上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.1-12.

中学校３年生により考案された関数の活用の事例
ーその特徴と生徒のもつ関数のイメージー

布川　和彦　　　　　　杉本　知之
上越教育大学　上越教育大学附属中学校

１．はじめに

関数の学習において、学習や探究の対象として関数がとらえられるようになるには、単元を通して整合的な語り方が大切になると考えられる (布川, 2014*a*; Nunokawa, 2015)。一貫した語り方の継続により、関数がどのようなものかのイメージが構成されると考えられるからである。したがって、単元の最後における関数の活用についての学習も、関数とは何かを確認し、その理解をさらに深めるための機会となる必要がある。しかし、中学校の数学においては、使える関数の種類が限られたり、扱える場面が限られることもあり、他の単元に比べて、関数がどのように利用されているかが判別しにくい場合のあることも指摘されており (布川, 2014*b*)、関数の活用の学習については、単元全体の整合性という点からも検討の余地があると考えられる。

ところで布川と杉本 (2015)は、１次関数の単元の途中で行われた、１次関数とはどのようなものかを生徒たちに自由にまとめさせる活動を分析し、生徒たちの持つ関数のイメージの一端を見いだしており、そこから生徒たちの理解に応じた指導の示唆を得ている。同様に考えると、関数の活用についての活動を考えるにあたっても、生徒たちに活用の仕方を考えてもらうことで、生徒たちが持っている関数に対するイメージ、あるいは関数と現実的な場面の関わり方についてのイメージを見いだすことが期待される。

そこで本稿では、教科書のような与えられた活用場面における生徒の解決ではなく、生徒たち自身が関数の活用を考えるような授業において彼らが考案した活用の仕方を調べることを通して、生徒たちの上述のようなイメージをとらえることを目的とする。

２．授業の概要

本稿で対象とする授業は、中学校３年生１クラスに対し平成 27 年 9 月 16 日より 10 月 14 日まで行われた 14 時間である。２乗に比例する関数の授業はすでに終えていた。このうち第 2～14 時までの 13 時間を、観察者が１台のビデオカメラを手に持ち記録した。

最初に、自分の悩みも考慮しながら、関数を使うとこんないいことがあるとか、日常で疑問に思っていることを関数で分析できるなど、関数の活用を提案してほしいとの課題が提示された。第 2 時に班で考えを共有した後、1 つのテーマにしぼり、班ごとに提案を作り上げていった。途中で教師による相談会を行い、また発表の準備、予行演習なども経た上で、第 12～14 時で班ごとに提案についての発表を行った。

３．発表された関数の活用

本節では第 12～14 時間目に各グループから発表された内容の概略を、授業での発表順に記述する。ただし、第３班による発表は確率を中心としたものであり、関数との直接的

な関わりが見えにくいことから、本稿では取り上げないこととする。

(1) ６班

ある町の環境問題（自動車の排気ガス）を話題とし、２軒のガソリンスタンドの価格設定を比較した。一方のスタンド・サルオスは値段が入れたガソリンの量に比例し式は y=240x であり、もう一方のスタンド・ゴリオスは２次関数に基づき、式は y=30x^2 であるとの設定を提示し、どちらがお得かを問題とした。その後、２つのスタンドについて x が 1 L から 12 L まで 1 L ずつ増える表を提示した上で次のことを説明した：1 L ではゴリオスが安いが、9 L からはゴリオスが高くなっている；サルオスは比例関係なので 1 L 増えたとき上がる値段は一定であるが、ゴリオスでは 1 L 増えるごとに上がる値段が高くなっていく。そこから、「一度に多く入れたい場合はサルオスの方がお得」「少ないガソリンで行ける距離だという人にはゴリオスがお得」と結論を述べた。

さらに「燃費のよさも考える」として、車が軽い方が燃費がよいと聞いたことがあるので、ガソリンを入れる量が少なければ軽くなり、燃費がよく環境にも優しいとして、少なくてよいならゴリオスの方がお得だから、ゴリオスで入れる方がよいと結論づけた。

最後に両者のメリットとデメリットを比較した。比例関係のメリットはたくさん入れたときにお得なこと、入れたときの値段がわかりやすいこと、デメリットはお得にしようとしてたくさん入れると燃費が悪くなり、環境に悪いことだと述べた。２乗に比例する関数のメリットは少ない量のときにお得なこと、入れる量が少ないと燃費がよく環境にもよいこと、デメリットは「入れたときの量で値段[の上がり方]が変わるので、値段がわかりにくいということ」だとまとめた。

発表後に生徒からは質問が出なかったが、教師が本当にゴリオスでよいと思うかとクラスに尋ねると、1 L は少なすぎて走れないのではないか、ガソリンが尽きようとしている状態で 1 L しか入れないということはないのではないかといった疑問が出された。これに対し発表者からはなくなる前にこまめに入れていけばよいとの反論がなされたが、1 L ずつこまめに入れると、皆がガソリンスタンドに行くために無駄な走行がなされ、環境に悪影響が出るとの指摘が出された。

事後に感想を求めると、１人の生徒は比例の方が同じように上がっていくので得した気になると答え、もう１人の生徒は自分なら 1 L ずつこまめに入れると答えた。

(2) ５班

下校時に途中の信号で停まらずに駅まで着くことのできる歩行の速さを考えた。そのために、５箇所の歩行者用信号について信号が変わるタイミングを自分たちで調べて記録したものを、表にまとめて提示した。さらに、「パッと見てわからないので、とりあえずグラフにしてみました」として、図 1 のようなグラフを提示した。ただし、図 1 は生徒によるグラフを、見やすいように簡略化したものである。縦軸の信号の位置に当たる高さに断

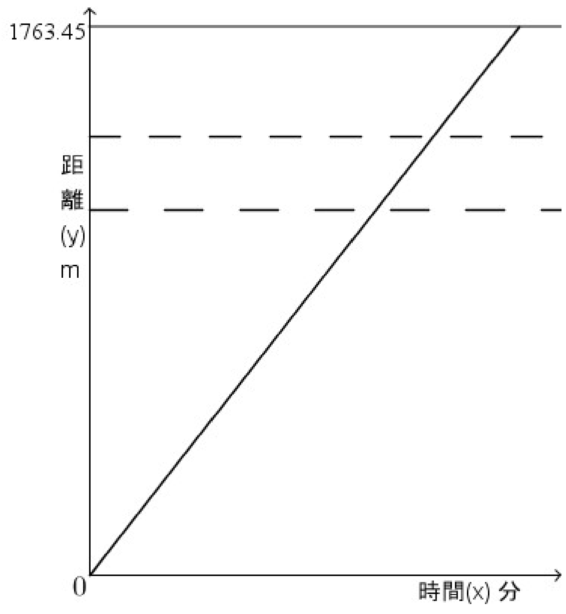

図 1: 信号の状態と歩行の様子

続的な横線が引かれているが、線の部分が赤信号のとき、線のない部分が青信号のときを表している。一番上の横線は目的地である駅の位置を表す。また、原点を通る直線は、一定の速さで歩いたと仮定したときの歩行の様子を表す。したがって、図 1 のように歩行を表す直線が信号を表す線分と交わらないときは、赤信号で停止せずに駅まで行けることを表すことになる。

発表者は、駅までが 1763.45m であることから、到着までの時間が 20 分前後となり、かつ信号の線分と交わらない直線として、17 分かかる場合と 22 分かかる場合の 2 本を見出したことを報告した。またそれらの直線の式を y=104x と y=80x と求め、分速何 m かが a になるので、前者は分速 104 m、後者は分速 80 m になると述べた。

その後、信号の表に戻り、「関数だけだとうまく、ぴったりいかないので、応用編ということで」と断った上で、２番目と３番目の信号が変わるタイミングから、信号間の距離 98 m を 1 分以上かけて歩いても３番目が赤になる前に渡れることを示した。３番目と４番目の信号についても同様の検討を行い、発表を終えた。

事後には、なぜそんなにあせる必要があるのかとの意見とともに、関数はどこに出てきたのかとの質問が出た。発表者はグラフを提示し、これが関数だとした。同じ生徒がこの速さなら信号が全部大丈夫なのか確認すると速さとしてはそうだが、信号の変わる時間が毎日変わると答えた。さらに直線が赤信号の線にかかっている部分があるとの指摘が出ると、発表者もこれを認めた上で、「これぐらいなら小走りすれば間に合う」とした。

なお観察者の近くの生徒のシートには次のような感想が残されていた：「関数は活用してはいたけど、それがうまく見えない気がした。でも難しいことをしているなと思った」。

(3) １班

入場者の少ないスキー場について、料金設定の工夫により入場者数を増やすという提案を発表した。従来の料金は 1 日券が 1 人 3000 円であったとし、これに対し新たな料金では何人でも一律の入場料として 3000 円を新設して、その代わり 1 日券を 1 人 2000 円にすると提示をした。また、それぞれの料金設定について、x を人数、y を合計料金としたときの式をそれぞれ y=3000x、 y=(3000÷x)+2000x [ママ] と説明し、「１人あたりの値段」のグラフだとして以下のようなグラフを提示した。

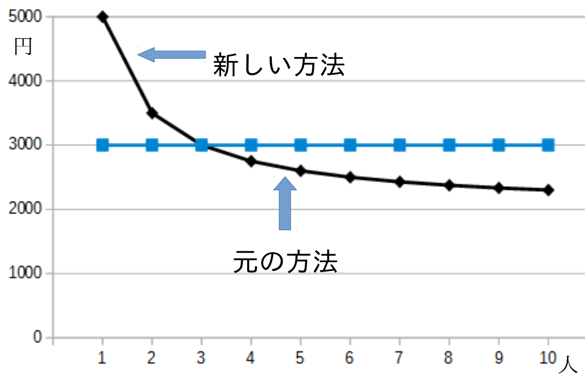

図 2: ２つの方法による１人あたりの料金

縦軸は１人当たりの値段、横軸は来場者数を表すとした。そして、新たな料金設定により、団体で来る方が得になり、団体で来る人が増えるので、売り上げも伸びると説明した。

次に、売り上げを y、来場者数を x としたときのグラフを提示した。従来の料金のときを y=3000x のグラフで、新しい料金設定のときを y=2000x+3000 のグラフで表していた。ここで、来場者が昼食代として 1000 円を使うとの設定を追加し、それぞれの式を y=4000x と y=3000x+3000 に変えたグラフ(図３)も提示した。ある人数以降では後者のグラフが前者のグラフの下に来ることから、新しい方法だと減少しているように見えるが、実際は来場者数自体が増えるとして、グラフの右側の部分を指しながら、新しい方法の方が売り上げが伸びると説明した。さらにスキー道具をレン

タルする人、宿泊する人もいるので売り上げはもっと上がるかもしれないと結論した。

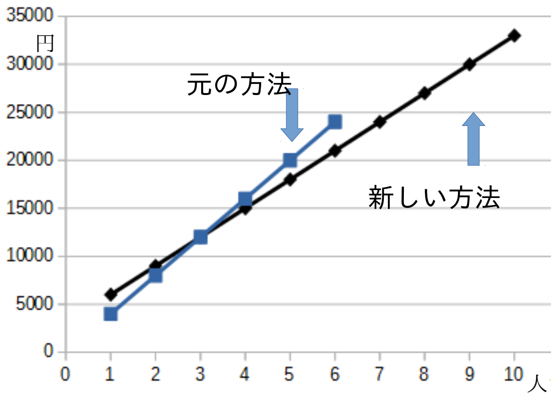

図３：２つの方法による売り上げ

事後の質疑では、料金の求め方の式が話題になり、この式にした理由が発表者より次のように説明された:「入場者が何人だとしても入場料が変わらないようにしたので、例えば 10 人で来たら 1 人 300 円で入れる」。また教師が 1 班の作成過程に関わり、次のように補足した：最初は比例による設定と 1 次関数による「会員制」のような設定にしようとしたが、それだと「つまらない」「提案しても面白くない」と言い始めた；反比例にすることも考えたが 1 人でも 2 万円、10 人でも 2 万円とすると、100 人でも 2 万円となってしまい、スキー場はやっていけないとの結論になった；「急激に下がるのではなく緩やかにお得感を作る」ことを考えて、先の式になり、これは提案する価値があるとなった。

ただし式の不備についてはこの時間には話題にならず、次時冒頭で補足された。

(4) ９班

平均観客動員数が減少しているサッカースタジアムの問題を取り上げた。従来の料金設定が 1 人 1000 円であると仮定し、これよりも観客動員数を増やして利益を増やす仕組みに変えたい経営者が、従業員に案を求めたという設定を提示した。

１つの案として、現在が比例なので反比例にするという案を考え、y=12000/x の式とそのグラフを提示した。そして 1 人あたりの料金は減るが、合計の売り上げは 12000 円のままなので「反比例では動員数は増えるが利益は出ないことがわかりました」と説明した。

１人の従業員が $y=ax^2$ にしたらどうかとの提案をしたとして、$y=1000x^2$ のグラフと表を提示した。x が人数、y が「合計金額」だとして、「比例のときと比べて、1 人のときの値段は一緒だけど、10 人になると値段が 10 倍になります」「なので、お客さんがこっちのやつ[表の x=9 や x=10 の部分を指す]を選んでくれたら、すごく儲かります」「だけど現実的に考えるとたぶんみんなこっち側[表の x=1 のあたりを指す]を選ぶ」「なので人数が全然集まらなくて結局は経営難に陥ることがわかりました」と説明した。

次に x が大きくなると増え方が緩やかになる曲線と放物線を板書し(図４)、前者ならどうなるかと問いかけた。そしてこの曲線を式にしようとして $y=1000\sqrt{10x}$ となったことを説明した。

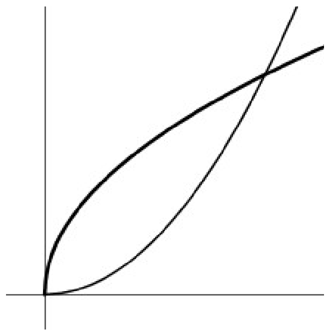

図４：放物線と新しい曲線

曲線がなぜこう膨らむのかを説明するとして、x=0, 1, 2, 3, のときの $y=\sqrt{x}$ の値を板書し、そこに y の増加量を書き加えた。そして増加量が減っているので、最初は急に増えるが、増え方がだんだん緩やかになりふくらんだ曲線になるとした。

上の式により合計金額の表を示した。1 人だと 3162 円で高いが 10 人だと合計が 10000 となり、皆 10 人の方を買うこと、他方で 10 人だと合計金額は従来の料金設定と一緒になるので、経営者側の儲けもあり、人数も増え

るので、この式を採用することを説明した。

事後に教師が、最後の式は、最初 $y^2=x$ と書いてあったこと、放物線を「寝かせた」形から発想したことを補足した。また、$y=\sqrt{x}$ の式を使うと２人のとき合計金額は 1.4 倍だから１人当たりでは 0.7 倍位となること、人数が増えると１人当たりは減る一方で、合計金額は増えることを説明した。

(5) ８班

「指揮の式」として、見やすい指揮の仕方を考えた。「[あこがれの指揮者の]指揮はボールの落下のように、$y=ax^2$ になっていた」ので「指揮はグラフで説明できる」として、下の２つのグラフを提示した。

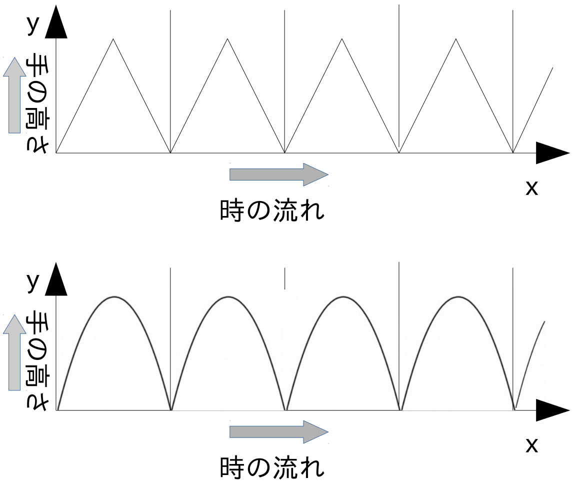

図５：１次関数と２乗に比例する関数の指揮

１番目のグラフだと拍の頭がわかりにくいこと、「これを $y=ax^2$ の式で作ると、拍の頭がよりわかりやすくなる」ことを説明した。

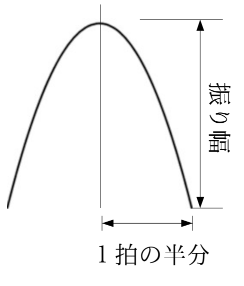

図６：放物線の解釈

さらに、グラフから式を作ることを説明した。上の曲線が $y=ax^2$ の放物線の一部であるとし、頂点部分から最下部までの放物線の半分が１拍の半分に当たるとして、それは「１拍の半分＝60÷曲のテンポ÷2」で求まるとした。また、横軸から頂点までの高さは「指揮のふり幅＝そのひとのあごからへそまで」に当たるとした(図６)。演奏会の合唱で指揮をする人について実測をして振り幅を 4/10 m と求め、実際に歌う曲から１拍の半分が 1/4 秒であるとした。

そこから $4/10=a \cdot 1/16$、$a=6.4$ と求め、その指揮者の指揮の式は $y=6.4x^2$ だとした。自由落下は $y=5x^2$ だと授業でやったが、それより少し速くなるとして、発表を終えた。質疑の時間はとれなかった。

(7) ２班

店のポイントのつけ方をとりあげ、１次関数によりポイントをつける店に比べて、２乗に比例する関数でポイントをつける店の方が客がお得感を感じているという寸劇を行った。

x を金額から端数を切り捨てた数÷1000、y をもらえるポイント数とし、$x=1$ から $x=6$ までの $y=x^2$ の表と $y=10x$ の表を提示した。そして、3000 円の場合について前者では 9 ポイントになるが後者では 30 ポイントになることを示した。同様に $x=14$ から $x=20$ までの表も提示し、17000 円の場合、前者では 289 ポイントになるのに対し、後者では 170 ポイントになることを示し、「１万円を過ぎたところから大幅に差が開いている」と説明した。

「小さい買い物(雑貨屋 etc)→一次関数を利用したポイントカード」「大きい買い物(家具屋 etc)→二次比例関数を利用したポイントカード」というスライドを示し、ホームセンターは大きい買い物をする人が多く自然と売り上げも伸びるので、２乗に比例する関数によるポイントカードにした方がよいとした。

教師は階段関数のグラフをかき、通常のポイントシステムは 100 円で１ポイントなのでグラフはこうなるが、式は難しいので上の式にしたと説明するとよかったとコメントした。

(8) ４班

JR の料金表だとする表を提示した[1)]。それ

をもとに、3 km までは 140 円なので、3 km 2回で行くと 280 円だが、6 km 1回だと 190 円ですむとし、下のグラフを提示した。

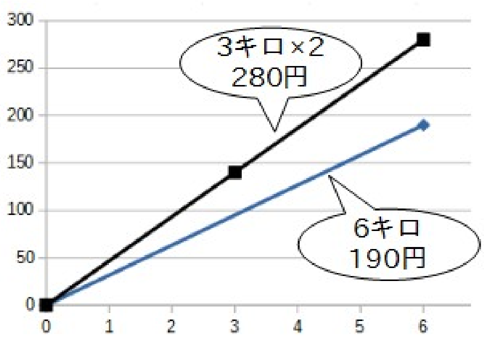

図７：２回に分けて乗る場合との比較

次に逆転する例として、30 km 1回で行くと 500 円かかるが、15 km を 2 回で行くと 240×2 = 480 円ですむことを紹介し、そのグラフを提示した。そして「分割して買った方が安くなることがわかる」と説明した。

他にも 50 km 1回は 840 円だが 25 km 2回だと 410×2 = 820 円であること、280 km 1回は 4750 円だが 40 km7 回だと 670×7 = 4690 円になる等の例を示した。そして 1 年間続けると 20×365 = 7300、60×365 = 21900 円それぞれお得になるという結果を説明した。

質疑で「関数ってどれですか」との質問が出ると、発表者は「関数に結びつけるのが難しかった」ことを認め、合計の値段を y、切符を買う枚数を x としてグラフに表すと、「枚数が増えると比例っぽく増えて行くかなと思ってむりやり関数にしてみました」と答えた。別の生徒が切符を 2 枚買うとき一度降りてから買わないといけないと指摘し、発表者も認めた。すると「そしたら電車行っちゃうじゃん」との意見が出されたが、発表者は「それは時間に依る」と反論した。

最初に質問した生徒が「関数って一方も決まるともう一方も決まるってやつだと思うんですけど、枚数も決まってないし、値段もバラバラなので関数ではないと思います」と指摘すると、発表者は「ごめんなさい」と言い反論しなかった。教師はグラフを使ったり運賃システムが表になっていて、それ自体は関数だとサポートした。他方で、主張自体は関数とあまり関係がないと指摘し、身のまわりのものが関数として捉えられ、それを調べていったらこうした事実がわかったという発表であったとまとめた。

なおこの班は最初、ボールペンのバネの部分でものを飛ばす場面を考え、バネの本数と飛ぶ距離の関係について実験もしていた。しかし、バネが３つしかペンに入らないことがわかり、テーマを変えたと教師が補足した。

(9) ７班

「おいしいゆでたまごの作り方」をテーマとし、卵の初期温度を決めるとゆで時間ごとの状態を表示してくれるシミュレーターのホームページを用いた実験を報告した。

沸騰したお湯からゆでたときのグラフとして y=(1/10)x+10 という式とグラフを提示し、y 軸は冷蔵庫から出したときの卵の温度、x 軸はゆで具合がミディアムになるまでにかかった時間と説明した。そして「卵のゆで時間と黄身の堅さは 1 次関数で表すことができる」こと、「水からゆでると沸騰するまでの時間があるので」多く時間がかかること、「殻がくっついてとれにくいので、お湯で沸騰した後 15 分間火を止めて卵をゆでるのがいい」ことがわかったと報告した。

発表後、グラフの意味について説明を求める意見が出されたが、クラスとして理解には至らなかった。卵の初期温度が高い方がゆで時間は短くなると考えられるので[2)]、y=(1/10)x+10 という式はそれに合わないが、そうした不備も話題にならなかった。

なお、生徒たちは当初、ゆで時間と黄身や白身の温度の関係を調べていたが、実験をすることができず方針を変えた。その後、卵の重さや初期温度からゆで時間を産出する式をインターネット上で見つけたものの、その式

が対数関数をもとにしていることから理解が難しく、その結果、上のシミュレーターを利用した探究に移行することになった[3)]。

(10) １０班

小遣いをアップさせるとして、「1 日目に 1 円もらい、2 日目に 2 円もらうというように、毎日お小遣いを倍にしてもらうという方法」を提示した。4 日目、10 日目、13 日目、14 日目、20 日目を図で示し、20 日目では 524,283 円[ママ]になると述べた。急に増えることの「理由はグラフを見ればわかる」として、図８のグラフを提示した。

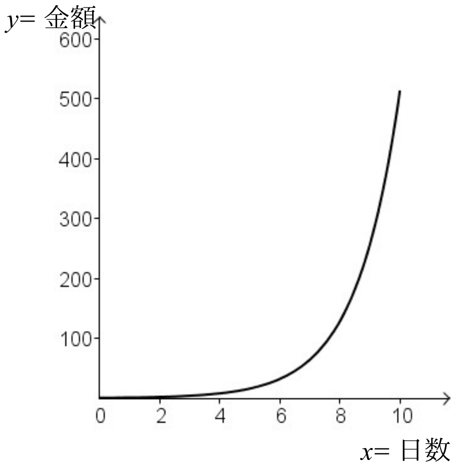

図８：倍々に増えるときのお小遣い

さらに「1 円を倍にするのと 10 円を倍にするのではわけが違う」「1 円を倍にしても 1 円しか増えないが、10 円を倍にすると 10 円増える」「２倍にされる数が増える。512 円から 512 円増える」と説明し、もらえる金額と合計を表にしたものを提示した。

x:日数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y:金額	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
合計	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

これを式で表すと $y=2^{(x-1)}$ になるとして式を示し、なぜこの式になるかを表を用いて説明した。似たようなエピソードとしてドラえもんのバイバインの話、曽呂利新左衛門の話を紹介した。

生徒から質問は出なかった。教師は $y=2^{(x-1)}$ と $y=x^2$ とでは、形は似ているが、どっちが「強い」かという問いを提起した。

４．生徒による関数の活用の特徴

本節では生徒による関数の活用について、その特徴を抽出する。そうした特徴は、生徒たちのもつ関数のイメージを反映しているとも考えられる (布川と杉本, 2015)。

(1) 関数の値の変化の仕方に着目した選択

中学生による活用ということもあり、いくつかの班では比例と２乗に比例する関数とを対比する形で用いていた。これらの関数を選択した意図は、２乗に比例する関数を用いることで、x の値が大きくなるほど y の増加の速さが速くなるという効果を利用したり、x の値により比例と２乗に比例する関数の大小が逆転するという効果を用いたいというものであった。また、x の値が大きくなるほど y の値が緩やかに減少するという効果をねらう場合には、反比例を選択していた。

このように、生徒たちは関数の変化の仕方を考慮し、自分の希望する変化の仕方に合った関数を選択していた。

６班は、２つのガソリンスタンドの価格設定を比例 ($y=240x$) と２乗に比例する関数 ($y=30x^2$) を用いて設定した。これにより、入れる量が少ない時は２乗に比例する関数に基づく値段の方が安いが、入れる量が多くなると値段が逆転するという設定を作り出した。その上で、ガソリンが少ないと燃料も含めた重量が軽くなるので燃費が良くなるとして、入れる量と環境の接点を作り、２つの価格設定と環境という価値観とを結びつけた。逆に言えば、入れる量により値段の関係が逆転するような設定にするために、２種類の関数を利用していると考えられる。

９班はスタジアムの入場料を $y=1000x$ という比例に基づく設定から、一旦 $y=1000x^2$ に変えている。これは利益を増やすという目的のために、x の値が増えたときに速く増加する

関数を選択したものと言える。

２班のポイントカードの設定でも、２乗に比例する関数による設定を提案し、１次関数によりポイントをつける店よりも客がお得感を感じやすいとした。また２つを比較する際には $y=x$ ではなく $y=10x$ を用い、これと $y=x^2$ とでポイントのつき方を比較している。比例定数をうまく選ぶことで、増加の速さを調整したものと考えられる。これにより、$x=10$ でポイント数が逆転し、$x=10$ からはポイントのつき方に「大幅に差が開く」状況を作り出した。そこから客単価の大きい店では２乗に比例したポイントにすると売り上げが伸びると述べており、客単価に応じてお得感を感じやすいポイントのつけ方を、関数の増加の速さの違いをもとに作り出している。

２乗に比例する関数を利用しながらも、８班の指揮の場面への活用では、変化の割合が変化するという２乗に比例する関数自身の特徴を利用していた。２乗に比例する関数における頂点の付近と頂点から離れた場所での変化の割合の違いを利用し、変化の速さが速い後者が拍の頭にくるようにすることで、拍の頭を明確化しようとしていた。１次関数をもとにした動きでは、変化の割合が一定であるために、拍の頭という特別な点が見にくいとも考えていた。これらも関数の変化の特徴に着目した活用と言えよう。

１班は、入場料を何人でも一律 3000 円と設定し、同時に１日券の料金を 2000 円に下げることで、総売り上げを $y=2000x+3000$ という１次関数となるようにした。発表時には式を誤って提示したが、その後に示したグラフでは上の１次関数が表されていた。それにより x の値が小さいときは従来の $y=3000x$ よりも割高になるとともに、料金の増え方を緩やかにすることで、x の値が大きいところでは料金が逆転する設定を作り出した。比例と１次関数とではあるが、増加の速さの違いを利用して異なる価格設定を作り出した。

さらに１班は、昼食代 1000 円という条件を追加設定することで、従来の料金設定での売り上げを $y=4000x$ へ、新たな料金設定での売り上げを $y=3000x+3000$ へと修正したグラフも提示した。これは、１次関数の人数に比例して増える部分について、その傾きをより大きくすることで、人数が増えたときの効果がでやすくなるような修正と言える。つまり自分たちの主張の妥当性を高めるように、変化の仕方の調整を行ったものと考えられる。

なお、入場料だけを見ると１人当たりの入場料負担額は反比例になっているが、これについては教師からの補足の中で「急激に下がるのではなく緩やかにお得感を作る」ための工夫であったことが紹介されていた。したがって、反比例の利用も、その変化の仕方の特徴に基づいて選択されたものであった。

(2) 期待する変化に応じた関数の開発

前項で見たように、生徒たちは学習した関数について変化の仕方に目を向け、自分たちの設定に合った関数を選択して、活用していた。しかし今回の活動においては、希望する変化の仕方はあるものの、それに合った関数が未習であるために選べないという場合も見られた。その際には、生徒たちは希望する変化にふさわしい関数を自ら開発していた。

上で見た１班の場合も、１人当たりの負担額を見ると、図２のグラフに見られるように $y=3000/x+2000$ という関数に従う。こうした反比例に定数項を加えた関数は未習のものである。人数が増えると得になるが、極端に安くはならない料金設定をしようとして、こうした関数やグラフになったと考えられる。上でも触れた教師の補足によると、当初は１人あたりの料金を反比例として設定しようとしたが、そうなると１人でも 100 人でも売り上げは同じとなり、利益が得にくいことから、「急激に下がるのではなく、緩やかにお得感を作る」ことを考えたとされる。つまり、グ

ループの人数が多くなると１人あたりの料金は下がるが、一定金額以下にはならないという変化を希望し、そこから上の関数を開発したものと考えられる。

９班は $y=1000\sqrt{10x}$ という関数を開発していた。これは、２乗に比例する関数だと多人数で入場するほど料金が増加しすぎるので、多人数ほど料金の増加が緩やかになる曲線を描いたことがもとになっていた。「この関数の式は誰も知りませんでした」が、最終的にはそれを $y=1000\sqrt{10x}$ と定式化した。このとき生徒は $y=\sqrt{x}$ の値と増加量を板書し、増加量が減っているので、増え方が緩やかになりグラフがふくらんだ曲線となることを説明しており、開発した関数に一定の理解も見せていた。また教師からの補足では、生徒たちが最初、$y=x^2$ のグラフを 90°回転させると希望するような曲線が得られると考え、そこから $y^2=x$ と書いていたともされており、彼らが既習事項をもとに新たな関数を開発したこともうかがえる。

これに対し、１０班は速く増加する変化を希望し、指数関数を開発した。これはマンガや昔の人の話に見られる、倍にしていくことで途中から急激に増加するという変化を利用しようとして、当初はその結果を表に表していたが、それを何とか式にしようとして上の結果を得ている。つまり、最初はそれほど増えなくても、途中から増加量が大きくなるような変化を求め、その結果として指数関数を自分たちで開発したものと思われる。生徒たちは増加量が大きくなることと倍にする操作を関連付け、「1 円を倍にしても 1 円しか増えないが、10 円を倍にすると 10 円増え」、512 円を倍にすると 512 円増えると説明しており、関数の特徴と増加量の特徴を関連づけることもできていた。

なお、明確に関数として言及はしていないが、５班は信号の赤と青の状態を断続的な水平なグラフで表現している。その上で、この信号の状態を表すグラフと、歩行を表す比例のグラフの交点に対して、歩行者が赤信号の状態に遭遇することとしてその意味を適切にとらえていた。そして、そこから比例のグラフが水平のグラフと交わらないように比例定数を選ぶことを考え、その比例定数が歩く速さを示すと考えて結論を下した。式としては定式化しなかったものの、関数のグラフの交点についての既習の知識を活用しており、信号の状態を表すためのグラフを開発したと考えることができよう。

また２班のポイントカードの場面では、変数 x を「金額から端数を切り捨てた数÷1000」としていた。購入金額を変数 s で置くと、床関数を利用して $x=\lfloor s/1000 \rfloor$ と書くことができ、やはり生徒たちは関数としては言及していないものの、新たな関数を開発していたとも考えられる。

(3) 関数の利用の意識化

生徒により考えられた活用ということで、聞いていた生徒の側から、どこに関数が使われているか、あるいは活用から得られた結論は妥当なのかの疑問が自然に生じていた。

例えば、５班の発表に対しては関数がどこに出てきたのかとの質問が出された。発表者はグラフを提示してこれが関数だとしたが、事後の感想で「関数は活用してはいたけどそれがうまく見えない気がした」と書いている生徒も見られた。通常の授業ではそうした疑問は出にくいと考えられるが、この授業では生徒により作られた活用が取り上げられたので、疑問が自然に表明されたものと考えられる。有元 (2001) は算数の文章題について、小学生が機械的に解答をしがちなナンセンスな文章題や非現実的な文章題に対しても、小学生が作ったという設定にして「おかしいところがあるかもしれません」として提示すると無理に答えを求めようとする反応が減り、変だと指摘する反応が増えることを報告してい

る。この授業における生徒の反応は、関数の活用についてもこれと同様の傾向が生じうることを示唆している。

５班に対しては、比例の直線が赤信号を示す線分と少しだけ交わる部分があるとの指摘もなされた。発表者は「これぐらいなら小走りすれば間に合う」と答えたが、関数を用いて計算上得られる結果と現実で実現する際の調整を意識することになっている。さらに、信号機の時間が日によって変化することにも触れており、これも現実に応用するときの限界を意識した発言と言えよう。

４班の JR の料金についても、質疑の中で「関数ってどれですか」という質問が出された。確かに料金表を見ると、営業キロ（「１から３」「４から６」等）とそれに対応する料金（「140 円」「190 円」等）が掲載されている。営業キロに対して料金が決まるので、料金は営業キロの関数になっている。しかし発表者は料金表を提示しながらも、この点を明確にせずに話を進めたり、質問に対しても切符を買う枚数を x 、合計の値段を y としてグラフに表すことを話し、「枚数が増えると比例っぽく増えて行くかなと思ってむりやり関数にした」と答えたため、上述の関数関係が生徒たちに伝わらなかった。

なお、営業キロが x km のときの料金を与える関数を $y=f(x)$ とすると、４班の発表は、この関数について必ずしも $f(nx)=nf(x)$ が成り立っておらず、またいつも $f(nx)<nf(x)$ とは限らず、$f(kx)>kf(x)$ となる k も存在することを示したものと言える。その意味では関数の性質について見出したことを発表したのであるが、その関数を活用して何らかの提案をした形にはなっておらず、関数の活用には見えにくかったものと考えられる。

４班に対しては、現実的な切符の買い方ではないとの指摘もされた。同様の指摘は６班のガソリンの入れ方に対してもなされた。

発表者の側も、ある関数を活用して答えを求めて終わりにするのではなく、異なる関数を適用した場合に、それぞれのメリットやデメリットに目を向けている場合があった。

６班は比例と２乗に比例する関数のそれぞれによる価格設定をしていたが、それぞれの設定の仕方のメリットとデメリットを比較し発表した。２班のポイントカードの設定でも比例に基づく設定と２乗に比例する関数に基づく設定を示した上で、それぞれの設定が有効になりそうな店の特徴を示していた。これらの班は、(1)で述べた関数の変化の仕方に着目しながらも、一方の関数を活用するだけでなく、場面の設定の仕方と活用する関数の関係も考慮して議論をしていたと言える。

(4) 生徒による活用に見られる関数のイメージ

本節(2)で見たように、生徒は自分たちが必要とする変化の仕方をグラフや増え方のきまりをもとにイメージし、そうした変化の仕方をする関数を作り出していた。つまり、生徒たちは関数の活用を考えるにあたり、まずは場面に対して自分が必要とする変化の仕方を考えることを基本に置いており、関数を量の変化の仕方としてイメージしていると考えることができよう。上田 (2009) は初期の学習において、中学生が変化の速さをもとに推論したり、グラフを動的に見ながら学習する過程を見出しているが、同様の傾向が関数の活用にも表れていたと言える。

こうした傾向は、(1)で見てきた特徴にも当てはまる。比例や２乗に比例する関数、反比例といった既習の関数を活用するに当たっても、２変数の間の対応の仕方に着目して関数を選択しているというよりも、一方の変数が一定の割合で増加したときに他方の変数がどのような変化をするかを考慮して関数の選択をしていた。

生徒にとっての関数の種類は、一定に増える、増え方が急になる、増え方が緩やかになる、緩やかに減少するといった変化の仕方の

違いを表している。そして、変化の仕方の違いとして関数の違いを捉えることにより、未習の関数であっても自分たちで新たに開発していた。変化の仕方に重点を置いた時には、中学生はより広範な関数について考え、現実的な場面の変化を制御するものとしてそれらの関数を構想できることが示唆される。

５．観察された問題点

今回の活動においては第３節に示したような多様な活用が提案され、また第４節で考察したように、それらの活用の仕方を支える発想に、生徒たちの持つ関数のイメージを見いだすことができた。しかし他方で、その発想が多様であるがゆえに、活動としての問題点も見られた。

第一に、発表内容が複雑なために、生徒たちの間で十分な理解が得にくく、結果として明らかな誤りでも見過ごされることがしばしば見られた。例えば、１班の発表では、入場料を人数によらず一律 3000 円と設定した。したがって x 人入場したときの代金の合計は $y=3000+2000x$ となるはずである。発表では１人当たりの料金が混じったような $y=(3000\div x)+2000x$ という式が提示されたが、その不適切さが見逃され、質疑の際に話題とはならなかった。９班が料金を $y=12000/x$ として式とそのグラフを提示し、「12 人になると１人 1000 円」と説明する一方で、「軸は合計の入場料」「人数が増えるほど合計入場料は減少している」とも言い、関数とその解釈に齟齬が見られた。しかし教師が話題にするまで質問が出なかった。７班のゆで卵に関わるグラフでも、第３節で述べたように不備が見られたが、議論では話題にならなかった。このときグラフの意味について説明を求める意見は出されていたことからも、発表内容の理解が十分でなかったと推測される。

第二に、前節(3)で見たように関数の利用が現実的かの意識はある程度高まったものの、十分なものとは言えなかった。例えば、入場者を x 軸にとったグラフを提示した班がいくつかあったが、いずれも１目盛りを１人としてかいており、通常千人単位、一万人単位で考えられるであろう入場者のグラフとしては不自然なものとなっていた。また９班は合計入場料を $y=1000\sqrt{10x}$ と設定し、経営者にも儲けが出るとした。しかし例えば $x=1000$ のときは１人あたり 100 円と、当初の入場料の 10 分の１になってしまうが、この点は、事後に教師が上限を設ける必要性を指摘するまで、話題にならなかった。ふだんの学習で x の値が比較的小さい範囲で扱われることも影響していようが、同時に、こうした側面について中学生が自分たちで十分に配慮することは容易でないことから、教師がそれらを適宜補う必要があると言えよう。

６．おわりに

生徒たちの自由な活用においては、量の変化の仕方への着目が１つの特徴として見られ、自分たちが必要とする変化の仕方を探る中で、未習の関数についても自分たちで開発できていた。Nunokawa, Ohtani & Hino (2015) は変数の変化を重視した授業の試み(大谷ほか, 2014)を、タブレット端末も利用しながら、数学をあまり得意としない中学校２年生に対して実施したところ、低次のディスコース (Nachlieli & Tabach, 2012) のみに留まらず、変化の特徴に関する話題が自然に生まれたことを報告している。本稿で見てきた生徒の姿は、活用の場面においても量の変化の仕方を中心に考えることで、中学生が関数と関わりやすくなることを示唆している。

高瀬 (2015) は微積分学の歴史をたどる中で、次のような指摘をしている：「19 世紀の後半のある時期から『量』を捨てて『数』を採ろうとする動きが強まり、その結果、『変化量』は全面的に『変数』に座

をゆずることになった」(p. 123)。歴史的なこうした経緯を、本稿で見てきた中学生の様子や、関数以上に変数の理解が不十分という現状 (盛田, 2014)と併せて考えると、中学校における関数の学習において、変化量を重視する時期を十分にとる必要性についても検討する余地があると言えよう。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：25350190）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 生徒たちが利用したと思われる料金表は次のものである：https://www.jr-odekake.net/railroad/ticket/guide/02.html.

2) 生徒が利用したゆで卵のシミュレーターは次のものである：https://www.data-artist.com/atelier/20150718.html。これを用いて生徒と同様にゆで時間 x 秒と卵の最初の温度 y℃ の関係を調べたところ、$y=-0.12x+108$ という式が得られた。生徒たちのグラフは２変数のデータを誤って対応させたものであった。

3) 卵のゆで時間を対数関数により求めているものとして例えば Williams (1996)がある。

有元典文. (2001). 算数言語ゲームの可視化実践. 加藤浩, 有元典文 (編著), 認知的道具のデザイン (pp. 239-257). 金子書房.

盛田直子. (2014). 式・表・グラフを連携させた１次関数の指導について. 第 63 回北陸四県数学教育研究(金沢)大会発表資料.

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51/52*, 10-27.

布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.

布川和彦. (2014*a*). 中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に. 上越教育大学研究紀要, *33*, 85-96.

布川和彦. (2014*b*). 中学校数学における関数の対象としての構成(2)： 教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *29*, 1-12.

布川和彦. (2015). 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, *30*, 1-12.

Nunokawa, K. (2015). Another Perspective for Discussing Students' Understanding of Mathematics: Construction of Objects of Thought. In A. M. Columbus (Ed.), *Advances in psychology research* (pp. 129-150). Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Nunokawa, K., Ohtani, M., & Hino, K. (2015). Classroom discourse that affects reification of a mathematical object: The case of function. C. Vistro-Yu (Ed.), *Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 425-432). Philippine Council of Mathematics Teacher Educators.

布川和彦, 杉本知之. (2015). １次関数のイメージの構成に影響を与える要因：中学生のグループ活動の分析を手がかりに. 数学教育学論究(臨時増刊), *97*, 161-168.

大谷実, 布川和彦, 日野圭子, 漢野有美子. (2014). ディスコースを視点とした数学的対象の構成：一次関数のデザイン実験の試み. 日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会発表集録, 347-350.

高瀬正仁. (2015). 微積分学の史的展開：ライプニッツから高木貞治まで. 講談社.

上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究, *24*, 41-52.

Williams, C. D. H. (1996). *Boiling an egg*. https://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/CW061201-1.pdf. 2016 年 2 月 14 日アクセス.