上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.19-28.

三次元空間における角に関する困難性についての研究

三ツ間　伸太朗
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

中学校の空間図形領域の学習では，図形の性質を直観的に図から読み取るだけでなく，数学の世界での推論を通して考察することが求められる．空間図形に関する数学教育の先行研究では，空間図形の学習における困難性がしばしば指摘されている（熊倉他，2002）．また，学力学習状況調査の結果などから，今日でも，子どもたちが空間図形を学習することには困難性が存在していることがわかる．空間図形の困難性に関する研究では，これまで見取図などの表現から生徒がいかにして空間図形を読み取るのか，生徒の思考に焦点を当て，空間的推論にはどのような水準があるのかなどがしばしば研究されてきた（影山，1998；久米・村上，1997 など）． そこでは，空間図形のイメージができないことが困難性の主たる要因と考え，生徒が図形のイメージを付けることによりこうした困難性を克服することにつながると考えられてきた（国立教育政策研究所，2012）．

一方で，三次元空間における図形は，二次元平面の場合と比較すると，複雑で必ずしも容易に捉えられるものではない．例えば，角について考えれば，二次元平面の場合には二つの半直線によって作られる角以外に角はなかったものの，三次元空間では，面と面によって作られる角，直線と面によって作られる角など異なる種類の角が存在し，一概に角を捉えることはできない．このことからすれば，空間図形に関する困難性を検討するに当たって，三次元空間における図形そのものに着目し，まずはそれらがどのようなものか明確にすることが必要と考える．そこで本研究は，三次元空間における角に焦点を当て，空間図形の性格という視点から，学習者が角に対してもつ困難性を明らかにすることを目的とする．特に，二次元表現の図から空間図形やその性質を認識する際の困難性ではなく，模型などの三次元のモデルを用いた場合にも起こり得る，三次元空間の角そのものの捉えにくさといった，角の特殊性に起因する困難性を明らかにしたい．なお，本研究は修士論文作成のために進められたものである．詳細は，修士論文を参照いただきたい．

2. 研究方法

上述の目的を達成するため，まず，図形の性格や角の性格とは何かを説明する．これは，本研究における視点を明確にするためである．次に，角の性格について述べる．ここでは中学校数学で扱われる角に限らず，空間における角にどの

ようなものが存在するか示す．その上で，角の性格に起因する困難性が生徒の困難性となっていることを示すため，質問紙による調査およびインタビュー調査を行った．質問紙による調査では，これまで指摘されてきた困難性が存在していることを確認し，インタビュー調査は困難性の要因を明らかにするために行った．インタビュー調査を分析する際に角について捉え方を明確にすることで，角の性格に起因する困難性がより明確になる．そのためにまず，空間図形の角を捉える枠組みを提案し，枠組みをもとにインタビュー調査の結果を分析し，困難性について考察する．最後に教育への示唆と今後の課題について述べる．

3. 図形と表現

本研究では，「図形の性格」や「角の性格」などという言葉を用いる．図形そのものに焦点を当て，その性質や特徴について議論するためである．ここでは，図形と図について本研究での捉え方を示す．本研究では，Parzysz (1988) を参考に「図形」は現実には存在しない数学世界の抽象的な幾何学的対象と捉える．そして図形を現実世界に表現したものの中で，２次元の表現が「図」，３次元の表現が「モデル」である．この関係は図１のように表わされる．したがって，本研究の焦点は，現実世界の図的な表現から数学世界の対象を捉える際の学習者の困難性ではなく，数学世界の対象を捉えることの困難性である．

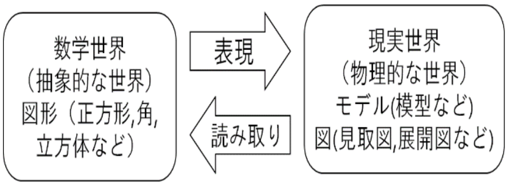


図１：図形と図

4. 角の性格

角の性格とはいかなるものであろうか，そしてその性格に起因する困難性にはどのような可能性が存在するだろうか．角の性格を知るため，三ツ間（2015）において三次元空間における角について学校教育内に限らず，歴史上の数学をはじめ一般の数学においてどのような角が存在し，その扱いがどのようなものであるか検討した．その結果，三次元空間における角について，ユークリッドの時代より少なくとも４種類の角が存在することが分かった．直線相互の傾きである「平面角」，直線と平面の傾きである「直面角」，面同士の傾きである「二面角」，二直線より多くの直線からなる「立体角」である．それぞれの角の性格については三ツ間（2015）を参照いただきたい．

では，これらの角が空間図形に存在していることによって，空間図形の角にどのような困難性が考えられるのだろうか．筆者が考える空間図形の角の困難性は，次の３点である．一つ目は問題で問われた角を正しく捉えること．二つ目は角の大きさを求める際に帰着させるべき平面角を決定するとき，様々な条件を考慮に入れなければならないこと．三つ目は，空間図形では推論が複数の段階にわたるため複雑であり，解答に多くの知識を必要とすることである．

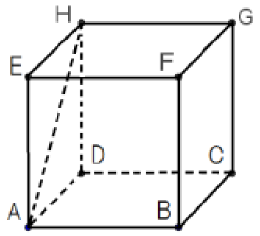
5. 調査問題について

前節で述べた困難性が実際に生徒の困難性となっていることを示すため，調査問題を選定し，質問紙調査およびインタビュー調査を行った．本節では選定した調査問題がどのようなものであるか述べ，それら問題を解く際にどのような

困難性が表出するか検討する．

本研究では，空間図形の角について問う問題を選定し，図 2 に示す二つの問題を用いることとした．

問題 1　右の図のような立方体があります．AH は面 ADHE の対角線です．このとき，∠HAB の大きさは何度ですか？また，その理由をできるだけ詳しく書きなさい．



問題 2　右の図のような立方体があります．AH と AF はそれぞれ面 ADHE と面 ABFE の対角線です．このとき，∠HAF の大きさは何度ですか？また，その理由をできるだけ詳しく書きなさい．

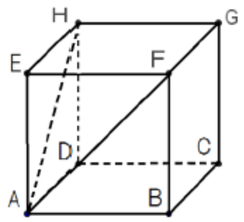


図 2：本研究で用いる角についての問題

どちらの問題も空間における角を直接的に問う問題であり，先行研究等の調査にてよく扱われる問題である．角の捉え方が直接的に解答につながるという点で，角の性格に起因する困難性を探ることに適した問題と考えた．この 2 問では，角の捉え方がどのように困難性として表出するだろうか．

問題 1 は，∠HAB の線分 HA と AB がなす平面角の大きさを求める問題であり，正答は 90°である．その正答を直観に頼らずに導くには，まず辺 AB と面 ADHE に着目し，ABCD-EFGH が立方体であることから EA⊥AB かつ AD⊥AB であるため，AB⊥ADHE であることを導く．次に，面 P と直線 L が垂直関係であるならば面上の任意の直線 M と直線 L が垂直であることを利用して，AB⊥AH を導く．最後に，∠HAB は直線 AH と AB からなる平面角であることから∠HAB＝90°とする必要がある．問題 1 の類題である平成 24 年全国学力・学習状況調査（選択問題で理由は問わない場合）では正答率が 62.5%であったと報告されている．学力調査の報告書では，直方体における辺と面に含まれる直線との位置関係の理解に課題がある(p.242)．とのことである．筆者はこの問題に対して生徒が正答を与える難しさはそれだけではないと考える．例えば，立方体が面から構成されていると考えれば，この問題では，面がないところの角の大きさが問われている．これは，初学者にとって奇妙に感じるのではないであろうか．角の多様性という視点から考えれば，平面角を考えず，他の角に注意がいくこともあろう．例えば，次のものが考えられる．

直面角：HA と ABCD からなる角

二面角：ABCD と ABGH からなる角（これは面を考えた生徒のみ）

立体角：HA，AE，AB からなる角

側面にできる角：∠EAB と∠HAE の和からなる角

この問題 1 では，これらの角の捉え方に応じて解答は異なるであろう．例えば側面にできる角と捉えている場合には∠EAB+∠HAE＝135°といった解答が考えられる．

問題 2 は，熊倉他（2002）に取り上げられた問題であり，これまで空間図形の研究においてよく扱われている問題である．問題 1 と立方体の頂点の記号を合わせた．問題 2 も問題 1 と同様，平面角の大きさを求めるものである．正答は，∠HAF を平面角と捉え，切断面 HAF が

正三角形であることから∠HAF＝60°である．ただ，問題 1 と同様∠HAF をいかなる角と捉えるのか，その可能性は複数ある．例えば次のものが考えられる．

平面角 : 平面 HAF 上にできる線分 HA と AF からなる角

直面角 : 線分 HA(or AF)と面 ABFE (or ADHE) がつくる角

二面角 : 面 ABFE と面 ADHE がつくる角

立体角 : 線分 EA,EB,ED からなる角

側面にできる角 : ∠EAE と∠HAE の和からなる角

この問題も角の捉え方に応じて解答が異なる．例えば，二面角と捉えていた場合には立方体の側面同士のなす角が 90° であることから，∠HAF＝90° といった解答が考えられる．

これらの問題を用い，はじめに質問紙の形式で中学生を対象とした調査を行った．問題 1 については，正答である 90°と解答した生徒が 43.3 %で，45°や 135°という誤答も多く見られた．問題 2 については，熊倉（2002）の調査同様，正答率は低かった．正答である 60°と解答した生徒は 16.7 % であり，90°の誤答が 50 % もあった．

質問紙調査において生徒に見られた典型的な誤答例から，角の捉え方と角の大きさを求める際の操作に誤答の要因があることが考察された．しかしながら，生徒の記述からでは生徒の角に対する捉え方や考え方を導くことは不十分であった．そのため次節以降において角の考え方や捉え方を捉える枠組みを提案し，インタビュー調査の結果から困難性を考察する．

6. 角を捉える枠組み

生徒の角に対する考え方や捉え方をより明確に捉えるためにコンセプションを提案した．そこでは，Balacheff のコンセプションをもとに，4 つの要素の組 (P, R, L, Σ)によって，生徒の置かれた状況を含め，その場におかれた生徒が一般的にもちうる考えを捉えるための枠組みを提案した．P は「問題の集合」であり，生徒が問題解決する際の状況を特徴づけた問題の集まりである．本研究における P は，前章で選定した調査問題である．R は「操作・規則の集合」である．ある問題を解決する際に，問題を変換したり，記号化したりするなどの操作の集まりである．本研究では操作・規則を，次の 2 つの変数で特徴づけられると考えた．

x. 角の大きさの求め方 : 直接的，間接的．

y. 角の大きさの判断 : 知覚的[1]，半論理的，論理的．

x は角の大きさを別の角の大きさに帰着して求めるか否かの区別である．間接的であるとき，問題で問われる平面角を二面角や直面角に帰着させる場合，平面角を別の部分にある平面角に帰着させる場合にも間接的であるとした．例えば問題 1 において，∠HAB の大きさを頂点 H から頂点 E まで点を移動させることによって∠EAB の大きさに帰着して求めた場合には間接的な操作であるといえる．*y* は角の大きさを見た目で知覚的に求めるのか，もしくは何かしらの仮

[1] 筆者の修士論文においては“知覚的”の代わりに“直観的”という語を用いている．本稿ではこれを見た目という知覚によって判断しているものと考え，知覚的という語に修正した．

定から推論し論理的に求めるのかの区別である．論理的とは，中学校の教科書に書いてある性質や定理を用いて，問題に対して不適切な根拠を用いた推論を用いていない場合に論理的であるとする．例えば，問題 1 において∠HAB の角の大きさを求める際に長方形だからという根拠で解答した場合には不適切な根拠を用いた推論である．なぜならば，四角形 ABGH が長方形であることはまだ証明されていない事柄である．よってこの推論が，図の見た目を頼りにした推論であるといえるためである．また，角の大きさを求める際に展開図を用いることも展開図が角の大きさを保存しないため不適切な根拠を用いた推論となる．このような解答は論理的な操作ではなく，半論理的な操作であるとする．一方，面 ADHE と辺 AB からなる直面角が 90°なので∠HAB が 90°や，合同な立方体を複製し問題 1 に与えられた立方体につける場合に平角（直線の角）の半分になるから 90°などの解答は，中学校数学で習う（教科書に乗っている）性質を用いていることで証明することができる程度のものであるため[2], 論理的な操作であるとする．L は図・式・グラフ・言葉などの「表現体系」である．これには，問題で与えられる見取図の他にも，生徒が解答を説明する際などに用いるジェスチャーなどが含まれる．表現によって用いることのできる操作が異なることなどが考察された．Σは「制御構造」であり，操作の選択や解答に対して，それらが正しいと判断する拠り所となるものである．本研究では，空間図形における角についての制御構造には以下の 4 つのものを考えた．

Σ_1：平面角とは，互いに交わる二直線がなす平面上にあってその二直線が作る図形である．

Σ_2：平面角とは，互いに交わる二直線が作る図形である．

Σ_3：平面角とは，与えられた平面上にあって互いに交わる二直線が作る図形である．

Σ_4：三次元空間における角とは，いくつかの幾何学的対象（直線や平面）が作る図形である．対象間に作られる空間的な広がりを示す．

Σ_1 は，平面角を二直線とそれらがなす平面によって捉えるものである．最も一般的な考えであろう．Σ_2 は，Σ_1 と同様に平面角が平面上にあるものと考えるものの，その平面は二直線がなす平面とは限らず，既に与えられた平面と捉える考えである．この考えでは，平面がない場所には角がないと考える．Σ_3 は，平面を含めず，二直線によってのみ平面角を捉える考え方である．Σ_4 は，三次元空間における角を，直線同士のなす角や面同士がなす角などと区別せずに，いくつかの
幾何学的対象が作る空間的な広がりを角と考えるものである．

具体的に問題 1 あれば，Σ_1 の制御構造をもつ生徒は∠HAB を対角線 HA，AB と切断面 ABGH の 3 つの要素によって捉えている（図 3 上図）．また，Σ_2 の制御構造をもつ生徒は HA, AB のみで角を捉え（図 3 中図），Σ_3 の生徒は∠HAB を∠HAE と∠EAB の和として捉える（図 3 下図）．Σ_4 の生徒は明確に角が“この部分”であると指し示すことは困難であろう．そのため，平面角を他の角（二面角

[2] もちろん厳密な証明を行うことは容易ではない．

や直面角）としての捉え，解答すること
が考えられる．

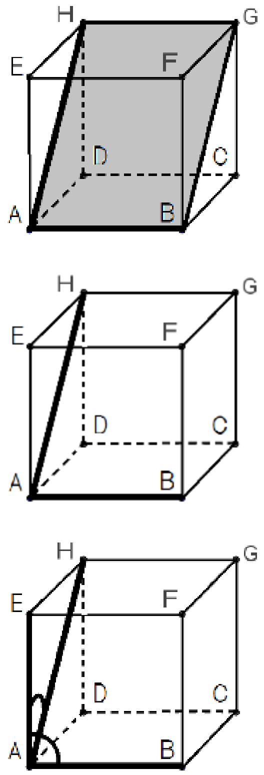


図 3：それぞれの制御構造をもつ生徒が捉える角（上：Σ_1，中：Σ_2 下：Σ_3）

7. 角の捉え方と困難性

本節では，まず角の捉え方と困難性との関係について明確にするために行ったインタビュー調査の概要を示す．次に，調査結果の分析において提案した枠組みをどのように用いたか示す．そこでは，インタビュー調査で得たある生徒Fのデータをもとに，生徒の解答のモデル化を行い，生徒 F がもつ角の性格に起因する困難性を検討した．そして，様々な生徒を分析した結果得られた，それぞれの制御構造をもつ生徒が行った解答の特徴と角の性格に起因する困難性との関係について考察を行う．

(1) インタビュー調査の概要

質問紙による調査で不十分であった生徒が空間における角をどのように捉えているか明確にした上で，角の性格に起因する困難性を明確にするため，インタビュー調査を行った．ここではその概要を示す．

対象・時期：新潟県にある公立中学校第 2 学年（空間図形は既習）の生徒 6 ペア（12 名）に対し，平成 27 年 7 月 16，17 日に実施した．
問題・方法：調査問題は 2 問である．ペアで行い，調査時間は個人で解答する時間 10 分，互いに自分の解答を説明する時間 5 分, インタビューアによる質問 10 分の計 25 分とした．

図形そのものについての困難性を考えるために，質問時にポリドロンによる模型，切断面がわかる紙で作った模型を提示した（図 4）．

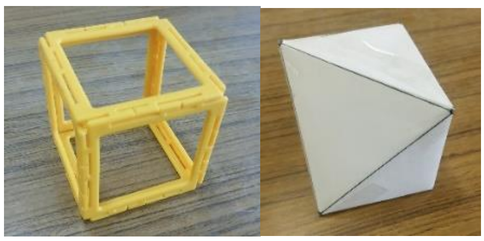


図 4：質問時に提示したポリドロンと紙模型

(2) 枠組みを用いた分析事例（生徒 F）

ここでは，前節において示した枠組みを用いた分析の具体例として，生徒 F の分析結果を示す．生徒 F を取り上げる理由としては，今回の問題を解く上で，生徒Fが空間図形の角について正しい捉え方であるΣ_1の制御構造をもつが，問題 2 に対して誤答を与えているため，これまで先行研究において指摘されたイメージなどの困難性ではない，角の性格に起因する困難性をもつと考察されるため

である．この他の生徒の分析事例については筆者の修士論文を参照いただきたい．

生徒 F は，問題 1 と問題 2 について個人で 10 分程度考え解答を導いた．問題 1 に対して生徒 F は正答である∠HAB＝90°とし，問題 2 に対しては∠HAF＝90°と解答していた．

生徒 F は，問題 1 では，対角線 BG を引くことによって切断面 ABGH を考えた．その上で，切断面にできる図形が長方形もしくは正方形であることから，∠HAB が 90°であると解答した（No.12）．表現システム (L) がポリドロンである場面では，「90°より大きい気がするなど」見た目という要素に解答を揺り動かされている場面もあったが，解答を変更することはなかった．

12　F　F はここ（BG）あるじゃん．ここにも対角線引くとすると，そしたらさ長方形できる，正方形？

生徒 F は対角線 BG を引くことによって切断面 ABGH を作り, その切断面にできる図形が長方形であることから∠HAB が 90°であると生徒 E[3]に説明していた．このことから，この生徒 F の操作・規則は R (直接的，半論理的)であると判断した．直接的である根拠は，切断面を考えることで, 他の角に帰着させず∠HAB を求めているためである．また，半論理的である理由は，切断面にできる図形の性質から∠HAB の大きさを求めるという論理的な操作をする．一方で，四角形だから 90°と述べており，その図形がどんな四角形であるかについての根拠は，立方体の性質などではなく直観的であるためである．生徒 F は角について No12 にあるように切断面を用いて捉えている．これは，角について二直線と平面によって捉えているといえる．このことは，表現システム（L）がポリドロンである際に，紙を用いて角について考えていることからもわかる（図5）．

図 5：生徒 F の角についての表現

このことから生徒 F は，Σ_1 の制御構造をもつと判断できる．角についての正しい捉え方であるといえるΣ_1の制御構造をもつ生徒 F の問題 1 に対する考え方はコンセプションを用いて次のようにモデル化された（表 2）．ここでは，問題 1 についてモデル化を行ったが，生徒 F は問題 2 においても同様の制御構造であると判断でき，ほぼ同様のモデル化を行うことができたためここでは省略する．

表 2：生徒 F のコンセプション

P	問題の立方体において∠HAB の大きさを求める
R	切断面を考え，平面角 (∠HAB) の大きさを求める（直接的） 切断面の図形から角の大きさを求める（半論理的）
L	見取図，ポリドロン，紙の切れ端
Σ	Σ_1 : 平面角とは，互いに交わる二直線がなす平面上にあってその二直線が作る図形である

このようにモデル化した角について

[3] 生徒 F のペアの生徒が生徒 E である

の考え方や捉え方をもとに，Σ_1の制御構造をもつ生徒に対して存在する，角の性格に起因する困難性がどのようなものであるか考察を行った．

生徒Fは問題2に説明する際にも紙を用いた表現を使い，∠HAF＝90°と解答していた(図6)．この解答から生徒Fの誤答の要因は，平面の作り方であるといえる．つまり，角を正しく捉えていたとしても，角の大きさを帰着させるための平面を作ることに困難性があるといえる．また，生徒Fが紙の切れ端という表現を用いたのは，制御構造が角の制御構造Σ_1を持ち，角を平面と二直線によって捉えているためであろう．つまり，制御構造は解答を説明する際の表現システムにも影響を与えることがわかる．


図6：生徒Fが考えた∠HAF

（3）それぞれの制御構造をもつ生徒の特徴

ここでは，先ほど述べたΣ_1以外の制御構造をもつ生徒の解答にどのような特徴があるか検討した．また，生徒の解答と角の性格に起因する困難性との関係について述べる．

角が二直線によって作られる部分であると捉える制御構造（Σ_2）を持っていたと分析された生徒は，角を何かしらの部分に帰着させ，角の大きさを求めていた．例えば，問題2において，∠HAFを立方体の側面と側面（ADHEとABFE）の二面角に帰着させて90°と求めるなどの解答である．つまり，Σ_2の制御構造では，帰着させた角（平面角とは限らない）によって解答が異なることが特徴である．これは，空間図形において帰着させる角によって二直線の間にある部分の大きさが異なるという性格に起因した困難性である．

Σ_3の制御構造をもつ生徒の解答では，面を与えた場所によって解答が異なることが特定できた．問題2において生徒が対角線HA，AFの間に面がない，と考えていれば，問題2において見取図では，与えられている面は立方体の側面である．つまり，この制御構造をもつ生徒にとって，∠HAFは側面に存在している角である．この生徒が∠HAEと∠FAEを足し合わせて90°と解答することは自然な解答であるといえる．これは角の大きさを求める際には帰着させる平面を様々な条件を考慮に入れて定めなければならないという，角の性格に起因する困難性といえる．

Σ_4の制御構造をもつ生徒は，そもそもどの部分が角なのか，どのようにその大きさを求めるか，明確にすることができなかった．この制御構造をもつ生徒の特徴は他人の解答に左右されやすいことである．それぞれの操作を空間図形の何かしらの部分を求めていると捉え，その妥当性を判断するためであるといえる．

以上の分析から，生徒が様々な制御構造をもつことがわかった．これは，生徒が空間図形の角を正しく捉えることが困難であるということを示している．そして，このことは空間における角の多様性に起因する．また，角を正しく捉えたとしても，角の大きさを求める際に様々な条件を考慮に入れなければならないという角の性格は，困難性の要因となっていると考えられる．

8. 考察

以下の2つの疑問に対して前節までの分析をもとに考察を行う．

・三次元空間における角にはいかなる困難性があるか

・角の性格に起因する困難性は生徒にどのような影響を与えているか

まず，三次元空間における角にはどのような困難性があるかである．この回答には次の2つを示す．一つは，空間図形における角には平面角，二面角，直面角，立体角など多様な角が存在している．そのそれぞれの角を区別し，問題で問われている角がどの角であるか正しく捉えることに困難性があるといえる．これは，空間図形における角の多様性に起因する困難性である．このような困難性は，実際に空間図形の角についての問題を解く際に生徒が誤答を与える要因となりうる．平面角の大きさを問う問題において二面角の大きさを解答すれば，多くの場合誤答となるであろう．実際に，Σ_2の制御構造をもつ生徒は，問題2において平面角である∠HAF を二面角（面ADHE と面 ABFE との間にできる角）と捉えたために 90° と誤答を与えていた．このように，空間図形の角についての問題では，数学的な性質を用いて推論する前段階ですでに誤答となっていることも少なくない．

二つ目は，三次元空間における角は，問われている角を正しく捉えたとしても，その大きさを求めることは容易ではないことである．例えば，二面角は2つの面の交線との垂直関係を考慮した二直線がなす平面角に帰着させ，その大きさを求めなければならない．また，平面角であっても，平面角をなす二直線（問題2ならば HA と AF）によって作られる平面によってその大きさを捉えなければならない．これは，角の性格である“角の大きさを求める際の複雑さ”に起因する困難性であるといえる．このことが生徒にとっての困難性でもあることは，Σ_1の制御構造をもつ生徒Fが問題2に対して誤答を与えていることからいえる．つまり，解答するためにいくつもの段階を踏まなければならないことは，学習する上での困難性となる．

では，上述の角の性格に起因する困難性は，生徒にどのような影響を与えるだろうか．一つは，角の多様性によって，生徒が様々な制御構造をもつ可能性があることである．これは，4つの制御構造の内，生徒がどのΣをもつ可能性もあるということである．実際に，4つすべての制御構造をもつ生徒が見られた．生徒がもつ制御構造によって，解答を導く際に行う操作に対して，生徒自らが行う妥当性の判断も異なる．つまり，制御構造によっては誤答に対しても正しいと考える生徒がいる．これは，生徒が角の学習をする際の困難性といえるだろう．もう一つは，表現によって与えられた平面が異なると，生徒が行うことができる操作も異なるということである．これは空間における角の大きさが平面角に帰着させて定められていることが要因である．この性質は生徒が角について学習する際の障害となりうる．例えば，生徒が解答を変化させた際に，空間図形の角を理解したからこそ解答を変更したのではなく，表現に限定されたからこそ解答が変化した可能性があるということである．つまり，与えられる平面によって解答を出せる場合と出せない場合があるということである．このように，よくわからないがとりあえず解答は出せ

るということは，生徒が空間図形の角について理解したつもりにさせる可能性があり，生徒の角についての理解を妨げる一つの要因となりうる．帰着させる平面によって，その大きさが異なることは，空間図形の角だからこそのものであり，空間図形の角を複雑でよくわからないものであると考える生徒が多い要因である．

9. おわりに

ここでは，困難性の考察をもとに教育への示唆と今後の課題について示す．筆者が示す教育への示唆は次の2点である．一つは, 空間図形などの複雑な図形にこそ様々な性質を数学的証明していく必要があり, 数学的な見方や考え方を育てるためにも, 空間図形において図形の性質などを用いて推論することが必要となるだろうということ．もう一つは，教師が生徒の認識に合わせた指導を行う必要があることである．つまり，生徒が正答を導くことだけでなく, 角の性質についてどのように理解しているかを考える必要があるということである．

今後の課題は次の3点であると考える．生徒の制御構造の変化はどのような要因によって変化するか検討すること．図形の性質などを用いた上で，生徒にとって理解しやすい方法で，生徒の空間図形学習の困難性の克服のための実践にはどのようなものが考えられるか検討すること．角以外の空間図形の性格に起因する困難性について検討することである．

参考・引用文献

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002) "Students conceptions: an introduction to a formal characterization." *Cahier Leipniz*, vol.65.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 575-593.

影山和也 (1998). 「空間的思考の階層性に関する考察.」 数学教育論文発表会論文集，第 31 巻, 63-68.

熊倉啓之，中西知真紀，八田弘恵，国宗進 (2002).「空間図形についての理解に関する研究」．数学教育論文発表会論文集，第 35 巻, 289-294.

久米康子，村上一三 (1997). 「立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察: 立方体を例として」. 数学教育論文発表会論文集，第 30 巻, .331-336.

国立教育政策研究所 (2012). 平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書 http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/04chuu_houkokusho.htm 2015/07/30 確認.

中村幸四郎他 訳・解説 (1996). ユークリッド原論 縮刷版. 共立出版

三ツ間伸太朗 (2015). 「空間図形領域における学習の困難性についての一考察 ～角そのものの性格に焦点を当てて～」. 上越数学教育研究第 30 号, 93 - 100.

三ツ間伸太朗，宮川健 (2015). 「三次元空間における角についての中学生のコンセプション」. 日本数学教育学会第 48 回秋季研究大会発表集, 261-262.