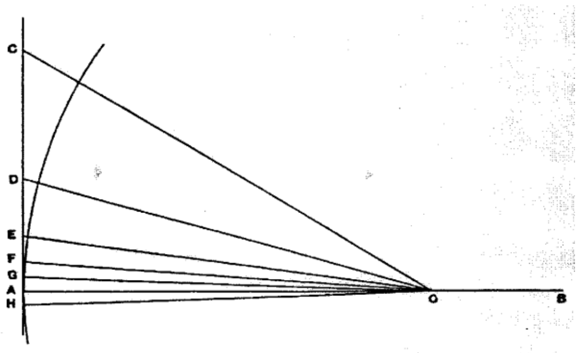
$$OD^2 : AD^2 \ [= ((OA^2 + AD^2) : AD^2$$

$$> (571^2 + 153^2) : 153^2]$$

$$> 349450 : 23409$$

となるから，

$$OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$



二回目として，角 AOD を 2 等分し，E で AD と出会う OE を引く。

［それで，$DO : OA = DE : EA$

となり，$DO + OA : DA = OA : AE$.］

それ故，

$$OA : AE \ [> (591\frac{1}{8} + 571) : 153 ,$$

((3)，(4)より)］

$$> 1162\frac{1}{8} : 153 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

［さらに次のようになる。

$$OE^2 : EA^2 > \{(1162\frac{1}{8})^2 : 153^2\} : 153^2$$

$$> (1350534\frac{33}{64} + 23409) : 23409$$

$$> 1373943\frac{33}{64} : 23409 \ .]$$

そうして，

$$OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6).$$

三回目として，角 AOE を 2 等分し，F で AE と出会う OF を引く。

そうすると，［上の(3)と(5)に相当する］次のような結果を得る。

$$OA : AF > \ [(1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}) : 153 \ ]$$

$$> 2334\frac{1}{4} : 153 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7).$$

［それ故，

$$OF^2 : FA^2 > \{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\} : 153^2$$

$$> 5472132\frac{1}{16} : 23409 \ .]$$

そうして，

$$OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8).$$

四回目として，角 AOF を 2 等分し，G で AF と出会う OG を引く。

そうすると次のようになる。

$$OA : AG \ [> (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153 ,$$

((7)，(8)より)］

$$> 4673\frac{1}{2} : 153$$

ここまでに，直角の 3 分の 1 である角 AOC は，四回ほど，2 等分されたから，次のよう

になる。

$$\angle AOG = \frac{1}{48}\text{（直角）}.$$

OA のもう一方の側に角 AOG と等しい角 AOH をつくり,GA が OH と H で出会うようにせよ。

そうすると,

$$\angle GOH = \frac{1}{24}\text{（直角）}.$$

したがって，GH は円に外接する 96 辺の正多角形の一辺となる。

そして,

$$OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$$

であり,

$$AB = 2OA,\ GH = 2AG$$

であるから，次のようになる。

AB :（96 辺の多角形の周長）

$$[> 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96]$$

$$> 4673\frac{1}{2} : 14688 .$$

ところが,

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$

$$[\ < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\ ]$$

$$< 3\frac{1}{7}$$

それ故,（多角形の周長より小さい）円の周長は,直径 AB の $3\frac{1}{7}$ 倍よりなお一層もっともっと小さい。

Ⅱ.次に AB を円の直径とし,C で円に出合い,角 CAB が直角の 3 分の 1 となるような角 CAB をつくる。BC を結ぶ。

そうすると,

$$AC : CB\ [= \sqrt{3} : 1] > 1351 : 780 .$$

一回目として，AD は角 BAC を 2 等分し，d で BC に，D で円に出合うとせよ。BC を結ぶ。

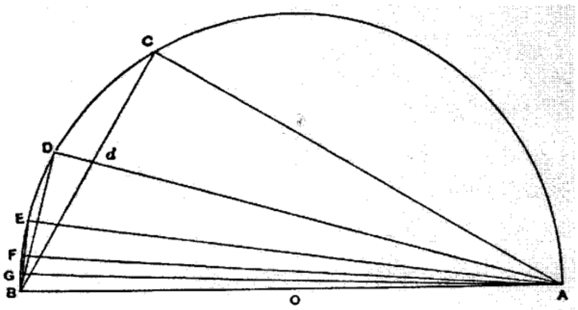
そうすると,

$$\angle BAD = \angle dAC$$

$$= \angle dBD,$$

そして,D,C での角は両方とも直角である。

三角形 ADB,［ACd］, BDd は相似になる。



それ故, $AD : DB = BD : Dd$

$$[= AC : Cd]$$

$$= AB : Bd$$

［ユークリッド原論, 第 6 巻, 命題 3］

$$= AB + AC : Bd + Cd$$

$$= AB + AC : BC$$

また, $BA + AC : BC = AD : DB$

［ところが, 上のことから

$$AC : CB < 1351 : 780$$

であり, 一方で,

$$BA : BC = 2 : 1$$

$$= 1560 : 780 .］$$

それ故,

$$AD : DB < 2911 : 780 \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

［よって,

$$AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2$$

$$< 9082321 : 608400 .］$$

したがって,

$$AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780 \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

二回目として, AE は角 BAD を 2 等分し, E で円に出合うとせよ。BE を結ぶ。

そうすると, これまでと同様の方法で次のことが証明される。

$$AE : EB \ [= BA + AD : BD$$

$$< (3013\frac{3}{4} + 2911) : 780 ,$$

((1), (2) より)］

$$< 5924\frac{3}{4} : 780$$

$$< 5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13} : 780 \times \frac{4}{13}$$

$$< 1823 : 240 \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

［よって,

$$AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$$

$$< 3380929 : 57600 .］$$

それ故,

$$AB : BE < 1838\frac{9}{11} : 240 \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

三回目として, AF は角 BAE を 2 等分し, F で円に出合うとせよ。

そうすると,

$$AF : FB \ [= BA + AE : BE$$

$$< 3661\frac{9}{11} : 240 ,$$

((3), (4) より)］

$$< 3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40} : 240 \times \frac{11}{40}$$

$$< 1007 : 66 \cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

［よって,

$$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$$

$$< 1018405 : 4356 .］$$

それ故,

$$AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66 \cdots\cdots\cdots\cdots (6).$$

四回目として, AG は角 BAF を 2 等分し, G で円に出合うとせよ。

そうすると,

$AG:GB$ [$= BA + AF : BF$]

$$< 2016\frac{1}{6} : 66,$$

((5), (6) より)

［そして，

$$AB^2 : BG^2 < \{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2) : 66^2$$

$$< 4069284\frac{1}{36} : 4356.]$$

それ故，

$$AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66,$$

となり，

$$BG : AB > 66 : 2017\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots (7).$$

［さて，直角の 3 分の 1 である角 BAC を四回ほど 2 等分した結果としての角 BAG は，直角の 48 分の 1 に等しい。

そうすると，BG に対する中心角は

$$\frac{1}{24}\ (\text{直角}).]$$

それ故，BG は 96 辺をもつ内接正多角形の一辺である。

(7)から次のことが導かれる。

(多角形の周長) : AB [$> 96 \times 66 : 2017\frac{1}{4}$]

$$> 6336 : 2017\frac{1}{4}.$$

そして，$\dfrac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\dfrac{10}{71}$

円の周長は直径の $3\dfrac{10}{71}$ 倍よりなお一層もっともっと大きい。

したがって，円の周長の直径に対する比は，

$3\dfrac{1}{7}$ より小さく，$3\dfrac{10}{71}$ より大きい。

３．おわりに

訳出する過程において，改めて何度もアルキメデスの考えの素晴らしさには驚かされた。また，命題 2 の存在に関わる謎，命題 3 で使用されている $\sqrt{3}$ の近似値に関わる謎はもちろん，アルキメデスの方法に対する疑問，興味,関心はいっぱいに広がるばかりであった。

本稿で試みた日本語訳が，これからの円周率に関わる教材研究や教材開発の一助となれば，筆者の喜びとするところである。

引用・参考文献

Heath,T.H.ed.(1912). The Works of Archimedes, *MEASUREMENT OF A CIRCLE* (pp.91-98), Dover Publications,Inc., New York.

三田博雄 訳(1972). 「アルキメデスの科学」(pp.385-505),『世界の名著 9 ギリシアの科学』(田村松平 責任編集)，中央公論社.

佐藤徹(1979). 「第 3 章 アルキメデス－『円の計測』と『螺旋について』－」(pp.163-253),『数学の歴史 1 ギリシャの数学』，共立出版.

伊達文治(1992).「「円周率」関連教材についての考察－解析基礎分野の一教育内容として－」，日本数学教育学会誌『数学教育』，第 74 巻・第 7 号，pp.29-34.

伊達文治(1993).『アルキメデスの数学－静力学的な考え方による求積法－』，森北出版.