

上越数学教育研究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 31 号

目 次

中学校3年生により考案された関数の活用の事例 — その特徴と生徒のもつ関数のイメージ —	布川和彦・杉本知之...	1
円周率教材のルーツ — アルキメデス『円の計測』に学ぶために —	伊達 文治...	13
三次元空間における角に関する困難性についての研究	三ツ間伸太朗...	19
数学的問題解決における「活用」に関する研究 — 「活用」の「探究」に関する側面に着目して —	吉田 万里...	29
数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する研究 — 微分係数の図形的意味の理解段階に着目して —	片寄恵理奈...	37
現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の 知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みについて	藤川 亮一...	47
算数科における活用問題での児童の思考過程に関する研究 — 価値を伴った数学的モデル化の理論構築 —	佐々木英男...	63
《翻訳》明日の社会における数学指導 — 来たるべきカウンターパラダイムの弁護 —	イブ・シュバラール...	73

2016

上越教育大学数学教室

中学校3年生により考案された関数の活用の事例 ーその特徴と生徒のもつ関数のイメージー

布川 和彦 杉本 知之
上越教育大学 上越教育大学附属中学校

1. はじめに

関数の学習において、学習や探究の対象として関数がとらえられるようになるには、単元を通して整合的な語り方が大切になると考えられる(布川, 2014a; Nunokawa, 2015)。一貫した語り方の継続により、関数がどのようなもののイメージが構成され则认为られるからである。したがって、単元の最後における関数の活用についての学習も、関数とは何かを確認し、その理解をさらに深めるための機会となる必要がある。しかし、中学校の数学においては、使える関数の種類が限られたり、扱える場面が限られることもあり、他の単元に比べて、関数がどのように利用されているかが判別しにくい場合のあることも指摘されており(布川, 2014b)、関数の活用の学習については、単元全体の整合性という点からも検討の余地があると考えられる。

ところで布川と杉本(2015)は、1次関数の単元の途中で行われた、1次関数とはどのようなものを生徒たちに自由にまとめさせる活動を分析し、生徒たちの持つ関数のイメージの一端を見いだしており、そこから生徒たちの理解に応じた指導の示唆を得ている。同様に考えると、関数の活用についての活動を考えるにあたって、生徒たちに活用の仕方を考えてもらうことで、生徒たちが持っている関数に対するイメージ、あるいは関数と現実的な場面の関わり方についてのイメージを見いだすことが期待される。

そこで本稿では、教科書のような与えられた活用場面における生徒の解決ではなく、生徒たち自身が関数の活用を考えるような授業において彼らが考案した活用の仕方を調べることを通して、生徒たちの上述のようなイメージをとらえることを目的とする。

2. 授業の概要

本稿で対象とする授業は、中学校3年生1クラスに対し平成27年9月16日より10月14日まで行われた14時間である。2乗に比例する関数の授業はすでに終えていた。このうち第2～14時までの13時間を、観察者が1台のビデオカメラを手に持ち記録した。

最初に、自分の悩みも考慮しながら、関数を使うとこんないいことがあるとか、日常で疑問に思っていることを関数で分析できるなど、関数の活用を提案してほしいとの課題が提示された。第2時に班で考えを共有した後、1つのテーマにしぼり、班ごとに提案を作り上げていった。途中で教師による相談会を行い、また発表の準備、予行演習なども経た上で、第12～14時で班ごとに提案についての発表を行った。

3. 発表された関数の活用

本節では第12～14時間目に各グループから発表された内容の概略を、授業での発表順に記述する。ただし、第3班による発表は確率を中心としたものであり、関数との直接的

な関わりが見えにくいことから、本稿では取り上げないこととする。

(1) 6 班

ある町の環境問題（自動車の排気ガス）を話題とし、2軒のガソリンスタンドの価格設定を比較した。一方のスタンド・サルオスは値段が入れたガソリンの量に比例し式は $y=240x$ であり、もう一方のスタンド・ゴリオスは2次関数に基づき、式は $y=30x^2$ であるとの設定を提示し、どちらがお得かを問題とした。その後、2つのスタンドについて x が1Lから12Lまで1Lずつ増える表を提示した上で次のことを説明した：1Lではゴリオスが安い、9Lからはゴリオスが高くなっている；サルオスは比例関係なので1L増えたとき上がる値段は一定であるが、ゴリオスでは1L増えるごとに上がる値段が高くなっていく。そこから、「一度に多く入れたい場合はサルオスの方がお得」「少ないガソリンで行ける距離だという人にはゴリオスがお得」と結論を述べた。

さらに「燃費のよさも考える」として、車が軽い方が燃費がよいと聞いたことがあるので、ガソリンを入れる量が少なければ軽くなり、燃費がよく環境にも優しいとして、少なくともよいならゴリオスの方がお得だから、ゴリオスで入れる方がよいと結論づけた。

最後に両者のメリットとデメリットを比較した。比例関係のメリットはたくさん入れたときにお得なこと、入れたときの値段がわかりやすいこと、デメリットはお得にしようとしてたくさん入ると燃費が悪くなり、環境に悪いことだと述べた。2乗に比例する関数のメリットは少ない量のときにお得なこと、入れる量が少ないと燃費がよく環境にもよいこと、デメリットは「入れたときの量で値段[の上がり方]が変わるので、値段がわかりにくいということ」だとまとめた。

発表後に生徒からは質問が出なかったが、教師が本当にゴリオスでよいと思うかとクラ

スに尋ねると、1Lは少なすぎて走れないのではない、ガソリンが尽きようとしている状態で1Lしか入れないということはないのではないかといった疑問が出された。これに対し発表者からはなくなる前にこまめに入れていけばよいとの反論がなされたが、1Lずつこまめに入れると、皆がガソリンスタンドに行くために無駄な走行がなされ、環境に悪影響が出るとの指摘が出された。

事後に感想を求めると、1人の生徒は比例の方が同じように上がっていくので得した気になると答え、もう1人の生徒は自分なら1Lずつこまめに入れると答えた。

(2) 5 班

下校時に途中の信号で停まらずに駅まで行くことのできる歩行の速さを考えた。そのために、5箇所の歩行者用信号について信号が変わるタイミングを自分たちで調べて記録したものを、表にまとめて提示した。さらに、「パッと見てわからないので、とりあえずグラフにしてみました」として、図1のようなグラフを提示した。ただし、図1は生徒によ

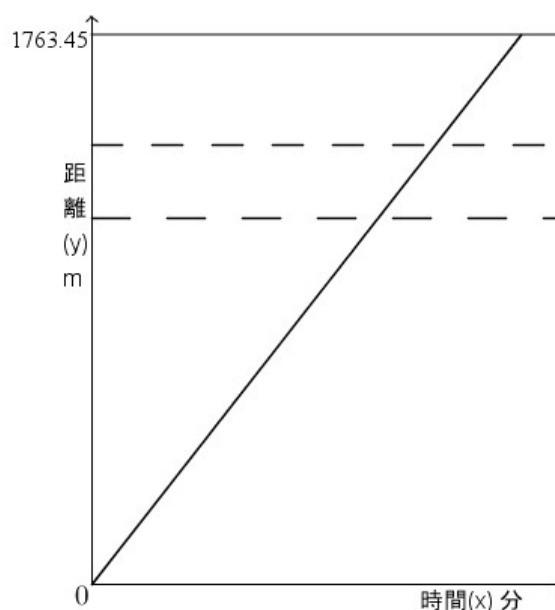


図 1: 信号の状態と歩行の様子

るグラフを、見やすいように簡略化したものである。縦軸の信号の位置に当たる高さに断

続的な横線が引かれているが、線の部分が赤信号のとき、線のない部分が青信号のときを表している。一番上の横線は目的地である駅の位置を表す。また、原点を通る直線は、一定の速さで歩いたと仮定したときの歩行の様子を表す。したがって、図1のように歩行を表す直線が信号を表す線分と交わらないときは、赤信号で停止せずに駅まで行けることを表すことになる。

発表者は、駅までが1763.45mであることから、到着までの時間が20分前後となり、かつ信号の線分と交わらない直線として、17分かかる場合と22分かかる場合の2本を見出したことを報告した。またそれらの直線の式を $y=104x$ と $y=80x$ と求め、分速何mかが a になるので、前者は分速104m、後者は分速80mになると述べた。

その後、信号の表に戻り、「関数だけだとうまく、ぴったりいかないので、応用編ということで」と断った上で、2番目と3番目の信号が変わるタイミングから、信号間の距離98mを1分以上かけて歩いても3番目が赤になる前に渡れることを示した。3番目と4番目の信号についても同様の検討を行い、発表を終えた。

事後には、なぜそんなにあせる必要があるのかとの意見とともに、関数はどこに出てきたのかとの質問が出た。発表者はグラフを提示し、これが関数だとした。同じ生徒がこの速さなら信号が全部大丈夫なのか確認すると速さとしてはそうだが、信号が変わる時間が毎日変わると答えた。さらに直線が赤信号の線にかかっている部分があるとの指摘が出ると、発表者もこれを認めた上で、「これぐらいなら小走りすれば間に合う」とした。

なお観察者の近くの生徒のシートには次のような感想が残されていた：「関数は活用してはいたけど、それがうまく見えない気がした。でも難しいことをしているなと思った」。

(3) 1班

入場者の少ないスキー場について、料金設定の工夫により入場者数を増やすという提案を発表した。従来の料金は1日券が1人3000円であったとし、これに対し新たな料金では何人でも一律の入場料として3000円を新設して、その代わり1日券を1人2000円にすると提示をした。また、それぞれの料金設定について、 x を人数、 y を合計料金としたときの式をそれぞれ $y=3000x$ 、 $y=(3000 \div x)+2000x$ [ママ]と説明し、「1人あたりの値段」のグラフだとして以下のようなグラフを提示した。

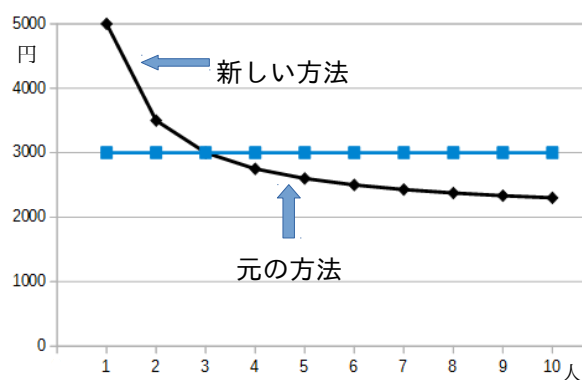


図2: 2つの方法による1人あたりの料金

縦軸は1人当たりの値段、横軸は来場者数を表すとした。そして、新たな料金設定により、団体で来る方が得になり、団体で来る人が増えるので、売り上げも伸びると説明した。

次に、売り上げを y 、来場者数を x としたときのグラフを提示した。従来の料金のときを $y=3000x$ のグラフで、新しい料金設定のときを $y=2000x+3000$ のグラフで表していた。ここで、来場者が昼食代として1000円を使うとの設定を追加し、それぞれの式を $y=4000x$ と $y=3000x+3000$ に変えたグラフ(図3)も提示した。ある人数以降では後者のグラフが前者のグラフの下に来ることから、新しい方法だと減少しているように見えるが、実際は来場者数自体が増えるとして、グラフの右側の部分を指しながら、新しい方法の方が売り上げが伸びると説明した。さらにスキー道具をレン

タルする人、宿泊する人もいるので売り上げはもっと上がるかもしれないと結論した。

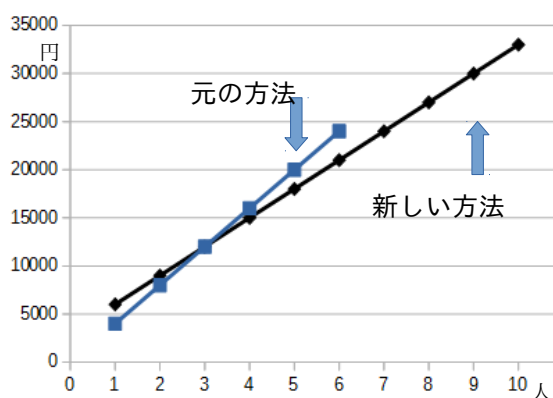


図3：2つの方法による売り上げ

事後の質疑では、料金の求め方の式が話題になり、この式にした理由が発表者より次のように説明された：「入場者が何人だとしても入場料が変わらないようにしたので、例えば10人で来たら1人300円で入れる」。また教師が1班の作成過程に関わり、次のように補足した：最初は比例による設定と1次関数による「会員制」のような設定にしようとしたが、それだと「つまらない」「提案しても面白くない」と言い始めた；反比例にすることも考えたが1人でも2万円、10人でも2万円とすると、100人でも2万円となってしまう、スキー場はやっていけないとの結論になった；「急激に下がるのではなく緩やかにお得感を作る」ことを考えて、先の式になり、これは提案する価値があるとなった。

ただし式の不備についてはこの時間には話題にならず、次時冒頭で補足された。

(4) 9班

平均観客動員数が減少しているサッカースタジアムの問題を取り上げた。従来の料金設定が1人1000円であると仮定し、これよりも観客動員数を増やして利益を増やす仕組みに変えたい経営者が、従業員に案を求めたという設定を提示した。

1つの案として、現在が比例なので反比例にするという案を考え、 $y=12000/x$ の式とそのグラフを提示した。そして1人あたりの料金は減るが、合計の売り上げは12000円のままだので「反比例では動員数は増えるが利益は出ないことがわかりました」と説明した。

1人の従業員が $y=ax^2$ にしたらどうかとの提案をしたとして、 $y=1000x^2$ のグラフと表を提示した。 x が人数、 y が「合計金額」だとして、「比例のときと比べて、1人のときの値段は一緒だけど、10人になると値段が10倍になります」「なので、お客さんがこっちのやつ[表の $x=9$ や $x=10$ の部分を目指す]を選んでもくれたら、すごく儲かります」「だけど現実的に考えるとたぶんみんなこっち側[表の $x=1$ のあたりを目指す]を選ぶ」「なので人数が全然集まらなくて結局は経営難に陥ることがわかりました」と説明した。

次に x が大きくなると増え方が緩やかになる曲線と放物線を板書し(図4)、前者ならどうなるかと問いかけた。そしてこの

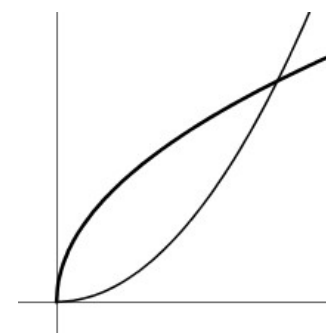


図4：放物線と新しい曲線

曲線を式にしようとして $y=1000\sqrt{10x}$ となったことを説明した。

曲線がなぜこう膨らむのかを説明するとして、 $x=0, 1, 2, 3$ のときの $y=\sqrt{x}$ の値を板書し、そこに y の増加量を書き加えた。そして増加量が減っているのが、最初は急に増えるが、増え方がだんだん緩やかになりふくらんだ曲線になるとした。

上の式により合計金額の表を示した。1人だと3162円が高いが10人だと合計が10000となり、皆10人の方を買うこと、他方で10人だと合計金額は従来の料金設定と一緒にになるので、経営者側の儲けもあり、人数も増え

るので、この式を採用することを説明した。

最後に教師が、最後の式は、最初 $y^2=x$ と書いてあったこと、放物線を「寝かせた」形から発想したことを補足した。また、 $y=\sqrt{x}$ の式を使うと 2 人のとき合計金額は 1.4 倍だから 1 人当たりでは 0.7 倍位となること、人数が増えると 1 人当たりは減る一方で、合計金額は増えることを説明した。

(5) 8 班

「指揮の式」として、見やすい指揮の仕方を考えた。「[あこがれの指揮者の]指揮はボールの落下のように、 $y=ax^2$ になっていた」ので「指揮はグラフで説明できる」として、下の 2 つのグラフを提示した。

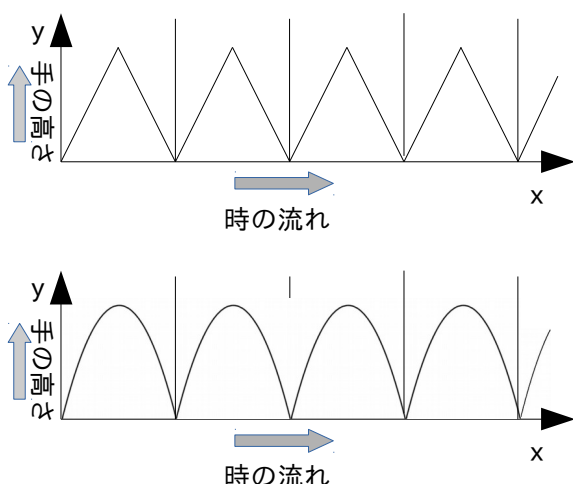


図 5：1 次関数と 2 乗に比例する関数の指揮

1 番目のグラフだと拍の頭がわかりにくいこと、「これを $y=ax^2$ の式で作ると、拍の頭がよりわかりやすくなる」ことを説明した。

さらに、グラフから式を作ることを説明した。上の曲線が $y=ax^2$ の放物線の一部であるとし、頂点部分から最下部までの放物線の半分が 1 拍の半分に当た

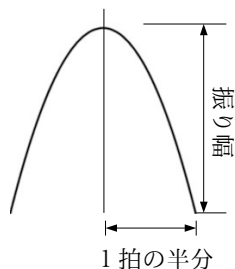


図 6：放物線の解釈

るとして、それは「1 拍の半分 = $60 \div \text{曲のテンポ} \div 2$ 」で求まるとした。また、横軸から頂

点までの高さは「指揮のふり幅＝そのひとのあごからへそまで」に当たるとした(図 6)。演奏会の合唱で指揮をする人について実測をして振り幅を 4/10 m と求め、実際に歌う曲から 1 拍の半分の 1/4 秒であるとした。

そこから $4/10=a \cdot 1/16$ 、 $a=6.4$ と求め、その指揮者の指揮の式は $y=6.4x^2$ だとした。自由落下は $y=5x^2$ だと授業でやったが、それより少し速くなるとして、発表を終えた。質疑の時間はとれなかった。

(7) 2 班

店のポイントのつけ方をとりあげ、1 次関数によりポイントをつける店に比べて、2 乗に比例する関数でポイントをつける店の方が客がお得感を感じているという寸劇を行った。

x を金額から端数を切り捨てた数 $\div 1000$ 、 y をもらえるポイント数とし、 $x=1$ から $x=6$ までの $y=x^2$ の表と $y=10x$ の表を提示した。そして、3000 円の場合について前者では 9 ポイントになるが後者では 30 ポイントになることを示した。同様に $x=14$ から $x=20$ までの表も提示し、17000 円の場合、前者では 289 ポイントになるのに対し、後者では 170 ポイントになることを示し、「1 万円を過ぎたところから大幅に差が開いている」と説明した。

「小さい買い物(雑貨屋 etc)→一次関数を利用したポイントカード」「大きい買い物(家具屋 etc)→二次比例関数を利用したポイントカード」というスライドを示し、ホームセンターは大きい買い物をする人が多く自然と売り上げも伸びるので、2 乗に比例する関数によるポイントカードにした方がよいとした。

教師は階段関数のグラフをかき、通常のポイントシステムは 100 円で 1 ポイントなのでグラフはこうなるが、式は難しいので上の式にしたと説明するとよかったとコメントした。

(8) 4 班

JR の料金表だとする表を提示した¹⁾。それ

をもとに、3 km までは 140 円なので、3 km 2 回で行くと 280 円だが、6 km 1 回だと 190 円ですむとし、下のグラフを提示した。

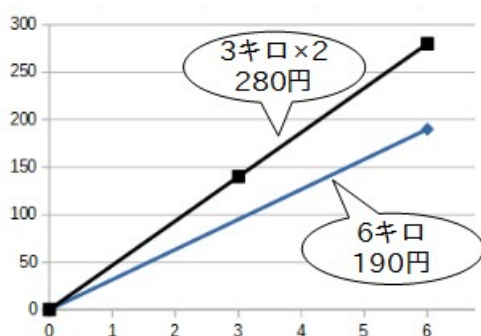


図 7：2 回に分けて乗る場合との比較

次に逆転する例として、30 km 1 回で行くと 500 円かかるが、15 km を 2 回で行くと $240 \times 2 = 480$ 円ですむことを紹介し、そのグラフを提示した。そして「分割して買った方が安くなることがわかる」と説明した。

他にも 50 km 1 回は 840 円だが 25 km 2 回だと $410 \times 2 = 820$ 円であること、280 km 1 回は 4750 円だが 40 km 7 回だと $670 \times 7 = 4690$ 円になる等の例を示した。そして 1 年間続けると $20 \times 365 = 7300$ 、 $60 \times 365 = 21900$ 円それぞれお得になるという結果を説明した。

質疑で「関数ってどれですか」との質問が出ると、発表者は「関数に結びつけるのが難しかった」ことを認め、合計の値段を y 、切符を買う枚数を x としてグラフに表すと、「枚数が増えると比例っぽく増えて行くかなと思ってむりやり関数にしてみました」と答えた。別の生徒が切符を 2 枚買うとき一度降りてから買わないといけないと指摘し、発表者も認めた。すると「そしたら電車行っちゃうじゃん」との意見が出されたが、発表者は「それは時間に依る」と反論した。

最初に質問した生徒が「関数って一方も決まるともう一方も決まるってやつだと思うんですけど、枚数も決まってないし、値段もバラバラなので関数ではないと思います」と指摘すると、発表者は「ごめんなさい」と言い

反論しなかった。教師はグラフを使ったり運賃システムが表になっていて、それ自体は関数だとサポートした。他方で、主張自体は関数とあまり関係がないと指摘し、身のまわりのものが関数として捉えられ、それを調べていったらこうした事実がわかったという発表であったとまとめた。

なおこの班は最初、ボールペンのバネの部分でものを飛ばす場面を考え、バネの本数と飛ぶ距離の関係について実験もしていた。しかし、バネが 3 つしかペンに入らないことがわかり、テーマを変えたと教師が補足した。

(9) 7 班

「おいしいゆでたまごの作り方」をテーマとし、卵の初期温度を決めるとゆで時間ごとの状態を表示してくれるシミュレーターのホームページを用いた実験を報告した。

沸騰したお湯からゆでたときのグラフとして $y = (1/10)x + 10$ という式とグラフを提示し、 y 軸は冷蔵庫から出したときの卵の温度、 x 軸はゆで具合がミディアムになるまでにかかった時間と説明した。そして「卵のゆで時間と黄身の堅さは 1 次関数で表すことができる」こと、「水からゆでると沸騰するまでの時間があるので」多く時間がかかること、「殻がくっついてとれにくいので、お湯で沸騰した後 15 分間火を止めて卵をゆでるのがいい」とことがわかったと報告した。

発表後、グラフの意味について説明を求める意見が出されたが、クラスとして理解には至らなかった。卵の初期温度が高い方がゆで時間は短くなると考えられるので²⁾、 $y = (1/10)x + 10$ という式はそれに合わないが、そうした不備も話題にならなかった。

なお、生徒たちは当初、ゆで時間と黄身や白身の温度の関係を調べていたが、実験をすることができず方針を変えた。その後、卵の重さや初期温度からゆで時間を産出する式をインターネット上で見つけたものの、その式

が対数関数をもとにしていることから理解が難しく、その結果、上のシミュレーターを利用した探究に移行することになった³⁾。

(10) 10班

小遣いをアップさせるとして、「1日目に1円もらい、2日目に2円もらうというように、毎日お小遣いを倍にしてもらうという方法」を提示した。4日目、10日目、13日目、14日目、20日目を図で示し、20日目では524,283円[ママ]になると述べた。急に増えることの「理由はグラフを見ればわかる」として、図8のグラフを提示した。

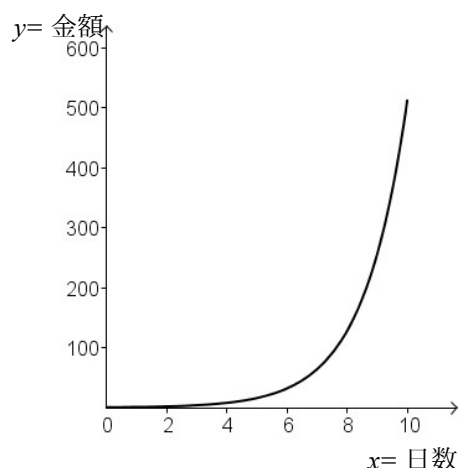


図8：倍々に増えるときのお小遣い

さらに「1円を倍にするのと10円を倍にするのではわけが違う」「1円を倍にしても1円しか増えないが、10円を倍にすると10円増える」「2倍にされる数が増える。512円から512円増える」と説明し、もらえる金額と合計を表にしたものを提示した。

x:日数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y:金額	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
合計	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

これを式で表すと $y=2^{(x-1)}$ になるとして式を示し、なぜこの式になるかを表を用いて説明した。似たようなエピソードとしてドラえもののパイパインの話、曾呂利新左衛門の話を紹介した。

生徒から質問は出なかった。教師は $y=2^{(x-1)}$

と $y=x^2$ とでは、形は似ているが、どちらが「強い」という問いを提起した。

4. 生徒による関数の活用の特徴

本節では生徒による関数の活用について、その特徴を抽出する。そうした特徴は、生徒たちのもつ関数のイメージを反映しているとも考えられる(布川と杉本, 2015)。

(1) 関数の値の変化の仕方に着目した選択

中学生による活用ということもあり、いくつかの班では比例と2乗に比例する関数とを対比する形で用いていた。これらの関数を選択した意図は、2乗に比例する関数を用いることで、 x の値が大きくなるほど y の増加の速さが速くなるという効果を利用したり、 x の値により比例と2乗に比例する関数の大小が逆転するという効果を用いたいというものであった。また、 x の値が大きくなるほど y の値が緩やかに減少するという効果をねらう場合には、反比例を選択していた。

このように、生徒たちは関数の変化の仕方を考慮し、自分の希望する変化の仕方に合った関数を選択していた。

6班は、2つのガソリンスタンドの価格設定を比例($y=240x$)と2乗に比例する関数($y=30x^2$)を用いて設定した。これにより、入れる量が少ない時は2乗に比例する関数に基づく値段の方が安い、入れる量が多くなると値段が逆転するという設定を作り出した。その上で、ガソリンが少ないと燃料も含めた重量が軽くなるので燃費が良くなるとして、入れる量と環境の接点を作り、2つの価格設定と環境という価値観とを結びつけた。逆に言えば、入れる量により値段の関係が逆転するような設定にするために、2種類の関数を利用していると考えられる。

9班はスタジアムの入場料を $y=1000x$ という比例に基づく設定から、一旦 $y=1000x^2$ に変えている。これは利益を増やすという目的のために、 x の値が増えたときに速く増加する

関数を選択したものと言える。

2 班のポイントカードの設定でも、2 乗に比例する関数による設定を提案し、1 次関数によりポイントをつける店よりも客がお得感を感じやすいとした。また 2 つを比較する際には $y=x$ ではなく $y=10x$ を用い、これと $y=x^2$ とでポイントのつき方を比較している。比例定数をうまく選ぶことで、増加の速さを調整したものと考えられる。これにより、 $x=10$ でポイント数が逆転し、 $x=10$ からはポイントのつき方に「大幅に差が開く」状況を作り出した。そこから客単価の大きい店では 2 乗に比例したポイントにすると売り上げが伸びると述べており、客単価に応じてお得感を感じやすいポイントのつけ方を、関数の増加の速さの違いをもとに作り出している。

2 乗に比例する関数を利用しながらも、8 班の指揮の場面への活用では、変化の割合が変化するという 2 乗に比例する関数自身の特徴を利用していた。2 乗に比例する関数における頂点の付近と頂点から離れた場所での変化の割合の違いを利用し、変化の速さが速い後者が拍の頭にくるようにすることで、拍の頭を明確化しようとしていた。1 次関数をもとにした動きでは、変化の割合が一定であるために、拍の頭という特別な点が見にくいとも考えていた。これらも関数の変化の特徴に着目した活用と言えよう。

1 班は、入場料を何人でも一律 3000 円と設定し、同時に 1 日券の料金を 2000 円に下げること、総売り上げを $y=2000x+3000$ という 1 次関数となるようにした。発表時には式を誤って提示したが、その後に示したグラフでは上の 1 次関数が表されていた。それにより x の値が小さいときは従来の $y=3000x$ よりも割高になるとともに、料金の増え方を緩やかにすることで、 x の値が大きいところでは料金が逆転する設定を作り出した。比例と 1 次関数とではあるが、増加の速さの違いを利用して異なる価格設定を作り出した。

さらに 1 班は、昼食代 1000 円という条件を追加設定することで、従来の料金設定での売り上げを $y=4000x$ へ、新たな料金設定での売り上げを $y=3000x+3000$ へと修正したグラフも提示した。これは、1 次関数の人数に比例して増える部分について、その傾きをより大きくすることで、人数が増えたときの効果がでやすくなるような修正と言える。つまり自分たちの主張の妥当性を高めるように、変化の仕方の調整を行ったものと考えられる。

なお、入場料だけを見ると 1 人当たりの入場料負担額は反比例になっているが、これについては教師からの補足の中で「急激に下がるのではなく緩やかにお得感を作る」ための工夫であったことが紹介されていた。したがって、反比例の利用も、その変化の仕方の特徴に基づいて選択されたものであった。

(2) 期待する変化に応じた関数の開発

前項で見たように、生徒たちは学習した関数について変化の仕方に目を向け、自分たちの設定に合った関数を選択して、活用していた。しかし今回の活動においては、希望する変化の仕方はあるものの、それに合った関数が未習であるために選べないという場合も見られた。その際には、生徒たちは希望する変化にふさわしい関数を自ら開発していた。

上で見た 1 班の場合も、1 人当たりの負担額を見ると、図 2 のグラフに見られるように $y=3000/x+2000$ という関数に従う。こうした反比例に定数項を加えた関数は未習のものである。人数が増えると得になるが、極端に安くはならない料金設定をしようとして、こうした関数やグラフになったと考えられる。上でも触れた教師の補足によると、当初は 1 人当たりの料金を反比例として設定しようとしたが、そうすると 1 人でも 100 人でも売り上げは同じとなり、利益が得にくいことから、「急激に下がるのではなく、緩やかにお得感を作る」ことを考えたとされる。つまり、グ

ループの人数が多くなると1人あたりの料金は下がるが、一定金額以下にはならないという変化を希望し、そこから上の関数を開発したものと考えられる。

9班は $y=1000\sqrt{10x}$ という関数を開発していた。これは、2乗に比例する関数だと多人数で入場するほど料金が増加しすぎるので、多人数ほど料金の増加が緩やかになる曲線を描いたことがもとになっていた。「この関数の式は誰も知りませんでした」が、最終的にはそれを $y=1000\sqrt{10x}$ と定式化した。このとき生徒は $y=\sqrt{x}$ の値と増加量を板書し、増加量が減っているのに、増え方が緩やかになりグラフがふくらんだ曲線となることを説明しており、開発した関数に一定の理解も見せていた。また教師からの補足では、生徒たちが最初、 $y=x^2$ のグラフを90°回転させると希望するような曲線が得られると考え、そこから $y^2=x$ と書いていたともされており、彼らが既習事項をもとに新たな関数を開発したこともうかがえる。

これに対し、10班は速く増加する変化を希望し、指数関数を開発した。これはマンガや昔の人の話に見られる、倍にしていくことで途中から急激に増加するという変化を利用して、当初はその結果を表に表していたが、それを何とか式にしようとして上の結果を得ている。つまり、最初はそれほど増えなくても、途中から増加量が大きくなるような変化を求め、その結果として指数関数を自分たちで開発したものと思われる。生徒たちは増加量が大きくなることと倍にする操作を関連付け、「1円を倍にしても1円しか増えないが、10円を倍にすると10円増え」、512円を倍にすると512円増えと説明しており、関数の特徴と増加量の特徴を関連づけることもできていた。

なお、明確に関数として言及はしていないが、5班は信号の赤と青の状態を断続的な水平なグラフで表現している。その上で、この

信号の状態を表すグラフと、歩行を表す比例のグラフの交点に対して、歩行者が赤信号の状態に遭遇することとしてその意味を適切にとらえていた。そして、そこから比例のグラフが水平のグラフと交わらないように比例定数を選ぶことを考え、その比例定数が歩く速さを示すと考えて結論を下した。式としては定式化しなかったものの、関数のグラフの交点についての既習の知識を活用しており、信号の状態を表すためのグラフを開発したと考えることができよう。

また2班のポイントカードの場面では、変数 x を「金額から端数を切り捨てた数÷1000」としていた。購入金額を変数 s で置くと、床関数を利用して $x=\lfloor s/1000 \rfloor$ と書くことができ、やはり生徒たちは関数としては言及していないものの、新たな関数を開発していたとも考えられる。

(3) 関数の利用の意識化

生徒により考えられた活用ということで、聞いていた生徒の側から、どこに関数が使われているか、あるいは活用から得られた結論は妥当なのかの疑問が自然に生じていた。

例えば、5班の発表に対しては関数がどこに出てきたのかとの質問が出された。発表者はグラフを提示してこれが関数だとしたが、事後の感想で「関数は活用してはいたけどそれがうまく見えない気がした」と書いている生徒も見られた。通常の授業ではそうした疑問は出にくいと考えられるが、この授業では生徒により作られた活用が取り上げられたので、疑問が自然に表明されたものと考えられる。有元(2001)は算数の文章題について、小学生が機械的に解答をしがちなナンセンスな文章題や非現実的な文章題に対しても、小学生が作ったという設定にして「おかしいところがあるかもしれません」として提示すると無理に答えを求めようとする反応が減り、変だと指摘する反応が増えることを報告してい

る。この授業における生徒の反応は、関数の活用についてもこれと同様の傾向が生じうることを示唆している。

5 班に対しては、比例の直線が赤信号を示す線分と少しだけ交わる部分があるとの指摘もなされた。発表者は「これぐらいなら小走りすれば間に合う」と答えたが、関数を用いて計算上得られる結果と現実で実現する際の調整を意識することになっている。さらに、信号機の時間が日によって変化することにも触れており、これも現実に応用するときの限界を意識した発言と言えよう。

4 班の JR の料金についても、質疑の中で「関数ってどれですか」という質問が出された。確かに料金表を見ると、営業キロ（「1 から 3」「4 から 6」等）とそれに対応する料金（「140 円」「190 円」等）が掲載されている。営業キロに対して料金が決まるので、料金は営業キロの関数になっている。しかし発表者は料金表を提示しながらも、この点を明確にせずに話を進めたり、質問に対しても切符を買う枚数を x 、合計の値段を y としてグラフに表すことを話し、「枚数が増えると比例っぽく増えて行くかなと思ってむりやり関数にした」と答えたため、上述の関数関係が生徒たちに伝わらなかった。

なお、営業キロが x km のときの料金を与える関数を $y=f(x)$ とすると、4 班の発表は、この関数について必ずしも $f(nx)=nf(x)$ が成り立っておらず、またいつも $f(nx)<nf(x)$ とは限らず、 $f(kx)>kf(x)$ となる k も存在することを示したものである。その意味では関数の性質について見出したことを発表したのであるが、その関数を活用して何らかの提案をした形にはなっておらず、関数の活用には見えにくかったものと考えられる。

4 班に対しては、現実的な切符の買い方ではないとの指摘もされた。同様の指摘は 6 班のガソリンの入れ方に対してもなされた。

発表者の側も、ある関数を活用して答えを

求めて終わりにするのではなく、異なる関数を適用した場合に、それぞれのメリットやデメリットに目を向けている場合があった。

6 班は比例と 2 乗に比例する関数のそれぞれによる価格設定をしていたが、それぞれの設定の仕方のメリットとデメリットを比較し発表した。2 班のポイントカードの設定でも比例に基づく設定と 2 乗に比例する関数に基づく設定を示した上で、それぞれの設定が有効になりそうな店の特徴を示していた。これらの班は、(1)で述べた関数の変化の仕方に着目しながらも、一方の関数を活用するだけでなく、場面の設定の仕方と活用する関数の関係も考慮して議論をしていたと言える。

(4) 生徒による活用に見られる関数のイメージ

本節(2)で見たように、生徒は自分たちが必要とする変化の仕方をグラフや増え方のきまりをもとにイメージし、そうした変化の仕方をする関数を作り出していた。つまり、生徒たちは関数の活用を考えるにあたり、まずは場面に対して自分が必要とする変化の仕方を考えることを基本に置いており、関数を量の変化の仕方としてイメージしていると考えることができよう。上田 (2009) は初期の学習において、中学生が変化の速さをもとに推論したり、グラフを動的に見ながら学習する過程を見出しているが、同様の傾向が関数の活用にも表れていたと言える。

こうした傾向は、(1)で見てきた特徴にも当てはまる。比例や 2 乗に比例する関数、反比例といった既習の関数を活用するに当たっても、2 変数の間の対応の仕方に着目して関数を選択しているというよりも、一方の変数が一定の割合で増加したときに他方の変数がどのような変化をするかを考慮して関数の選択をしていた。

生徒にとっての関数の種類は、一定に増える、増え方が急になる、増え方が緩やかになる、緩やかに減少するといった変化の仕方の

違いを表している。そして、変化の仕方の違いとして関数の違いを捉えることにより、未習の関数であっても自分たちで新たに開発していた。変化の仕方に重点を置いた時には、中学生はより広範な関数について考え、現実的な場面の変化を制御するものとしてそれらの関数を構想できることが示唆される。

5. 観察された問題点

今回の活動においては第3節に示したような多様な活用が提案され、また第4節で考察したように、それらの活用の仕方を支える発想に、生徒たちの持つ関数のイメージを見いだすことができた。しかし他方で、その発想が多様であるがゆえに、活動としての問題点も見られた。

第一に、発表内容が複雑なために、生徒たちの間で十分な理解が得にくく、結果として明らかな誤りでも見過ごされることがしばしば見られた。例えば、1班の発表では、入場料を人数によらず一律3000円と設定した。したがって x 人入場したときの代金の合計は $y=3000+2000x$ となるはずである。発表では1人当たりの料金が混じったような $y=(3000 \div x)+2000x$ という式が提示されたが、その不適切さが見逃され、質疑の際に話題とはならなかった。9班が料金を $y=12000/x$ として式とそのグラフを提示し、「12人になると1人1000円」と説明する一方で、「軸は合計の入場料」「人数が増えるほど合計入場料は減少している」とも言い、関数とその解釈に齟齬が見られた。しかし教師が話題にするまで質問が出なかった。7班のゆで卵に関わるグラフでも、第3節で述べたように不備が見られたが、議論では話題にはならなかった。このときグラフの意味について説明を求める意見は出されていたことから、発表内容の理解が十分でなかったと推測される。

第二に、前節(3)で見たように関数の利用が現実的かの意識はある程度高まったものの、

十分なものとは言えなかった。例えば、入場者を x 軸にとったグラフを提示した班がいくつかあったが、いずれも1目盛りを1人としてかいており、通常千人単位、一万人単位で考えられるであろう入場者のグラフとしては不自然なものとなっていた。また9班は合計入場料を $y=1000\sqrt{10}x$ と設定し、経営者にも儲けが出るとした。しかし例えば $x=1000$ のときは1人あたり100円と、当初の入場料の10分の1になってしまうが、この点は、事後に教師が上限を設ける必要性を指摘するまで、話題にはならなかった。ふだんの学習で x の値が比較的小さい範囲で扱われることも影響していようが、同時に、こうした側面について中学生が自分たちで十分に配慮することは容易でないことから、教師がそれらを適宜補う必要があると言えよう。

6. おわりに

生徒たちの自由な活用においては、量の変化の仕方への着目が1つの特徴として見られ、自分たちが必要とする変化の仕方を探る中で、未習の関数についても自分たちで開発できていた。Nunokawa, Ohtani & Hino (2015) は変数の変化を重視した授業の試み(大谷ほか, 2014)を、タブレット端末も利用しながら、数学をあまり得意としない中学校2年生に対して実施したところ、低次のディスコース(Nachlieli & Tabach, 2012)のみに留まらず、変化の特徴に関する話題が自然に生まれたことを報告している。本稿で見てきた生徒の姿は、活用の場面においても量の変化の仕方を中心に考えることで、中学生が関数と関わりやすくなることを示唆している。

高瀬(2015)は微積分学の歴史をたどる中で、次のような指摘をしている：「19世紀の後半のある時期から『量』を捨てて『数』を採ろうとする動きが強まり、その結果、『変化量』は全面的に『変数』に座

をゆずることになった」(p. 123)。歴史的なこうした経緯を、本稿で見てきた中学生の様子や、関数以上に変数の理解が不十分という現状(盛田, 2014)と併せて考えると、中学校における関数の学習において、変化量を重視する時期を十分にとる必要性についても検討する余地があると言えよう。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：25350190)の助成を受けている。

註および引用・参考文献

- 1) 生徒たちが利用したと思われる料金表は次のものである：<https://www.jr-odekake.net/railroad/ticket/guide/02.html>.
 - 2) 生徒が利用したゆで卵のシミュレーターは次のものである：<https://www.data-artist.com/atelier/20150718.html>。これを用いて生徒と同様にゆで時間 x 秒と卵の最初の温度 $y^{\circ}\text{C}$ の関係を調べたところ、 $y = -0.12x + 108$ という式が得られた。生徒たちのグラフは2変数のデータを誤って対応させたものであった。
 - 3) 卵のゆで時間を対数関数により求めているものとして例えば Williams (1996)がある。
- 有元典文. (2001). 算数言語ゲームの可視化実践. 加藤浩, 有元典文 (編著), 認知的道具のデザイン (pp. 239-257). 金子書房.
- 盛田直子. (2014). 式・表・グラフを連携させた1次関数の指導について. 第63回北陸四県数学教育研究(金沢)大会発表資料.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 10-27.
- 布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, 25, 1-10.
- 布川和彦. (2014a). 中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に.

上越教育大学研究紀要, 33, 85-96.

- 布川和彦. (2014b). 中学校数学における関数の対象としての構成(2)：教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, 29, 1-12.
- 布川和彦. (2015). 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, 30, 1-12.
- Nunokawa, K. (2015). Another Perspective for Discussing Students' Understanding of Mathematics: Construction of Objects of Thought. In A. M. Columbus (Ed.), *Advances in psychology research* (pp. 129-150). Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.
- Nunokawa, K., Ohtani, M., & Hino, K. (2015). Classroom discourse that affects reification of a mathematical object: The case of function. C. Vistro-Yu (Ed.), *Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 425-432). Philippine Council of Mathematics Teacher Educators.
- 布川和彦, 杉本知之. (2015). 1次関数のイメージの構成に影響を与える要因：中学生のグループ活動の分析を手がかりに. 数学教育学論究(臨時増刊), 97, 161-168.
- 大谷実, 布川和彦, 日野圭子, 漢野有美子. (2014). ディスコースを視点とした数学的対象の構成：一次関数のデザイン実験の試み. 日本数学教育学会第47回秋期研究大会発表集録, 347-350.
- 高瀬正仁. (2015). 微積分学の史的展開：ライブニッツから高木貞治まで. 講談社.
- 上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学2年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究, 24, 41-52.
- Williams, C. D. H. (1996). *Boiling an egg*. <https://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/CW061201-1.pdf>. 2016年2月14日アクセス.

円周率教材のルーツ

ーアルキメデス『円の計測』に学ぶためにー

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

1. はじめに

円周率を 3.14 として用いることや円の面積を求める公式など, 現在学校で教えられている円周率教材のルーツは, アルキメデスの書『円の計測』(*MEASUREMENT OF A CIRCLE*)にある。この訳本では, 次のものが現在よく活用されている。

Heiberg, J. L. ed. (1910). *Archimedes Opera Omnia*, 3vols, Leipzig, Teubner.

Heath(1912) は, 英訳であるが, ほぼ Heiberg(1910) のラテン語訳の英語への置き換えになっていると思われる。Heath(1912) では, ギリシャ文字はアルファベットに置き換えられ, 原文の内容を損なわない程度に比や数式の現代的な表記が使用されていて, 私たちには馴染みやすいものになっている。邦訳には, 三田(1972), 佐藤(1979)がある。三田(1972) は, Heiberg(1910) を基に Heath(1912) を参考に訳出したもので, アルファベットと比や数式の現代的な表記が使用されている。佐藤(1979) は, Heiberg(1910) に従って訳出したものであるが, 訳出されているのは命題 2 と命題 3 の前半部分だけである。

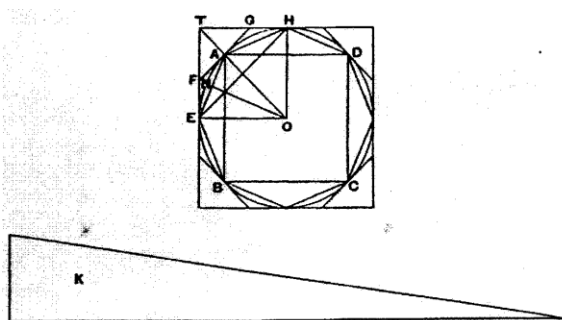
本稿の目的は, 円周率教材のルーツであるアルキメデスの書『円の計測』の(現在学校で使われているものに近い平易な表現を心掛け, 馴染みやすい)日本語訳を作成することである。ここでは Heath(1912) の英訳に従い, アルキメデスの書『円の計測』を訳出する。

2. アルキメデス『円の計測』

命題 1.

円の面積は, 直角を挟む一辺が円の半径に, もう一辺が円の周長に等しい直角三角形の面積に等しい。

ABCD を与えられた円とし, K をその三角形とせよ。



そうして, もしその円が K に等しくないとすれば, それはより大きいか, より小さいかのどちらかである。

I. もし可能であるならば, その円が K より大きいとせよ。

正方形 ABCD を描き, 弧 AB, BC, CD, DA を半分にし, (もし必要であれば) 更にそれを半分にし, というように, 円が K より超過している分よりも総和が小さくなるような切片(弓形)に分割していき, 分割点を頂点とする多角形の辺になるまで続けていく。

そうすると, 多角形の面積は K よりも大きい。

AE をその多角形の辺とし、ON を中心 O から AE に引かれた垂線とせよ。

ここで ON は円の半径より小さく、それ故に K の直角を挟む一辺よりも小さい。また、多角形の周長は円の周長より小さい、即ち、K の直角を挟むもう一辺よりも小さい。

それ故、多角形の面積は K より小さい。これは仮定に矛盾する。

よって、円の面積は K より大きくはない。

II. もし可能であるならば、その円が K より小さいとせよ。

正方形が描かれ、E、H で円に接し隣接する 2 辺は T で出会うとせよ。隣接する接点間の弧を 2 等分し、分割点における接線を引く。A を弧 EH の中点とし、FAG を A における接線とせよ。

そうすると、角 TAG は直角である。

それ故、 $TG > GA$
 $> GH$.

その結果、三角形 FTG は面 TEAH の半分より大きい。

同様にして、もし弧 AH が 2 等分され、分割点における接線が引かれたとすると、それは面 GAH から半分より多くを切り取るであろう。

こうして、この過程を繰り返していき、外接多角形と円との間隙が埋められていき、そして遂には、(外接多角形と円との差である) 切片の総和は、K が円より超過している分よりも小さくなるであろう。

そうすると、多角形の面積は K より小さい。

さて、O から多角形の各辺に引いた垂線は円の半径に等しく、多角形の周長は円の周長より大きくなるから、多角形の面積は三角形 K よりも大きいことになる。これは不可能なことである。

よって、円の面積は K より小さくはない。

したがって、円の面積は K より大きくも小さくもないから、円の面積は K の面積に等しい。

命題 2.

円の面積は、その直径を一辺とする正方形

の面積に対して、11 が 14 に対する比を持つ。

[ここにヒースの注釈が記されているが、省略する。]

命題 3.

円の周長の直径に対する比は、 $3\frac{1}{7}$ より小

さく、 $3\frac{10}{71}$ より大きい。

[ここにヒースの注釈が記されているが、省略する。]

I. 円の直径を AB とし、中心 AC を O、A における接線を AC とせよ。さらに角 AOC を直角の 3 分の 1 とせよ。

そうすると、

$$OA : AC [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153 \dots\dots (1),$$

そして

$$OC : CA [= 2 : 1] > 306 : 153 \dots\dots (2).$$

一回目として、角 AOC を 2 等分し、D で AC と出会う OD を引く。

$$\text{今、} CO : OA = CD : DA,$$

[ユークリッド原論、第 6 巻、命題 3]
であるから、

$$[CO + OA : OA = CA : DA, \text{ または}]$$

$$CO + OA : CA = OA : AD.$$

それ故 [(1) と (2) より]

$$OA : AD > 571 : 153 \dots\dots\dots (3).$$

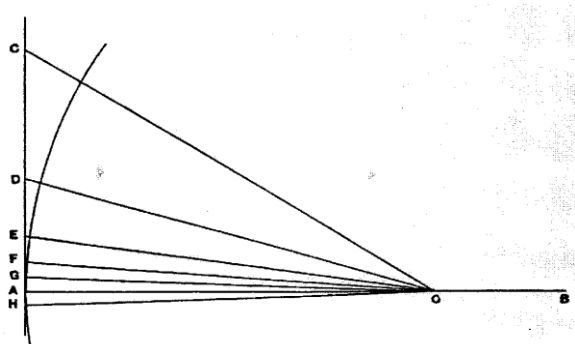
となり、

$$OD^2 : AD^2 [= ((OA^2 + AD^2) : AD^2 \\ > (571^2 + 153^2) : 153^2]$$

$$> 349450 : 23409$$

となるから、

$$OD : DA > 591 \frac{1}{8} : 153 \dots\dots\dots (4).$$



二回目として、角 AOD を 2 等分し、E で AD と出会う OE を引く。

$$[\text{それで、} DO : OA = DE : EA$$

$$\text{となり、} DO + OA : DA = OA : AE .]$$

それ故、

$$OA : AE [> (591 \frac{1}{8} + 571) : 153 ,$$

((3), (4) より)]

$$> 1162 \frac{1}{8} : 153 \dots\dots\dots (5).$$

[さらに次のようになる。

$$OE^2 : EA^2 > \{ (1162 \frac{1}{8})^2 : 153^2 \} : 153^2$$

$$> (1350534 \frac{33}{64} + 23409) : 23409$$

$$> 1373943 \frac{33}{64} : 23409 .]$$

そして、

$$OE : EA > 1172 \frac{1}{8} : 153 \dots\dots\dots (6).$$

三回目として、角 AOE を 2 等分し、F で AE と出会う OF を引く。

そうすると、[上の(3)と(5)に相当する] 次のような結果を得る。

$$OA : AF > [(1162 \frac{1}{8} + 1172 \frac{1}{8}) : 153]$$

$$> 2334 \frac{1}{4} : 153 \dots\dots\dots (7).$$

[それ故、

$$OF^2 : FA^2 > \{ (2334 \frac{1}{4})^2 + 153^2 \} : 153^2$$

$$> 5472132 \frac{1}{16} : 23409 .]$$

そして、

$$OF : FA > 2339 \frac{1}{4} : 153 \dots\dots\dots (8).$$

四回目として、角 AOF を 2 等分し、G で AF と出会う OG を引く。

そうすると次のようになる。

$$OA : AG [> (2334 \frac{1}{4} + 2339 \frac{1}{4}) : 153 ,$$

((7), (8) より)]

$$> 4673 \frac{1}{2} : 153$$

ここまで、直角の 3 分の 1 である角 AOC は、四回ほど、2 等分されたから、次のよう

になる。

$$\angle AOG = \frac{1}{48} \text{ (直角)}.$$

OA のもう一方の側に角 AOG と等しい角 AOH をつくり, GA が OH と H で出会うようにせよ。
そうすると,

$$\angle GOH = \frac{1}{24} \text{ (直角)}.$$

したがって, GH は円に外接する 96 辺の正多角形の一辺となる。
そして,

$$OA : AG > 4673 \frac{1}{2} : 153$$

であり,

$$AB = 2OA, \quad GH = 2AG$$

であるから, 次のようになる。

$$AB : (96 \text{ 辺の多角形の周長})$$

$$[> 4673 \frac{1}{2} : 153 \times 96]$$

$$> 4673 \frac{1}{2} : 14688 .$$

ところが,

$$\frac{14688}{4673 \frac{1}{2}} = 3 + \frac{667 \frac{1}{2}}{4673 \frac{1}{2}}$$

$$[< 3 + \frac{667 \frac{1}{2}}{4672 \frac{1}{2}}]$$

$$< 3 \frac{1}{7}$$

それ故, (多角形の周長より小さい) 円の周

長は, 直径 AB の $3 \frac{1}{7}$ 倍よりなお一層もつとも
っと小さい。

II. 次に AB を円の直径とし, C で円に出合い, 角 CAB が直角の 3 分の 1 となるような角 CAB をつくる。BC を結ぶ。

そうすると,

$$AC : CB [= \sqrt{3} : 1] > 1351 : 780 .$$

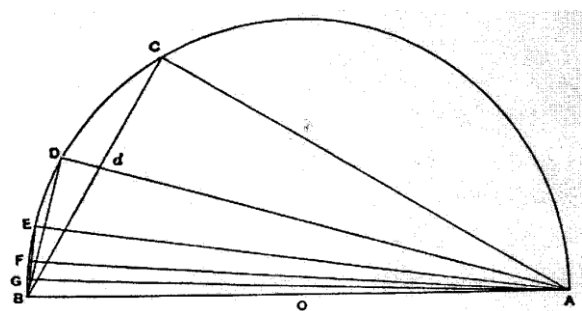
一回目として, AD は角 BAC を 2 等分し, d で BC に, D で円に出合うとせよ。BC を結ぶ。
そうすると,

$$\angle BAD = \angle dAC$$

$$= \angle dBD ,$$

そして, D, C での角は両方とも直角である。

三角形 ADB, [ACd], BDd は相似になる。



$$\text{それ故, } AD : DB = BD : Dd$$

$$[= AC : Cd]$$

$$= AB : Bd$$

[ユークリッド原論, 第 6 巻, 命題 3]

$$= AB + AC : Bd + Cd$$

$$= AB + AC : BC$$

$$\text{また, } BA + AC : BC = AD : DB$$

[ところが, 上のことから

$$AC : CB < 1351 : 780$$

であり, 一方で,

$$BA : BC = 2 : 1$$

$$= 1560 : 780 .]$$

それ故,

$$AD : DB < 2911 : 780 \dots\dots\dots (1) .$$

[よって,

$$AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2$$

$$< 9082321 : 608400 .]$$

したがって,

$$AB : BD < 3013 \frac{3}{4} : 780 \dots\dots\dots (2) .$$

二回目として, AE は角 BAD を 2 等分し, E で円に出合うとせよ。BE を結ぶ。

そうすると, これまでと同様の方法で次のことが証明される。

$$AE : EB [= BA + AD : BD$$

$$< (3013 \frac{3}{4} + 2911) : 780 ,$$

((1), (2) より)]

$$< 5924 \frac{3}{4} : 780$$

$$< 5924 \frac{3}{4} \times \frac{4}{13} : 780 \times \frac{4}{13}$$

$$< 1823 : 240 \dots\dots\dots (3) .$$

[よって,

$$AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$$

$$< 3380929 : 57600 .]$$

それ故,

$$AB : BE < 1838 \frac{9}{11} : 240 \dots\dots\dots (4) .$$

三回目として, AF は角 BAE を 2 等分し, F で円に出合うとせよ。

そうすると,

$$AF : FB [= BA + AE : BE$$

$$< 3661 \frac{9}{11} : 240 ,$$

((3), (4) より)]

$$< 3661 \frac{9}{11} \times \frac{11}{40} : 240 \times \frac{11}{40}$$

$$< 1007 : 66 \dots\dots\dots (5) .$$

[よって,

$$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$$

$$< 1018405 : 4356 .]$$

それ故,

$$AB : BF < 1009 \frac{1}{6} : 66 \dots\dots\dots (6) .$$

四回目として, AG は角 BAF を 2 等分し, G で円に出合うとせよ。

そうすると,

$$AG:GB [= BA+AF:BF]$$

$$< 2016 \frac{1}{6}:66,$$

((5), (6)より)

[そして,

$$AB^2:BG^2 < \{(2016 \frac{1}{6})^2 + 66^2\}:66^2$$

$$< 4069284 \frac{1}{36}:4356.]$$

それ故,

$$AB:BG < 2017 \frac{1}{4}:66,$$

となり,

$$BG:AB > 66:2017 \frac{1}{4} \dots\dots\dots (7).$$

[さて、直角の3分の1である角BACを四回ほど2等分した結果としての角BAGは、直角の48分の1に等しい。

そうすると、BGに対する中心角は

$$\frac{1}{24} \text{ (直角).}]$$

それ故、BGは96辺をもつ内接正多角形の一辺である。

(7)から次のことが導かれる。

$$(\text{多角形の周長}):AB [> 96 \times 66:2017 \frac{1}{4}]$$

$$> 6336:2017 \frac{1}{4}.$$

$$\text{そして, } \frac{6336}{2017 \frac{1}{4}} > 3 \frac{10}{71}$$

円の周長は直径の $3 \frac{10}{71}$ 倍よりなお一層も

つともっと大きい。

したがって、円の周長の直径に対する比は、

$$3 \frac{1}{7} \text{ より小さく, } 3 \frac{10}{71} \text{ より大きい。}$$

3. おわりに

訳出する過程において、改めて何度もアルキメデスの考えの素晴らしさには驚かされた。また、命題2の存在に関わる謎、命題3で使

用されている $\sqrt{3}$ の近似値に関わる謎はもちろん、アルキメデスの方法に対する疑問、興味、関心はいっぱいに広がるばかりであった。

本稿で試みた日本語訳が、これからの円周率に関わる教材研究や教材開発の一助となれば、筆者の喜びとするところである。

引用・参考文献

- Heath, T. H. ed. (1912). The Works of Archimedes, *MEASUREMENT OF A CIRCLE* (pp. 91-98), Dover Publications, Inc., New York.
- 三田博雄 訳 (1972). 「アルキメデスの科学」 (pp. 385-505), 『世界の名著 9 ギリシアの科学』 (田村松平 責任編集), 中央公論社.
- 佐藤徹 (1979). 「第3章 アルキメデスー『円の計測』と『螺旋について』ー」 (pp. 163-253), 『数学の歴史 1 ギリシアの数学』, 共立出版.
- 伊達文治 (1992). 「「円周率」関連教材についての考察ー解析基礎分野の一教育内容としてー」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第74巻・第7号, pp. 29-34.
- 伊達文治 (1993). 『アルキメデスの数学ー静力学的な考え方による求積法ー』, 森北出版.

三次元空間における角に関する困難性についての研究

三ツ間 伸太郎

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

中学校の空間図形領域の学習では、図形の性質を直観的に図から読み取るだけでなく、数学の世界での推論を通して考察することが求められる。空間図形に関する数学教育の先行研究では、空間図形の学習における困難性がしばしば指摘されている(熊倉他, 2002)。また、学力学習状況調査の結果などから、今日でも、子どもたちが空間図形を学習することには困難性が存在していることがわかる。空間図形の困難性に関する研究では、これまで見取図などの表現から生徒がいかにして空間図形を読み取るのか、生徒の思考に焦点を当て、空間的推論にはどのような水準があるのかなどがしばしば研究されてきた(影山, 1998; 久米・村上, 1997 など)。そこでは、空間図形のイメージができないことが困難性の主たる要因と考え、生徒が図形のイメージを付けることによりこうした困難性を克服することにつながると考えられてきた(国立教育政策研究所, 2012)。

一方で、三次元空間における図形は、二次元平面の場合と比較すると、複雑で必ずしも容易に捉えられるものではない。例えば、角について考えれば、二次元平面の場合には二つの半直線によって作られる角以外に角はなかったもの

の、三次元空間では、面と面によって作られる角、直線と面によって作られる角など異なる種類の角が存在し、一概に角を捉えることはできない。このことからすれば、空間図形に関する困難性を検討するに当たって、三次元空間における図形そのものに着目し、まずはそれらがどのようなものか明確にすることが必要と考える。そこで本研究は、三次元空間における角に焦点を当て、空間図形の性格という視点から、学習者が角に対してもつ困難性を明らかにすることを目的とする。特に、二次元表現の図から空間図形やその性質を認識する際の困難性ではなく、模型などの三次元のモデルを用いた場合にも起こり得る、三次元空間の角そのものの捉えにくさといった、角の特殊性に起因する困難性を明らかにしたい。なお、本研究は修士論文作成のために進められたものである。詳細は、修士論文を参照いただきたい。

2. 研究方法

上述の目的を達成するため、まず、図形の性格や角の性格とは何かを説明する。これは、本研究における視点を明確にするためである。次に、角の性格について述べる。ここでは中学校数学で扱われる角に限らず、空間における角にどの

ようなものが存在するか示す。その上で、角の性格に起因する困難性が生徒の困難性となっていることを示すため、質問紙による調査およびインタビュー調査を行った。質問紙による調査では、これまで指摘されてきた困難性が存在していることを確認し、インタビュー調査は困難性の要因を明らかにするために行った。インタビュー調査を分析する際に角について捉え方を明確にすることで、角の性格に起因する困難性がより明確になる。そのためにまず、空間図形の角を捉える枠組みを提案し、枠組みをもとにインタビュー調査の結果を分析し、困難性について考察する。最後に教育への示唆と今後の課題について述べる。

3. 図形と表現

本研究では、「図形の性格」や「角の性格」などという言葉を用いる。図形そのものに焦点を当て、その性質や特徴について議論するためである。ここでは、図形と図について本研究での捉え方を示す。本研究では、Parzysz (1988) を参考に「図形」は現実には存在しない数学世界の抽象的な幾何学的対象と捉える。そして図形を現実世界に表現したもののの中で、2次元の表現が「図」、3次元の表現が「モデル」である。この関係は図1のように表わされる。したがって、本研究の焦点は、現実世界の図的な表現から数学世界の対象を捉える際の学習者の困難性ではなく、数学世界の対象を捉えることの困難性である。

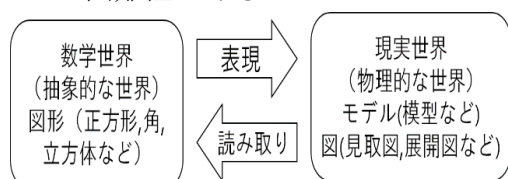


図1：図形と図

4. 角の性格

角の性格とはいかなるものであろうか、そしてその性格に起因する困難性にはどのような可能性が存在するだろうか。角の性格を知るため、三ツ間 (2015) において三次元空間における角について学校教育内に限らず、歴史上の数学をはじめ一般の数学においてどのような角が存在し、その扱いがどのようなものであるか検討した。その結果、三次元空間における角について、ユークリッドの時代より少なくとも4種類の角が存在することが分かった。直線相互の傾きである「平面角」、直線と平面の傾きである「直面角」、面同士の傾きである「二面角」、二直線より多くの直線からなる「立体角」である。それぞれの角の性格については三ツ間 (2015) を参照いただきたい。

では、これらの角が空間図形に存在していることによって、空間図形の角にどのような困難性が考えられるのだろうか。筆者が考える空間図形の角の困難性は、次の3点である。一つ目は問題で問われた角を正しく捉えること。二つ目は角の大きさを求める際に帰着させるべき平面角を決定するとき、様々な条件を考慮に入れなければならないこと。三つ目は、空間図形では推論が複数の段階にわたるため複雑であり、解答に多くの知識を必要とすることである。

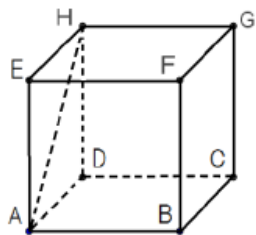
5. 調査問題について

前節で述べた困難性が実際に生徒の困難性となっていることを示すため、調査問題を選定し、質問紙調査およびインタビュー調査を行った。本節では選定した調査問題がどのようなものであるか述べ、それら問題を解く際にどのような

困難性が表出するか検討する。

本研究では、空間図形の角について問う問題を選定し、図2に示す二つの問題を用いることとした。

問題1 右の図のような立方体があります。AHは面ADHEの対角線です。このとき、 $\angle HAB$ の大きさは何度ですか？また、その理由をできるだけ詳しく書きなさい。



問題2 右の図のような立方体があります。AHとAFはそれぞれ面ADHEと面ABFEの対角線です。このとき、 $\angle HAF$ の大きさは何度ですか？また、その理由をできるだけ詳しく書きなさい。

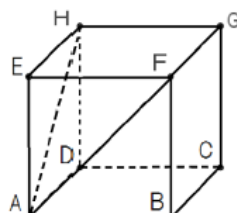


図2：本研究で用いる角についての問題

どちらの問題も空間における角を直接的に問う問題であり、先行研究等の調査にてよく扱われる問題である。角の捉え方が直接的に解答につながるという点で、角の性格に起因する困難性を探ることに適した問題と考えた。この2問では、角の捉え方がどのように困難性として表出するだろうか。

問題1は、 $\angle HAB$ の線分HAとABがなす平面角の大きさを求める問題であり、正答は 90° である。その正答を直観に頼らずに導くには、まず辺ABと面ADHEに着目し、ABCD-EFGHが立方体であることから $EA \perp AB$ かつ $AD \perp AB$ であるため、 $AB \perp ADHE$ であることを導く。次に、面Pと直線Lが垂直関係であるならば面上の任意の直線Mと直線L

が垂直であることを利用して、 $AB \perp AH$ を導く。最後に、 $\angle HAB$ は直線AHとABからなる平面角であることから $\angle HAB = 90^\circ$ とする必要がある。問題1の類題である平成24年全国学力・学習状況調査（選択問題で理由は問わない場合）では正答率が62.5%であったと報告されている。学力調査の報告書では、立方体における辺と面に含まれる直線との位置関係の理解に課題がある(p.242)。とのことである。筆者はこの問題に対して生徒が正答を与える難しさはそれだけではないと考える。例えば、立方体が面から構成されていると考えれば、この問題では、面がないところの角の大きさが問われている。これは、初学者にとって奇妙に感じるのではないだろうか。角の多様性という視点から考えれば、平面角を考えず、他の角に注意がいくこともあろう。例えば、次のものが考えられる。

直面角：HAとABCDからなる角

二面角：ABCDとABGHからなる角
(これは面を考えた生徒のみ)

立体角：HA, AE, ABからなる角

側面にできる角： $\angle EAB$ と $\angle HAE$ の和からなる角

この問題1では、これらの角の捉え方に応じて解答は異なるであろう。例えば側面にできる角と捉えている場合には $\angle EAB + \angle HAE = 135^\circ$ といった解答が考えられる。

問題2は、熊倉他(2002)に取り上げられた問題であり、これまで空間図形の研究においてよく扱われている問題である。問題1と立方体の頂点の記号を合わせた。問題2も問題1と同様、平面角の大きさを求めるものである。正答は、 $\angle HAF$ を平面角と捉え、切断面HAFが

正三角形であることから $\angle HAF = 60^\circ$ である。ただ、問題 1 と同様 $\angle HAF$ をいかなる角と捉えるのか、その可能性は複数ある。例えば次のものが考えられる。

平面角：平面 HAF 上にできる線分 HA と AF からなる角

直面角：線分 HA(or AF)と面 ABFE (or ADHE) がつくる角

二面角：面 ABFE と面 ADHE がつくる角

立体角：線分 EA,EB,ED からなる角

側面にできる角： $\angle EAE$ と $\angle HAE$ の和からなる角

この問題も角の捉え方に応じて解答が異なる。例えば、二面角と捉えていた場合には立方体の側面同士のなす角が 90° であることから、 $\angle HAF = 90^\circ$ といった解答が考えられる。

これらの問題を用い、はじめに質問紙の形式で中学生を対象とした調査を行った。問題 1 については、正答である 90° と解答した生徒が 43.3 %で、 45° や 135° という誤答も多く見られた。問題 2 については、熊倉（2002）の調査同様、正答率は低かった。正答である 60° と解答した生徒は 16.7 % であり、 90° の誤答が 50 % もあった。

質問紙調査において生徒に見られた典型的な誤答例から、角の捉え方と角の大きさを求める際の操作に誤答の要因があることが考察された。しかしながら、生徒の記述からでは生徒の角に対する捉え方や考え方を導くことは不十分であった。そのため次節以降において角の捉え方や捉え方を捉える枠組みを提案し、インタビュー調査の結果から困難性

を考察する。

6. 角を捉える枠組み

生徒の角に対する考え方や捉え方をより明確に捉えるためにコンセプションを提案した。そこでは、Balacheff のコンセプションをもとに、4 つの要素の組 (P, R, L, Σ) によって、生徒の置かれた状況を含め、その場におかれた生徒が一般的にもちうる考えを捉えるための枠組みを提案した。P は「問題の集合」であり、生徒が問題解決する際の状況の特徴づけた問題の集まりである。本研究における P は、前章で選定した調査問題である。R は「操作・規則の集合」である。ある問題を解決する際に、問題を変換したり、記号化したりするなどの操作の集まりである。本研究では操作・規則を、次の 2 つの変数で特徴づけられると考えた。

- x. 角の大きさの求め方：直接的、間接的。
- y. 角の大きさの判断：知覚的¹、半論理的、論理的。

x は角の大きさを別の角の大きさに帰着して求めるか否かの区別である。間接的であるとき、問題で問われる平面角を二面角や直面角に帰着させる場合、平面角を別の部分にある平面角に帰着させる場合にも間接的であるとした。例えば問題 1 において、 $\angle HAB$ の大きさを頂点 H から頂点 E まで点を移動させることによって $\angle EAB$ の大きさに帰着して求めた場合には間接的な操作であるといえる。y は角の大きさを見た目で知覚的に求めるのか、もしくは何かしらの仮

¹ 筆者の修士論文においては“知覚的”の代わりに“直観的”という語を用いている。本稿ではこれを見た目という知覚

によって判断しているものと考え、知覚的という語に修正した。

定から推論し論理的に求めるのかの区別である。論理的とは、中学校の教科書に書いてある性質や定理を用いて、問題に対して不適切な根拠を用いた推論を用いていない場合に論理的であるとする。例えば、問題 1 において $\angle HAB$ の角の大きさを求める際に長方形だからという根拠で解答した場合には不適切な根拠を用いた推論である。なぜならば、四角形 $ABGH$ が長方形であることはまだ証明されていない事柄である。よってこの推論が、図の見た目を頼りにした推論であるといえるためである。また、角の大きさを求める際に展開図を用いることも展開図が角の大きさを保存しないため不適切な根拠を用いた推論となる。このような解答は論理的な操作ではなく、半論理的な操作であるとする。一方、面 $ADHE$ と辺 AB からなる直面角が 90° なので $\angle HAB$ が 90° や、合同な立方体を複製し問題 1 に与えられた立方体につける場合に平角（直線の角）の半分になるから 90° などの解答は、中学校数学で習う（教科書に乗っている）性質を用いていることで証明することができる程度のものであるため²、論理的な操作であるとする。L は図・式・グラフ・言葉などの「表現体系」である。これには、問題で与えられる見取図の他にも、生徒が解答を説明する際などに用いるジェスチャーなどが含まれる。表現によって用いることのできる操作が異なることなどが考察された。 Σ は「制御構造」であり、操作の選択や解答に対して、それらが正しいと判断する拠り所となるものである。本研究では、空間図形における角についての制御構造には以下の 4 つの

ものを考えた。

Σ_1 ：平面角とは、互いに交わる二直線がなす平面上にあってその二直線が作る図形である。

Σ_2 ：平面角とは、互いに交わる二直線が作る図形である。

Σ_3 ：平面角とは、与えられた平面上にあって互いに交わる二直線が作る図形である。

Σ_4 ：三次元空間における角とは、いくつかの幾何学的対象（直線や平面）が作る図形である。対象間に作られる空間的な広がりを示す。

Σ_1 は、平面角を二直線とそれらがなす平面によって捉えるものである。最も一般的な考えであろう。 Σ_2 は、 Σ_1 と同様に平面角が平面上にあるものと考ええるものの、その平面は二直線がなす平面とは限らず、既に与えられた平面と捉える考えである。この考えでは、平面がない場所には角がないと考える。 Σ_3 は、平面を含めず、二直線によってのみ平面角を捉える考え方である。 Σ_4 は、三次元空間における角を、直線同士のなす角や面同士がなす角などと区別せずに、いくつかの幾何学的対象が作る空間的な広がりを角と考えるものである。

具体的に問題 1 であれば、 Σ_1 の制御構造をもつ生徒は $\angle HAB$ を対角線 HA 、 AB と切断面 $ABGH$ の 3 つの要素によって捉えている（図 3 上図）。また、 Σ_2 の制御構造をもつ生徒は HA 、 AB のみで角を捉え（図 3 中図）、 Σ_3 の生徒は $\angle HAB$ を $\angle HAE$ と $\angle EAB$ の和として捉える（図 3 下図）。 Σ_4 の生徒は明確に角が“この部分”であると指し示すことは困難であろう。そのため、平面角を他の角（二面角

² もちろん厳密な証明を行うことは容易

ではない。

や直角)としての捉え, 解答することが考えられる。

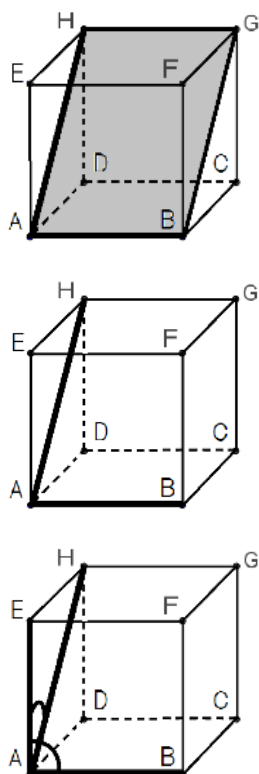


図 3：それぞれの制御構造をもつ生徒が捉える角（上： Σ_1 , 中： Σ_2 下： Σ_3 ）

7. 角の捉え方と困難性

本節では, まず角の捉え方と困難性との関係について明確にするために行ったインタビュー調査の概要を示す. 次に, 調査結果の分析において提案した枠組みをどのように用いたか示す. そこでは, インタビュー調査で得たある生徒 F のデータをもとに, 生徒の解答のモデル化を行い, 生徒 F がもつ角の性格に起因する困難性を検討した. そして, 様々な生徒を分析した結果得られた, それぞれの制御構造をもつ生徒が行った解答の特徴と角の性格に起因する困難性との関係について考察を行う.

(1) インタビュー調査の概要

質問紙による調査で不十分であった生徒が空間における角をどのように捉えているか明確にした上で, 角の性格に起因する困難性を明確にするため, インタビュー調査を行った. ここではその概要を示す.

対象・時期：新潟県にある公立中学校第 2 学年（空間図形は既習）の生徒 6 ペア（12 名）に対し, 平成 27 年 7 月 16, 17 日に実施した.

問題・方法：調査問題は 2 問である. ペアで行い, 調査時間は個人で解答する時間 10 分, 互いに自分の解答を説明する時間 5 分, インタビューアによる質問 10 分の計 25 分とした.

図形そのものについての困難性を考えるために, 質問時にポリドロンによる模型, 切断面がわかる紙で作った模型を提示した (図 4).

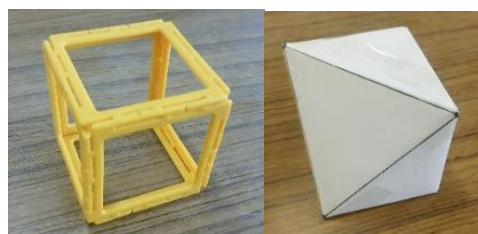


図 4：質問時に提示したポリドロンと紙模型

(2) 枠組みを用いた分析事例（生徒 F）

ここでは, 前節において示した枠組みを用いた分析の具体例として, 生徒 F の分析結果を示す. 生徒 F を取り上げる理由としては, 今回の問題を解く上で, 生徒 F が空間図形の角について正しい捉え方である Σ_1 の制御構造をもつが, 問題 2 に対して誤答を与えているため, これまで先行研究において指摘されたイメージなどの困難性ではない, 角の性格に起因する困難性をもつと考察されるため

である．この他の生徒の分析事例については筆者の修士論文を参照いただきたい．

生徒 F は，問題 1 と問題 2 について個人で 10 分程度考え解答を導いた．問題 1 に対して生徒 F は正答である $\angle HAB = 90^\circ$ とし，問題 2 に対しては $\angle HAF = 90^\circ$ と解答していた．

生徒 F は，問題 1 では，対角線 BG を引くことによって切断面 ABGH を考えた．その上で，切断面にできる図形が長方形もしくは正方形であることから， $\angle HAB$ が 90° であると解答した (No.12)．表現システム (L) がポリドロンである場面では，「 90° より大きい気がするなど」見た目という要素に解答を揺り動かされている場面もあったが，解答を変更することはなかった．

12 F F はここ (BG) あるじゃん．ここにも対角線引くとすると，そしたらさ長方形できる，正方形？

生徒 F は対角線 BG を引くことによって切断面 ABGH を作り，その切断面にできる図形が長方形であることから $\angle HAB$ が 90° であると生徒 E³ に説明していた．このことから，この生徒 F の操作・規則は R (直接的，半論理的) であると判断した．直接的である根拠は，切断面を考えることで，他の角に帰着させず $\angle HAB$ を求めているためである．また，半論理的である理由は，切断面にできる図形の性質から $\angle HAB$ の大きさを求めるという論理的な操作をする．一方で，四角形だから 90° と述べており，その図形がどんな四角形であるかについての根拠は，立

方体の性質などではなく直観的であるためである．生徒 F は角について No12 にあるように切断面を用いて捉えている．これは，角について二直線と平面によって捉えているといえる．このことは，表現システム

(L) がポリドロンである際に，紙を用いて角について考えていることからわかる (図5)．



図 5：生徒 F の角についての表現

このことから生徒 F は， Σ_1 の制御構造をもつと判断できる．角についての正しい捉え方であるといえる Σ_1 の制御構造をもつ生徒 F の問題 1 に対する考え方はコンセプションを用いて次のようにモデル化された (表 2)．ここでは，問題 1 についてモデル化を行ったが，生徒 F は問題 2 においても同様の制御構造であると判断でき，ほぼ同様のモデル化を行うことができたためここでは省略する．

表 2：生徒 F のコンセプション

P	問題の立方体において $\angle HAB$ の大きさを求める
R	切断面を考え，平面角 ($\angle HAB$) の大きさを求める (直接的) 切断面の図形から角の大きさを求める (半論理的)
L	見取図，ポリドロン，紙の切れ端
Σ	Σ_1 : 平面角とは，互いに交わる二直線がなす平面上にあってその二直線が作る図形である

このようにモデル化した角について

³ 生徒 F のペアの生徒が生徒 E である

の考え方や捉え方をもとに、 Σ_1 の制御構造をもつ生徒に対して存在する、角の性格に起因する困難性がどのようなものであるか考察を行った。

生徒 F は問題 2 に説明する際にも紙を用いた表現を使い、 $\angle HAF = 90^\circ$ と解答していた(図 6)。



図 6：生徒 F が考えた $\angle HAF$

この解答から生徒 F の誤答の要因は、平面の作り方であるといえる。つまり、角を正しく捉えていたとしても、角の大きさを帰

着させるための平面を作ることに困難性があるといえる。また、生徒 F が紙の切れ端という表現を用いたのは、制御構造が角の制御構造 Σ_1 を持ち、角を平面と二直線によって捉えているためであろう。つまり、制御構造は解答を説明する際の表現システムにも影響を与えることがわかる。

(3) それぞれの制御構造をもつ生徒の特徴

ここでは、先ほど述べた Σ_1 以外の制御構造をもつ生徒の解答にどのような特徴があるか検討した。また、生徒の解答と角の性格に起因する困難性との関係について述べる。

角が二直線によって作られる部分であると捉える制御構造 (Σ_2) を持っていたと分析された生徒は、角を何かしらの部分に帰着させ、角の大きさを求めている。例えば、問題 2 において、 $\angle HAF$ を立方体の側面と側面 (ADHE と ABFE) の二面角に帰着させて 90° と求めるなどの解答である。つまり、 Σ_2 の制御構造では、帰着させた角 (平面角とは限らな

い) によって解答が異なることが特徴である。これは、空間図形において帰着させる角によって二直線の間にある部分の大きさが異なるという性格に起因した困難性である。

Σ_3 の制御構造をもつ生徒の解答では、面を与えた場所によって解答が異なることが特定できた。問題 2 において生徒が対角線 HA, AF の間に面がない、と考えていれば、問題 2 において見取図では、与えられている面は立方体の側面である。つまり、この制御構造をもつ生徒にとって、 $\angle HAF$ は側面に存在している角である。この生徒が $\angle HAE$ と $\angle FAE$ を足し合わせて 90° と解答することは自然な解答であるといえる。これは角の大きさを求める際には帰着させる平面を様々な条件を考慮に入れて定めなければならないという、角の性格に起因する困難性といえる。

Σ_4 の制御構造をもつ生徒は、そもそもの部分が角なのか、どのようにその大きさを求めるか、明確にすることができなかった。この制御構造をもつ生徒の特徴は他人の解答に左右されやすいことである。それぞれの操作を空間図形の何かしらの部分を求めていると捉え、その妥当性を判断するためであるといえる。

以上の分析から、生徒が様々な制御構造をもつことがわかった。これは、生徒が空間図形の角を正しく捉えることが困難であるということを示している。そして、このことは空間における角の多様性に起因する。また、角を正しく捉えたとしても、角の大きさを求める際に様々な条件を考慮に入れなければならないという角の性格は、困難性の要因となっていると考えられる。

8. 考察

以下の2つの疑問に対して前節までの分析をもとに考察を行う。

- ・三次元空間における角にはいかなる困難性があるか

- ・角の性格に起因する困難性は生徒にどのような影響を与えているか

まず、三次元空間における角にはどのような困難性があるかである。この回答には次の2つを示す。一つは、空間図形における角には平面角、二面角、直面角、立体角など多様な角が存在している。そのそれぞれの角を区別し、問題で問われている角がどの角であるか正しく捉えることに困難性があるといえる。これは、空間図形における角の多様性に起因する困難性である。このような困難性は、実際に空間図形の角についての問題を解く際に生徒が誤答を与える要因となりうる。平面角の大きさを問う問題において二面角の大きさを解答すれば、多くの場合誤答となるであろう。実際に、 Σ_2 の制御構造をもつ生徒は、問題2において平面角である $\angle HAF$ を二面角（面 $ADHE$ と面 $ABFE$ との間にできる角）と捉えたために 90° と誤答を与えていた。このように、空間図形の角についての問題では、数学的な性質を用いて推論する前段階ですでに誤答となっていることも少なくない。

二つ目は、三次元空間における角は、問われている角を正しく捉えたとしても、その大きさを求めることは容易ではないことである。例えば、二面角は2つの面の交線との垂直関係を考慮した二直線がなす平面角に帰着させ、その大きさを求めなければならない。また、平面角であっても、平面角をなす二直線（問題2ならば HA と AF ）によって作られ

る平面によってその大きさを捉えなければならない。これは、角の性格である

“角の大きさを求める際の複雑さ”に起因する困難性であるといえる。このことが生徒にとっての困難性でもあることは、 Σ_1 の制御構造をもつ生徒Fが問題2に対して誤答を与えていることからいえる。つまり、解答するためにいくつもの段階を踏まなければならないことは、学習する上での困難性となる。

では、上述の角の性格に起因する困難性は、生徒にどのような影響を与えるだろうか。一つは、角の多様性によって、生徒が様々な制御構造をもつ可能性があることである。これは、4つの制御構造の内、生徒がどの Σ をもつ可能性もあるということである。実際に、4つすべての制御構造をもつ生徒が見られた。生徒がもつ制御構造によって、解答を導く際に行う操作に対して、生徒自らが行う妥当性の判断も異なる。つまり、制御構造によっては誤答に対しても正しいと考える生徒がいる。これは、生徒が角の学習をする際の困難性といえるだろう。もう一つは、表現によって与えられた平面が異なると、生徒が行うことができる操作も異なるということである。これは空間における角の大きさが平面角に帰着させて定められていることが要因である。この性質は生徒が角について学習する際の障害となりうる。例えば、生徒が解答を変化させた際に、空間図形の角を理解したからこそ解答を変更したのではなく、表現に限定されたからこそ解答が変化した可能性があるということである。つまり、与えられる平面によって解答を出せる場合と出せない場合があるということである。このように、よくわからないがとりあえず解答は出せ

るということは、生徒が空間図形の角について理解したつもりにさせる可能性があり、生徒の角についての理解を妨げる一つの要因となりうる。帰着させる平面によって、その大きさが異なることは、空間図形の角だからこそのものであり、空間図形の角を複雑でよくわからないものであると考える生徒が多い要因である。

9. おわりに

ここでは、困難性の考察をもとに教育への示唆と今後の課題について示す。筆者が示す教育への示唆は次の2点である。一つは、空間図形などの複雑な図形にこそ様々な性質を数学的証明していく必要がある、数学的な見方や考え方を育てるためにも、空間図形において図形の性質などを用いて推論することが必要となるだろうということ。もう一つは、教師が生徒の認識に合わせた指導を行う必要があることである。つまり、生徒が正答を導くことだけでなく、角の性質についてどのように理解しているかを考える必要があるということである。

今後の課題は次の3点であると考え、生徒の制御構造の変化はどのような要因によって変化するのか検討すること。図形の性質などを用いた上で、生徒にとって理解しやすい方法で、生徒の空間図形学習の困難性の克服のための実践にはどのようなものが考えられるのか検討すること。角以外の空間図形の性格に起因する困難性について検討することである。

参考・引用文献

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002) "Students conceptions: an introduction to a formal characterization." *Cahier Leibniz*, vol.65.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575-593.

影山和也 (1998). 「空間的思考の階層性に関する考察」 数学教育論文発表会論文集, 第 31 巻, 63-68.

熊倉啓之, 中西知真紀, 八田弘恵, 国宗進 (2002). 「空間図形についての理解に関する研究」 数学教育論文発表会論文集, 第 35 巻, 289-294.

久米康子, 村上一三 (1997). 「立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察: 立方体を例として」 数学教育論文発表会論文集, 第 30 巻, 331-336.

国立教育政策研究所 (2012). 平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書

http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukou/04chuu_houkokusho.htm
2015/07/30 確認.

中村幸四郎他 訳・解説 (1996). ユークリッド原論 縮刷版. 共立出版

三ツ間伸太郎 (2015). 「空間図形領域における学習の困難性についての一考察 ～角そのものの性格に焦点を当てて～」 上越数学教育研究第 30 号, 93 - 100.

三ツ間伸太郎, 宮川健 (2015). 「三次元空間における角についての中学生のコンセプション」 日本数学教育学会第 48 回秋季研究大会発表集, 261-262.

数学的問題解決における「活用」に関する研究

—「活用」の「探究」に関する側面に着目して—

吉田 万里

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

本研究は、数学的問題解決の授業における学習の過程で出現する「活用」の様相を明らかにしようとするものである。「活用」には「習得」に関する側面と、「探究」に関する側面があり、「活用」を行うことで数学科の目標に関連して広く展開を進めることができる。このことは、平成20年に公示された中学校学習指導要領解説（数学編）「数学的活動と学習指導要領改訂の基本的な考え方」で、習得したことを活用して探求することについて、「習得」、「活用」及び「探究」を相互に関連させる展開を志向していくというこれからの方向性として明示されている。

このことについて、伊達（2012）は、「授業を知識・技能の習得の場とだけに捉えることからの脱却を図り、自らの中に数学をつくっていく授業を行っていくことを目指す、これからの学校数学の在り方を示唆するものとして高く評価できる。」（p.14）とし、「習得」、「活用」及び「探究」を相互に関連させる展開に対し次のように述べている。

「「習得、活用及び探求はこの順番に進むだけではない」と断ってはいるが、「習得したことを活用して探求する」という記述にみられるように、「習得→活用→探求」という順序のある活動が、今回の改訂の基本に

据えられている。筆者はさらに踏み込んで、これからの学校数学には、「探求の過程で現れる知識を活用して習得する（身に付ける）」、即ち「探求 $\leftrightarrow$ 活用 $\leftrightarrow$ 習得」の活動が必要であり、何よりも重視されなければならないと考えている。」（p.14）

このことから、習得したことを活用して探求することだけでなく、探究を行う上で必要となる知識を習得するために「活用」を行うことが、授業を知識・技能の習得の場とだけにしないためにも必要であると考え、本稿では「活用」の「探究」に関する側面に着目し、「活用」の様相を明らかにすることとした。児童・生徒が数学教育における問題を解決していくという数学的問題解決において生じる「探求」の過程で現れる未熟な知識（未だ既に習得された知識とはなっていない知識）はどのようなものがあり、またその未熟な知識のどのような「活用」が行われるのか、更にその「活用」によってどのような知識・技能が「習得」されるのかを考察していく。

この目的を達成するために、考察の方法として、高等学校第1学年を対象とした調査研究を用いて分析することとした。まず、数学的問題解決の授業とはどのようなものであるかを考察し、調査授業を考察に用いる妥当性を示す。次に、数学的問題解決における「活用」の「探究」に関する側面に

ついて焦点を当てていく。そして、調査研究から「探究」の活動で現れる「活用」の様相を浮き彫りにし、得られた新たな知識がどのようなものであるかを考察する。

2. 数学的問題解決の授業について

この節では、分析対象とする調査授業が研究目的に照らし妥当であることを示すために数学的問題解決が行われている授業について考察する。

問題解決の活動を通した授業の様相として、Polya. G.の4つの様相などが挙げられるが、問題解決の方略を取り入れるだけでは、具体的な問題に対する解決との差を明確にすることは難しい。教師から一方的に提示された問題も、問題を解決する必然性や理由が見えなければ、たとえ生徒にとって解決を阻む困難性が存在していても従属的な活動になるだろう。もしくは、解決することを放棄してしまう可能性さえ考えられる。受け身の学習でないことが求められることから、数学的問題解決が行われている授業では、学習者に主体性があることを前提として考えることとする。

その上で、R. Charles, F. Lester (1982)による問題分類、岩崎 (1992)による問題解決過程モデル、及び山本 (2015)の問い方についての思考メソッドの様相などから、扱う問題、問題を解決するための活動、活動による結果の3つの点に絞り、数学的問題解決が行われている授業が成立する条件をまとめることとした。以下で示すものは、3つの点において少なくとも必要であると考えられるものである。

【問題】

- ・ある特別の条件で解決が求められている。
- ・すぐには、解法が見つからないもの。

【活動】

- ・認識した問題を検討するための視点を絞る。

- ・問題解決の方略を分析する。
- ・問題解決の結果の妥当性を判断する。

【結果】

- ・新たな世界が切り開かれた。

本稿では、上記を数学的問題解決が行われている授業の成立条件として捉えることとする。

3. 数学的問題解決の授業における「活用」について

数学的問題解決における「活用」について、「活用」の「探究」の側面に着目していくことから、本稿における「探究」の定義を先に述べることとする。

(1)「探究」について

本稿における「探究」はDewey. J.の考えを基に定義することとした。

Dewey. J. (1938)はLogic: The Theory of Inquiryにおいて「探究 (Inquiry)」を次のように定義している。

「探究とは、不確定な状況を、確定した状況に、即ちもとの状況の諸要素を一つの統一された全体に変えてしまうほど、状況を構成している区別や関係が確定した状況に、コントロールされ、方向づけられた仕方 で転化させることである。」(デューイ, 上山春平編, 魚津郁夫訳, 1980, pp.491-492)

上記における「探究」は、「活用」による思考力等の育成と「活用」による知識の変容(習得)を目的としているものである。このことから、Dewey. J. (1938)の定義では、主体性や活動による転換について重視されており、総合的な学習など特別な時間を軸としているわけではないということが読み取れる。また、不確定な状況であった知識は、活動により、確定された状態へと変容することから、不確定な状況によって生じた「探究」から「活用」という活動を通すことにより、確定した状況へと変

容した知識を「習得」する、と「探究」「活用」「習得」の関係を述べることができる。

上記における Dewey. J. (1938) の定義と前章で述べた数学的問題解決の成立条件などを踏まえ、本稿における「探究」の捉えを、「不確定な状況を確定した状況にコントロールされ方向づけられた仕方で転化させること」とした。

(2) 「活用」について

「探究」「活用」「習得」の関係からみたとき、これら 3 つは個別に成立するのではなく、お互いに関連しあうことから、「習得→活用→探究」や「探求→活用→習得」といった学習の流れが存在することとなる。

「習得→活用→探究」のとき、「活用」は、問題を解決するために必要な知識・技能を「習得」したものなどから問題に当てはめること、つまり問題に適用させられるかが求められる。

「探求→活用→習得」のとき、「活用」は、「習得」のために行われている。始まりが「探究」からであり、「活用」することでまだ身に付いていない知識（未熟な知識）を確定したものへと変え、新たな知識を身に付けることとなる。このことから、「探求→活用→習得」の活動において、問題に適用できるかということは求められていないといえる。

これらのことから、「活用」の「探究」に関する側面から見たとき、本稿における「探究」「活用」「習得」の関係は、「習得→活用→探究」ではなく、「探究→活用→習得」の活動であるといえる。

(3) 未熟な知識について

また、「探究→活用→習得」の活動において、「活用」は、まだ身に付いていない知識（未熟な知識）を使うことで新たな知識として身に付けるために行われることとなると述べ、身に付いていない知識を未熟な知識として称したが、身に付いていない知識

が全て未熟な知識となるわけではない。

まず、未熟な知識とは、「探究」→「活用」→「習得」の活動が行われるとき、知識を習得するために行われる「活用」において使われる知識である。

「習得」→「活用」→「探究」の「活用」の際に使われる知識との違いは何であるかとされたとき、一つ目の理由は、「習得」→「活用」→「探究」における「活用」では、問題を解決するために当て嵌まる知識を適用させることが求められるということである。「探究」から始まるときの「活用」において使われる知識は、既習の問題において解決された事実であり、習得した結果、問題に対して適用できることがわかることとなる。つまり、「探究」から始まる「活用」で扱う知識は、その時点では、まだ適用することができない知識であるといえる。

では、覚えていなかったり、理解できていなかったりするために知識を適用できない場合、未熟な知識となるのか。このとき、覚えていない知識、理解できていない知識というものは、習得できていない知識と捉えることができる。

しかし、未熟な知識は、現在取り組んでいる問題において適用できるか否かが不明であり、活用を通して、習得している事実の適用できる範囲を広げることとなる。つまり、未熟な知識として知識は常に獲得されて、活用の範囲を広げていくことによって未熟な知識がより良い未熟な知識に変容していくということである。

このことから、「習得」から始まる「活用」で用いる知識が単に覚えていなかったり、理解できていなかったりするものであっても、その知識は習得ができていなかったものであると捉え、未熟な知識と捉えることはしないものとする。

本稿では、「活用」の「探究」に関する側面として、この未熟な知識の変容から「活

用」の様相について分析することとする。

4. 調査研究から見られる「活用」

本章では、分析の対象とした授業の概要を述べ、データの分析をしていく。

(1) 調査授業の概要

調査は、2015年9月から10月にかけての4週間、群馬県立高等学校普通科第1学年の「場合の数」の単元において行った。教科書における応用問題に相当する問題を作成し、その問題を学習前に解くことで、「探究→活用→習得」となる授業を提案し、実践した。

本稿では、「同じものを含む順列」における学習を対象に分析を行う。

この学習における目的は、次の2点とされている。

- ・重複順列との違いについて理解する。
- ・色々な場合の数の求め方を応用して求めることができる。

この目標を踏まえ、学習前に提示する問題を以下のものとした。

赤玉が3個、青玉が2個、黄玉が1個、入っている袋から玉を取り出して並べていくとき、取り出し方何通りありますか？

提示した問題の解決後は、通常の授業と同様に学習を進めてもらった。

この学習において、数学的問題解決が行われているか判断するために、与えられる問題、活動、それらによって得られた結果からみると次のようなことがいえる。

【問題】

- ・これまでに習得した順列の考えをそのまま用いても解決できない

【活動】

- ・これまでの順列の総数の求め方による方略の分析
- ・組合せの考えを用いた方略の分析
- ・順列の総数を求める際に組合せの考えを用いる

【結果】

- ・順列の総数において組合せの考えを用いて求めた

上記のことについて、問題においては、学習前に教科書における応用問題に相当する問題を提示しているため、解決のための知識が未熟なことから、すぐには問題を解決できないということがいえる。

また、解決に至るにあたり、不確定な状況を確定した状況にコントロールされ方向づけられた仕方では転化させることから方略の分析、妥当性の判断が行われる。

さらに、教科書の応用問題に相当する問題を学習の始めに解くことで、新たに習得する知識の到達点を把握することとなる。これにより、提示した問題の解決後に示される問題において検討するための視点を絞ることができることにもなるといえる。

そして、順列の総数を求める際に組合せの考え方をを用いることがあるという新たな知識の習得することで、それまでの知識からの変容が起こり、新たな世界が切り開かれたと捉えることができる。

これらのことから、数学的問題解決が行われている学習であると判断し、分析を進めることとする。

(2) データの分析

本稿では、調査研究のプロトコルを基に「活用」される未熟な知識となるもの、「活用」している場面、「活用」によって身に付いたものの3つの視点から分析を行うこととする。

①「活用」される未熟な知識

まず、対象とする授業において「活用」される未熟な知識について述べる。

まず、この学習においては、同じものを含んでいる場合の順列について新たに学ぶこととなる。このとき、学習における目的から、生徒は同じものを含む順列と重複順列との違いについて理解していないとい

える。

また、順列・組合せにおける生徒の既習の学習内容は次のことが挙げられる。

- ・ n 個から r 個とる順列
- ・ 円順列
- ・ n 個から r 個とる重複順列
- ・ n 個から r 個とる組合せ

上記に挙げたものについての知識は既習の内容であることから、習得している知識と捉えることとする。

さらに、問題を解決する上では、次の 2 つのことを考える必要性があるといえる。

- ・ 同じものを含む順列の総数を、すべて異なると考えた場合の順列との対応関係
- ・ 同じものを含む順列の総数を、組合せの考えを用いて求める方法

この 2 つは、まだ習得していない知識であり、この学習によって習得を期待する知識でもある。

これらのことから、この学習における未熟な知識は、「順列の総数の求め方」であるとした。

②「活用」している場面

「活用」の場面を見る上で、授業の過程を次のようにあらわすこととした。

表 1. 授業の過程

既習の知識	「並べる」ときは、順列の考えを用いることで総数を求めることができる
発問(1)	赤玉が 3 個、青玉が 2 個、黄玉が 1 個、入っている袋から玉を取り出して並べていくとき、取り出し方何通りありますか？
場面(1)	同じものを含む順列の総数の求め方の模索する場面
場面(2)	区別のつかないものがあるため、組合せの考えを用いて解答しよう

	としている場面
発問(2)	${}_6C_3$ は何を表すの？
場面(3)	組み合わせの考え方による解法 (${}_6C_3$) において、式で用いる値の意味について考える場面
場面(4)	並べたとき、6 個の場所から赤の 3 個の場所を選択しているから ${}_6C_3$ 通りになることを考える場面
得た知識	同じものを含む順列の総数を求めるときに組合せの考え方をを用いる
知識の確認	教科書における練習問題等を解く

上記の授業の過程から、場面(1)～場面(4)における様子をどのような活用が行われていたかに着目し下記で述べる。

【場面(1)の様子】

場面(1)において、発問の「取り出して並べていくとき」という表現から、順列の考え方をを用いると判断していると考えられる。このとき、生徒の中には、これまでの「並べていくとき」の知識から樹形図を活用して、答えを求めようとしているものがある(図 1)。

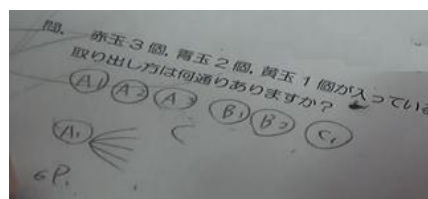


図 1. 樹形図を用いた解法

また、式を用いた解法では、6 の階乗を計算しており、区別がついていない順列を、区別がついている順列と同様に求めようとしていると推測できる。

しかし、解答の数が正答よりも多くなり、

正答へと導かれないことから、生徒は、区別がついていない順列は区別がついている順列と同様に求めることは出来ないという知識を得ることになる。

【場面（2）の様子】

場面（2）において、区別がついていない順列は区別がついている順列と同様に求めることは出来ないという知識から、組み合わせの考え方をを用いた活動が行われている。

ただし、このとき生徒の中には、組合せの考え方をを用いることだけ把握しており、取るものと取られるものの関係を理解していないと考えられるものもみられた（図 2）。しかし、組合せの考え方から、区別のつかないものの数の階乗で割ることが行われている。（図 3）。

これらのことから、順列の総数を求める場合であっても組合せの考えを用いるという知識を得たといえる。

図 2. 組合せの考えを用いた解法 1

図 3. 組合せの考えを用いた解法 2

【場面（3）の様子】

生徒はこれまでの組み合わせの知識から、

6 個の並べ方として、 ${}_6C_3 \times {}_3C_2 (\times {}_1C_1)$ の解法で求められることを得ている。そして、解法の式が正しい生徒が多いことから、教師は解法における正しい式を全体に向けて示している。

しかし、教師の発問（2）によって、 ${}_6C_3$ の何から何を取っているのかについての知識が未熟であることが捉えられる。

場面（3）において、 ${}_6C_3$ の意味について説明を求める活動が行われている。

この活動の中で、次のような生徒の考えがみられた。

- ・ ${}_6C_3$ は赤玉を表す
- ・ ${}_6C_3$ は赤玉の出る確率
- ・ 3 色あるから最初に出した時に赤玉が出るのが ${}_6C_3$ 通り

これらの生徒の考えから、生徒の知識は、袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよい、というものであったということが考えられる。

さらに、6 という値と、3 という値が ${}_6C_3$ という計算の中で何を意味しているかを把握していないことから、生徒は、問題文に存在する値を理解しないままに、既習の公式に当てはめることで、答えに近づけているということや、同じ式を用いることから用いる値についてもこれまでの学習と同様の意味で捉えていることが考えられる。

【場面（4）の様子】

場面（4）において、生徒は、袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよいという知識から、何から何を取り出すのかの説明を行うという活動を通し、並べたときのそれぞれの色の場所を取り出しているため組合せの公式を用いるという知識に変化しているといえる。

生徒は、6 個の玉から 3 個の玉を取り出すことと、6 つの場所から 3 つの場所を選

扱すること違いについて把握していない。

これは、「C ってのは今までは、なんか何個中何個とかだったけど、なんで今回は場所になったの」という生徒の言葉からも推測することができる。

教師は何が ${}_6C_3$ 通りであるかを繰り返し問うことで、同じものが含まれる時の並べ方について、既習の組合せの考え方との違いを考えさせている。また、 ${}_6C_3$ が「並べたときの赤の入る場所」を求めるときに用いることについて、生徒の発言には次のものがみられた。

- ・「色を選んで取っているんじゃないくて」
- ・「6 個あってそのうち 3 個が入る場所」
- ・「6 個のうち、3 個しかないんだよね？赤が 3 だから」

これらの思考過程ののち、教科書の練習問題を改めて解くことで、新たに得た知識について、事実として習得するに至ったと考えられる。そして、生徒は同じものを含む順列において、並べるときの場所を選択するために組合せの考え方をを用いて求めることについての理解に至ったといえる。

③「活用」によって身に付いた知識

②の授業の様子からみられる「活用」によって、生徒は新たな知識として最終的に「区別のつかない順列の総数を求める際に組合せの考え方をを用いる」という知識を得たということが考えられる。

まず、提示した問題によって、区別のついた順列と同様の解法では解決できないことから、生徒には「順列の総数の求め方」に対して未熟な知識が生起したと考えられる。その後、上述した活動による知識の変容は、次の①から⑤の流れを取ると考えられる。また、知識の変容は、未熟な知識を<>内に示した事項に活用することによって起こると考えられる。

①「同じものを含む順列の総数を順列の公式で求めることができる」

<樹形図や式を用いての計算>

②「区別できないものがあるので、組合せの考え方をを用いれば求めことができる」

<式を用いての計算>

③「袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよい」

<組合せの式に用いる値の説明>

④「並べたときのそれぞれの色の場所を取り出しているため組合せの公式を用いる」

<同じものを含む順列において組合せの考えを用いることの説明>

⑤「同じものを含む順列の総数を並べたときの場所を選択することから組合せの考えを用いて求める」

上記の知識の変容から、次のような知識の広がりがあったと考えられる。

- ・順列を求める場合でも、組合せの考え方をを用いる。
- ・組合せの考え方において取り出されるものは具体物だけではない。
- ・同じものの数の階乗の積を分母において計算を行う。

また、習得した事実を、基礎的な問題に活用して解くことで、新たな知識の習得を確かなものにしたと考えられる。

5. まとめと課題

本稿では、高等学校第 1 学年の場合の数の学習を対象とし、場合の数の同じものを含む順列の総数を求める学習において、提示する問題、学習活動、活動による結果から数学的問題解決が行われている授業を提案し、その分析を行った。

学習前に、その学習の範囲における教科書の応用問題に相当する問題を提示することで、順列において組合せの考えを用いることへの探究が生起すると考えられる。

この学習において始めに発生する未熟な知識は、既習の内容から、「順列の総数の求め方」となる。この未熟な知識により、生徒は「同じものを含む順列の総数を順列の公式で求めることができる」と考えていると捉えられる。

未熟な知識を提示された問題を解くときと、解法において用いる値の説明を行うときなどに活用することで、順列において組合せの考えを用いることと、組合せの考えで用いる値の意味を中心とした知識の変容がみられた。

上記の、組合せの考えで用いる値の意味を中心とした知識の変容では、同じものを含む順列の総数において並べたときの場所を取るために組合せの考えを用いることを理解しないまま正しい解答に至る場面が存在した。しかし、解法の意味を理解するための「探究」が行われたため、組合せの考えで用いる値の意味の知識を習得するに至っている。このことから、知識を「習得」する上では、解法の意味を理解するための「探究」も欠かせないものであるといえる。

本稿の成果は概略、次のように言うことができる。「探究」から始まる学習を仕組み、問題の解決に至るための「探究」と解法の意味を理解するための「探究」の2つの活動を起こし、「活用」を通し未熟な知識をよりよいものへと変容させることにより冒頭に述べた「知識を活用して身に付ける」ことができることを明らかにしたことである。

今後の課題は、上に述べた2つの「探究」を生起する発問とそれにより変容していく知識の段階を考察することである。そして、「活用」の「探究」に関する側面を活性化する授業の研究を更に推進していきたい。

[引用・参考文献]

Charles. R, Lester. F. (1982). Teaching Problem Solving : What Why & How. Seymour.

Dewey. J. (1938). Logic: The Theory of Inquiry. Irvington publishers.

伊達文治. (2012). 「「わかるできる数学」から「考えつくる数学」への発展—開平方の歴史に学ぶ数学的活動を事例として—」. 上越数学教育研究. 第 27 号. 上越教育大学数学研究教室. pp.13-20.

デューイ. 上山春平編, 魚津郁夫訳. (1980). 「論理学—探究の理論」, 『世界の名著 48』. 中央公論社. pp.488-506.

岩崎秀樹. (1992). 「問題解決過程の表記論的分析—算数から数学への展開」. 岩合一男先生退官記念出版会 (編). 数学教育学の新展開. 聖文社. pp.200-211.

能田伸彦. (1995). 「小学校算数実践指導全集 第 11 巻 問題解決の能力を育てる指導」. 日本教育図書センター.

大谷実. (2009). 「生徒が数学を学ぶ意義や数学のよさを実感できる活用型の教育を」. 教育科学／数学教育. No.615. 明治図書. pp.4-9.

新算数教育研究会編. (1997). 「問題解決の能力が育つ学習指導は、どうすれば成功するか」. 東洋館出版社

安井義貴. (2014). 「算数教育における数学史の活用に関する研究 —主体的な学びを育てる教師の働きかけに着目して—」. 上越教育大学学校教育研究科修士論文 (未公刊).

吉田万里. (2015). 「数学教育における文章題の生成に関する一考察—黒表紙教科書の分析を通して—」. 上越数学教育研究. 第 30 号. 上越教育大学数学研究教室. pp.101-108.

吉田万里. (2016). 「数学的問題解決における「活用」に関する研究 —「活用」の「探究」に関する側面に着目して—」. 上越教育大学学校教育研究科修士論文.

和田日出夫. (1989). 「問題解決の思考と構造」. 東洋館出版社.

数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する研究

～微分係数の図形的意味の理解段階に着目して～

片寄 恵理奈

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の学習内容(現在の微積分)は, 「「極限」の概念に基礎をおいた数学」(中村, 1980, p.196)である。これまで, 数学Ⅱ「微分の考え」における瞬間の速さを学習していく過程で必要となる極限の考えを, 生徒がどのような過程を経て理解していくかに着目して, 瞬間の速さの理解段階を考察してきた。その結果, 極限の考えを獲得するときに, 瞬間の速さにおける時間幅を0と考えることができない状況があることなどが認められた。数学Ⅱ「微分の考え」において極限の考えが必要となる学習で次は, 微分係数の図形的意味の学習である。

教育系大学の数学を専攻とする大学生7名に微分学習に関するアンケートを行った。その中に, 図1を示した上で, 「この関数 $y = |x|$ の原点にお

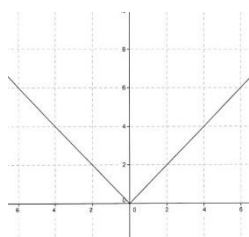


図1: 関数 $y = |x|$ のグラフ

ける接線はあるか。また, その理由は?」と問う設問がある。この設問に対して, 7名中3名が「原点における接線はある」と回答し, 理由として「原点があるため」「原点で接線を取ることができる」「グラフ上に表すことができる」と回答している。これ

らの回答は, 曲線と直線の共有点が1点だから接線がある, すなわち, 円の接線と同様の扱いができる, と考え「原点における接線はある」と回答したと考えられる。そうであれば, 「極限の考え」を必要とする接線の意味が理解できていない状況が既習者にも少なからずあることになる。

本稿の目的は数学Ⅱ「微分の考え」において扱う接線の学習で必要となる「極限の考え」を明らかにし, その「極限の考え」を必要とする微分係数の図形的意味の理解とその段階を考察することである。

第2節では, 先行研究から数学Ⅱ「微分の考え」において必要となる極限の考え, 特に瞬間の速さにおいて必要となる極限の考えについて述べる。第3節では, 学習指導要領と教科書の記述から現在の微分学習において微分係数の図形的意味はどのように扱われているか明らかにし, 教科書を参考にして微分係数の図形的意味の理解段階を構想する。第4節では, 塚原(2002)が作成した数学史を取り入れた学習指導案を取り上げ, その授業における生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相を述べる。第5節では, 第3節で構想した微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成し, それを用いて行った調査授業の分析・考察を行う。第6節では, 第5節で行

った調査授業の分析から微分係数の図形的意味の理解段階を考察する。第 7 節では、本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2. 数学Ⅱ「微分の考え」における極限の考え

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限の考えの扱いについて、山口直也(2013)は次のように指摘している。

「数学Ⅱ「微分の考え」微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0}$

$f(x+h)-f(x)/h$ で初めて極限が導入されるが、教科書では微分係数の式に多項式を当てはめ、除算等の式整理をして h に 0 を代入し計算する、いわば代数的操作として極限を扱っている。一方、数学Ⅲ「極限」では ∞ という記号や連続性といった新しい概念が導入され概念的操作となるが、この操作の差が生徒の極限概念の獲得に支障をきたしているのではないかと考えた。」(山口直也, 2013, p.189)

山口直也(2013)は、極限の扱いにおいて数学Ⅱ「微分の考え」では代数的操作、数学Ⅲ「極限」では概念的操作であり、その操作の差が生徒の極限概念の獲得に支障をきたすと指摘している。しかし、教科書には、数学Ⅱ「微分の考え」では代数的操作だけで極限を扱っているのではないものもみられる。

数学Ⅱ「微分の考え」までの学習に目を向けると、極限の考えの素地を育む指導を考えた実践のいくつか提案がいくつかなされている(例えば、沖山, 2004 ; 坂井, 2015 など)。坂井(2015)は、生徒は極限が内在する学習内容を通して、一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが連続性に基づいた指導内容として重要であると述べている。しかし、数学Ⅱ「微分の考え」までの実際の学習では、瞬間の速さという日常に関する具体的な事象を用いて極限の考えを考えることはしてきていないようである。

そのため、数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる極限の考えを生徒はどのような過程で理解していくか、を明らかにすることが必要となる。片寄(2015)では、微分学習の導入である瞬間の速さを学習する調査授業を実施し、それを基に調査結果を分析・考察し、生徒の瞬間の速さの理解段階を示した。

その結果、調査授業の分析と考察からは、生徒が、瞬間の速さの時間幅を 0 と考えるに至るまでには、6 段階あることが明らかになった。また、瞬間の速さの学習では、 h が限りなく 0 に近づく($h \rightarrow 0$)という操作を具体的な事象をもとに生徒に考えさせていく。この瞬間の速さという事象は日常とつながりの深いものであり、実体験できる対象であるから、代数的操作ではなく概念的操作としての活動を生むと考えられる。

これらのことから、瞬間の速さの学習を通して、公式に代入して求める代数的操作としての極限の考えだけでなく、概念的操作として極限の考えを生徒に意識させることができると考えられた。これは、数学Ⅱ「微分の考え」までに学習される「限りなく近づく」という極限概念にはないものであり、数学Ⅱ「微分の考え」において必要となる「極限の考え」であると考えられた。

次の節では、微分係数の図形的意味の学習で必要となる「極限の考え」を、瞬間の速さの学習で必要とされる「極限の考え」との比較も行い、明らかにしていきたい。

3. 微分係数の図形的意味の学習について

3.1. 学習指導要領解説における記述

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説数学編理数編には、高等学校第 2 学年における数学Ⅱの微分積分の単元で極限の概念についてどう扱われるかが述べられている。「微分の考え」の[内容の取扱い]において、「極限については、直観的に理解させるよう扱うものとする」(p.34)と述べられて

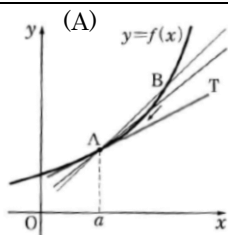
次に、微分係数の図形的意味の扱いは現
行の教科書ではどのようなになっているかを
みていくことにする。

3.2. 教科書における記述

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の微分係数の図形的意味の指導についてみていく。

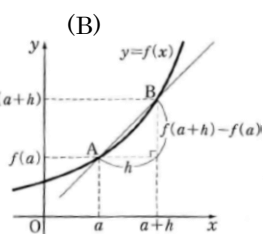
詳説数学Ⅱ(啓林館, 2013)の教科書では、微分係数の図形的意味の学習は、接線の方程式の学習の前に行うという配列である。微分係数の意味を関数のグラフとの関係からみていく指導になっている。グラフでは平均変化率は2点を通る直線の傾きを表し、微分係数は接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる学習を行うようにしている。学習の流れは、以下の図2に示した通りである。

関数 $y = f(x)$ のグラフ上に、2
点 $A(a, f(a))$, $B(a+h, f(a+h))$ をとると、 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = a+h$ までの平均変化率
 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は直線 AB の傾き
を表している(A)。



ここで、 h を0に限りなく近づけると、点Bはこの曲線上で点Aに限りなく近づき、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \text{ となる。}$$
 このとき、直線ABはある



直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線といい、点 A をこの接線の接点という(B)。接線の傾きについて、次のことがいえる。

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ はこの関数のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きである。

図 2:教科書にみられる学習の流れ
(啓林館, 2013, p.198)

3.3. 微分係数の図形的意味の理解段階

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説では、微分係数の学習と接線の学習で極限を扱い、導関数の応用として接線の傾きを学習するという扱いになっている。この扱いに対応して、教科書では、微分係数は接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる工夫がなされている。現行の微分係数の図形的意味の学習における指導は、微分係数で極限を扱う際に、微分係数が接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させようとしているものと言える。

この現行の微分係数の図形的意味の学習における指導を勘案すると、生徒が微分係数の図形的意味を理解していくには次のような段階に整理できると考えられる。

まず、微分係数の $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の中に平

均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ があることを確認する。

そして、平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ がグラフにおいてどのように表されるか考える。次に微分係数の定義にある h が 0 に近づいていく($h \rightarrow 0$)ことは、グラフ上でどのような意味を持つか考えていく。その際、グラフで表された平均変化率と関数 $f(x)$ の交点を点 A、点 B とし、点 A を点 B に近づける動作を行う(図 2 の(A))。この点 A を点 B に近づけるとき、直線 AB がどう変化するか考え、また、直線 AB に近づく直線があることに気付く段階がある(図 2 の(B))。最後に生徒は、近づく直線が微分係数を表していると考え、近づく直線が微分係数を表していると考えられる。この段階

に至るとき、生徒は図形的に接線の存在に気づくと考えられる。最終的に生徒の理解が直線 AB に「近づく直線」が微分係数であることに気付くことで、「近づく直線」が接線の傾きも表していると認めるのではないかと考えられる。この段階をまとめると以下の 8 段階になる。

表 1 教科書の展開にみられる微分係数の図形的意味の理解段階

第 1 段階	微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の中に ある $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が何であることを 確認する段階
第 2 段階	第 1 段階で確認した平均変化率 がグラフにおいてはどの図形で 表されるのかを考える段階
第 3 段階	第 2 段階で考えた図形が図 1 の (A)にある直線 AB であることを 確認する段階
第 4 段階	$h \rightarrow 0$ すなわち、 h を限りなく 0 に近づけるということは図 1 の (B)においてどのような図形的意 味を持つのかを考える段階
第 5 段階	第 4 段階で考えた $h \rightarrow 0$ の図形 的意味は、点 A を点 B に限りなく 近づけることを確認する段階
第 6 段階	点 A を点 B に限りなく近づける とき、直線 AB はどのように変化 するかを考える段階
第 7 段階	第 6 段階で直線 AB の変化を考え ていく中で、直線 AB が近づく直 線があることに気付く段階
第 8 段階	第 7 段階でその存在に気づいた 「近づく直線」(接線)の傾きが、 1 の微分係数の図形的意味であ ると認める段階

生徒はこのような段階を経て微分係数の図形的意味を理解していくと考えることが

できる。数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線や数学Ⅰ「2 次関数」で学習する放物線の接線は、「極限の考え」を必要としないが、数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる曲線の接線は「極限の考え」を必要とするものである。この二つの接線の捉えの違いを、数学史をみていくことにより明確にしていきたい。

4. 数学史を用いた授業実践

4.1. 接線における極限の概念

塚原(2002)は、「ギリシャの初等幾何学では、幾何学的曲線として認知されていたのは、直線と円だけであった」と述べており、この図形の性質は数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する。このギリシャの初等幾何学から更に一般的な曲線の接線について求めるために考えられたのがデカルトの接線の求め方である。塚原(2002)はデカルトの接線の求め方を以下のように述べている。

「デカルトは、幾何学的な条件を、代数的な記号で表し、それを機械的に変形すれば、一般的な解法が得られるという、画期的な方法を発案した。いわゆる解析幾何学である。たとえば、放物線について接線の方程式を求める際には、放物線と直線とが一点を共有するという幾何学的な条件を、方程式の重解条件に置き換えて、機械的に処理する事ができる。これはまた、生徒にとってなじみ深い方法である。」(p.142)

デカルトの方法では、放物線でも円の接線を求める方法と同じく一点を共有することで機械的に処理できるとしている。次に、デカルトの方法を受けたフェルマが求めた接線について塚原(2002)は以下のように述べている。

「フェルマは、接線の傾きに着目し、無限小を用いたダイナミックな方法を考え付いた。すなわち、接線を曲線上で限りなく接近する 2 点 P、Q を通る直線として捉えることによって、結果的には接線の傾きを求

めようとしたのである。このことは、現代的には微分係数の考えに相当するものである。(中略)さらに、最初は異なる視点で考えられてきた瞬間速度と接線の傾きとが、運動的・局所的な視点、すなわち微分係数という新しい概念によって、統一的に捉えられるようになる。」(p.143)

フェルマの方法は、デカルトとは異なり曲線上にある2点を限りなく近づけていくことで直線を捉えようとしたものである。

デカルトは円以外の曲線における機械的に接線を求める方法を確立したが、そこに極限の考えは用いられていなかった。デカルトの方法をさらに一般的な方法へと転換したのが、フェルマの方法である。ここで2点P、Qが限りなく近づいていくことで直線となる発想が生まれたのである。

塚原(2002)は上記に述べたデカルトやフェルマの考えを取り入れた学習指導案を作成している。次にその概要を述べる。

4.2. 塚原(2002)の学習指導案の概要

塚原(2002)は、微分係数や接線の授業における数学史を取り入れた学習指導案を作成している。塚原(2002)が作成した授業の流れは、以下の通りとなっている。(p.142)

- | |
|--|
| ① 接線の傾きと微分係数との関係の理解 |
| ② 接線法が作られていくときの視点の理解 |
| ③ 微分係数によって、瞬間速度を求める方法と、接線の傾きを求める方法とが統一されることの理解 |
| ④ 概念の形成過程における数学的な見方・考え方のよさの感得 |

①では円の接線について復習し、②において視点を数学史に向けている。ここではデカルトの捉え方を用いている。③において円の接線やデカルトの静的な捉え方とは異なるフェルマの動的な捉え方を述べ、④において現代の微分の基礎となるニュートン

ンやライプニッツの定義の原型となることを示している(図2を参照)。塚原(2002)はこの4つの段階を経て微分係数と接線の理解が深まると考えている。この4段階を表にすると、次のようになる。

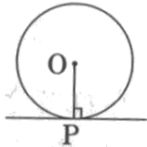
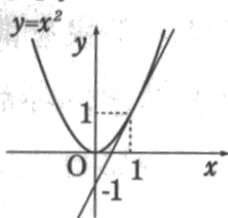
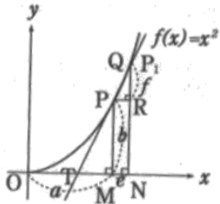
学習活動	数学史の活用の視点
①円と直線との関係に着目する。 	①ギリシャ初等幾何学 発想…1点を共有 方法…半径に垂直な直線を引く。→図形の性質を利用
②判別式を用いて接線の方程式を求める。 	②デカルト解析幾何学 発想…1点を共有 →重解条件の利用 方法…幾何学上の問題を代数的に解決(画期的方法)
③判別式が使えない →新しい考えが必要 →平均変化率の極限值として、接線の傾きが求められる。 	③フェルマの接線法 発想…QをPに近づける→極限法の利用(運動的・局所的見た方) 方法…代数的操作 傾きを $\{f(a+e)-f(a)\}/e$ として $e \rightarrow 0$ とかんがえてよい→微分係数の考えの原型

図3:微分係数や接線の授業の流れ(塚原, 2002, p.144)

4.3. 生徒の極限の考えの理解の様相

塚原(2002)は、数学史を用いた授業を実施した後、生徒に対して、3つの質問を行っている。質問に関しては記述式で回答する形式となっている。ここでは3つの質問の内、「数学的な見方・考え方に関して」についての質問と生徒の回答を述べる。微分

係数と導関数に関する質問と生徒の回答は以下の通りとなっている。

質問 C：授業で、数学的な見方・考え方のよさを感じましたか。

○接線を求めるときの考えで大切な数学的視点は局所的と瞬間的。

○公式の成り立ちの説明があったので、印象に残りやすい。公式を忘れても思い出しやすい。

○どんな意味でその計算が成り立つのかが分かれば、他の問題にも応用できると思った。(p.189)

質問 C に対して生徒は公式の成り立ちや意味に意義を感じているが、微分係数の図形的意味の理解に意識が向けられているかは定かではない。

次の節では、これまで述べてきたことを基に、微分係数の図形的意味における極限の考えを生徒が理解していくにはどのような段階があるのかを明らかにしていき、考案した調査授業とその実際について述べる。

5. 調査授業の実践と分析

5.1. 調査授業の概要

調査授業の概要について述べる。

【調査研究の概要】

- ・単元：数学Ⅱ「微分・積分の考え」
- ・対象：福島県 S 高等学校 文系クラス
第 2 学年 1 組 8 名
第 2 学年 2 組 25 名
- ・実際の調査授業の日程等

9 月 14 日(月)：瞬間の速さの授業

16 日(水)：微分係数と接線の授業

17 日(木)：曲線の概形についての授業

18 日(金)：定積分の授業

上記に示した通り、対象を高等学校第 2 学年として調査授業は単元「微分・積分の考え」で行った。調査授業は、考案した学習指導案を基に全 4 時間(2 クラス合計 8 時間)で実施した。

調査実践の目的を、「高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限が扱われる瞬間の速さ、微分係数と接線、面積の学習に着目し、生徒の極限に対する理解がどのように形成されていくかを明らかにすること」とした。調査授業の方法は、高等学校数学Ⅱの教科書を概観し、この単元の学習の流れについて考察することで、それぞれの学習での理解段階を構想する。次に瞬間の速さ、微分係数と接線、面積の学習における生徒の理解の変容が実際の授業で見られるか明らかにするために、教科書にみられる微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成する。授業者がその学習指導案をもとに授業を実施するというものである。

本稿では、9 月 16 日(水)に行った微分係数と接線の授業を取り上げ、以下に述べる。

5.2. 実践の授業の流れ

生徒が表 1 のような理解の変容を辿るのかみるために、微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成した。学習指導案の流れと実際の授業の展開は以下に示す。

微分係数と接線の授業の目的は、平均変化率の極限值が微分係数であり、微分係数が接線の傾きになることを図形的に捉えさせることである。そのため授業ではまず、平均変化率と微分係数の復習を行う。次に関数 $f(x) = x^2$ を用いて、瞬間の速さを図形的に考える活動を通して、平均変化率の極限值が微分係数として求められることを生徒に気付かせ、微分係数が接線の傾きになるだろうと考える生徒の理解の様相をみていく。

また事前のアンケートでは、関数 $f(x) = x^2$ の 2 秒後の瞬間の速さをグラフで表すとどこに表れるかという問いに対して、「(2, 4) の点を通る」「(2, 4) の点」で

あるという解答をする生徒が多く見られた。生徒の実態を踏まえて、実際の授業では関数 $f(x) = x^2$ のグラフを模型として作り、「2秒後の瞬間の速さがグラフ上にどのように表されるか」と問い、生徒に模型を用いて表してもらうことを含めることとした。以下が実際に行われた学習指導案の流れである。

1. 平均変化率と微分係数について、プリントを用いて復習を行う。
2. 関数 $f(x) = x^2$ の 1~2 秒後の平均変化率はグラフ上でどのように表されるか考える。
3. 関数 $f(x) = x^2$ の 2 秒後の瞬間の速さはグラフ上でどのように表されるか考える。
4. グラフ上で表された瞬間の速さ(接線)は微分係数とどのように関わるのか。

分析・考察については次のような方法で行った。調査授業の実践の様子を固定カメラ一台、移動用一台の計 2 台のビデオカメラで撮影し、授業実践におけるプロトコルデータを取る。授業後にアンケート調査を行い、その結果によってはインタビュー調査も行う。これらのデータを基に、生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相について分析・考察していく。

5.3. 微分係数と接線の分析・考察

まず、生徒が微分係数の図形的意味を考える上で、どのような様相を示したのかということを場面ごとに述べる。それを踏まえて、生徒が微分係数の図形的意味を理解していく段階を考察する以下、授業実践データであるプロトコルを用いることにする。プロトコルにある表記として、s1, s2 などは生徒、T は授業者を表している。

- ①関数 $f(x) = x^2$ の 1~2 秒後の平均変化率をグラフ上で考える場面

平均変化率や微分係数の復習を終えた後、

授業者が黒板に $f(x) = x^2$ のグラフを書いて「このグラフでは(平均変化率が)どういう風な表れ方をするのか。」という発問を行った。生徒は平均変化率がグラフ上でどのような意味を持っているか次のように説明している。

T	(平均変化率の)分母って何？
s1	1 秒から 2 秒だから。
s2	時間？

授業者と生徒のやり取りから、生徒は平均変化率が y の増加量/ x の増加量であると、捉え切れていない様子がみられた。

授業者は次にグラフ上に 1 秒後と 2 秒後のときをプロットし、「(分子の)3 というのは何だ？」と発問している。その発問に対する生徒の反応は以下の通りである。

s3	グラフの傾き。
T	何の傾き？
T	傾きでいいんだけど、傾きって言ったら何なの普通。
s3	2 点を通る直線。

この場面での授業者と生徒のやり取りから、生徒は平均変化率がグラフ上で 2 点を通る直線であると考えていることが分かる。

- ②関数 $f(x) = x^2$ の 2 秒後の瞬間の速さをグラフ上で考える場面

この場面では、次に、2~3 秒後の平均変化率を $f(x) = x^2$ の教具を用いて考えさせている。授業者が「2~3 秒後の平均の速さはどうなるか。」と発問し、生徒は前に出てきて、 y の値が 4~9 になるグラフ上の 2 点を通ると指示棒を用いて $f(x) = x^2$ の教具に表した(図 4)。



図 4:平均変化率を示す生徒の様子(2 組)

しかし、次に 2 秒後の瞬間の速さを教具を用いて考えさせると、生徒の何人かは x 軸に平行になるような直線($x = 4$)を表した(図 5)。

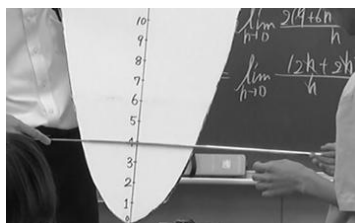


図 5:瞬間の速さを示す生徒の様子(2 組)

生徒たちの反応から、生徒は平均変化率と同じように 2 点を通る直線であると考え、その直線の傾きが x 軸と平行になると考えているとみることができる。その後、授業者が平均変化率は y の増加量/ x の増加量であると示しながら、「 x の幅が狭まったら直線がどうなっていくか」と発問したところ、生徒は以下のように回答している。

T	(x の値) 2~3 がどんどん狭まっていったら直線はどう表せる？
s1	(縦に)立っていく。

生徒は平均変化率が 2 点を通る直線になると理解できているようであったが、瞬間の速さについて考えるとき、 x の幅が狭まるのではなく増加すると考えてしまう生徒の様子が見られた。授業後の瞬間の速さをグラフ上に表すアンケートの設問で、生徒は「 x の幅が小さくなるから、一直線になると思った」と回答しており、 x の幅を 0 と考え、 y 軸に平行な直線を示したと考えられる。

③グラフ上で表された瞬間の速さ(接線)について考える場面

この場面では、生徒が $x = 2$ のときに曲線と接するように直線が引けることを確認した後、授業者は「微分して x に 2 を代入したこれは何か。」という発問を生徒に行っている。この発問に対して、生徒は接線の傾きが微分係数であるということに気付いたようである。

次に、調査授業でみられた生徒の反応から、微分係数の図形的意味をどのような理解段階を示すか考察していく。

④調査授業の考察

平均変化率を図形的に考える場合、授業者とのやり取りで y の増加量/ x の増加量であると捉えていない様子がみられた。しかし、次に授業者が黒板に書いたグラフ上に $x = 1, 2$ のときをプロットすると、生徒は平均変化率がグラフ上で 2 点を通る直線であると答えた。その後、2~3 秒後の平均変化率を指示棒を用いて教具に 2 点を通る直線として表していることから、生徒は平均変化率がグラフ上の 2 点を通る直線であると考えることが分かる。次の授業者の発問から、生徒は瞬間の速さの図形的意味を考えていった。何人かは指示棒を x 軸に平行になるような直線($x = 4$)として表しており、直線に傾きがないと考えている。このことから、生徒は 2 点を通る直線になるということは理解できていたが、 x の幅が狭まるのではなく、 x の幅が 0 と考え、 y 軸に平行な直線を示したと考えられた。一方、次の授業者の発問により、 x の幅が狭まるのではなく増加すると考えてしまうという生徒の様子も見られた。

したがって、生徒は平均変化率の図形的意味は理解しているが、「極限の考え」を用いての微分係数の図形的意味の理解にまでは至っていないと考えられる。

次の第 6 節にて、調査授業でみられた生徒の理解の様相から微分係数の図形的意味の理解段階を考察していく。

6. 微分係数の図形的意味の理解段階

第 5 節で述べた分析・考察から、生徒の微分係数の図形的意味の理解段階は、表 1 の理解段階と異なる段階を示すことが分かった。最初の第 3 段階までは平均変化率の図形的意味を含むため、生徒の反応から表

1 の 3 段階まで理解段階がみられた。その後の極限の考えを用いる微分係数の図形的意味の理解では、生徒の平均変化率との理解の差がみられた。授業後のアンケートで生徒は 2 秒後の瞬間の速さの直線が縦や横と考えてしまう理由として「 x の幅が小さくなるから、一直線になると思った」と答えている。これは、平均変化率は 2 点を通る直線、瞬間の速さは 1 点のみを通る直線と考え、瞬間の速さが接線の傾きだと意識できない様子が見られた。これらのことから、接線の傾きが微分係数の図形的意味であると考ええるまでの段階は次のようになる。

表 2 調査授業を受けて考えられる微分係数の図形的意味の理解段階

第 1 段階	微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の中にある $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が何であるかを確認する段階
第 2 段階	第 1 段階で確認した平均変化率がグラフにおいてはどの図形で表されるのかを考える段階
第 3 段階	第 2 段階で考えた図形が図 1 の(A)にある直線 AB であることを確認する段階
第 4 段階	$h \rightarrow 0$ すなわち、 h を限りなく 0 に近づけるということは図 1 の(B)においてどのような図形的意味を持つのかを考える段階
第 5 段階	第 4 段階で考えた $h \rightarrow 0$ の図形的意味を、意識できない段階
第 6 段階	第 5 段階で直線 AB の変化を考えていく中で、直線 AB が 1 点を通る直線に近づいていき、 h の幅が 0 になる

	と考える段階
第 7 段階	第 6 段階で直線 AB が 1 点を通る直線に近づくと考え、 $f'(a)$ によって直線 AB の傾きが決定されることに気付く段階
第 8 段階	第 7 段階で気づいた(接線の)傾きが、1 の微分係数の図形的意味であると認める段階

第 1 段階から第 3 段階は①の場面での生徒の反応から、平均変化率の図形的意味は理解していることが明らかになった。第 4 段階においては、生徒は②の場面で x の幅を狭めていくことを考えている。しかし、図 5 から実際に生徒が表したグラフは x 軸に平行な直線であった。これにより、 x 軸の幅を意識して狭めることができない生徒の様子がみられた。また、 x の幅を狭めることを意識している生徒の中には、 x の幅がないと考えて曲線に接するような直線ではなく、 y 軸に平行な直線を考えている様子もみられた。このことから、 x 軸の幅を意識して狭めることができない段階があり、 x 軸の幅を意識して考える際に、 x 軸の幅を 0 と考え、曲線に接しないような直線を考える段階がみられた。

瞬間の速さの理解段階において、「極限の考え」を獲得するときに、瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることができない実態があったが、微分係数の図形的意味の理解段階においては、 x の幅がないと考え、接線として y 軸に平行な直線を考えるなど、 x 軸の幅を意識して狭めることができない生徒の実態が認められた。

7. まとめと今後の課題

本稿では数学Ⅱ「微分の考え」において接線で必要となる極限の考えを明らかにし、極限の考えを用いた生徒の微分係数の図形

的意味に関する意味理解の理解段階を考察した。

第2節で述べた先行研究を踏まえて、第3節では学習指導要領と教科書の記述から微分係数の図形的意味について明らかにし、教科書を参考にして微分係数の図形的意味の理解段階を考察した。

第4節では、塚原(2002)が作成した数学史を取り入れた学習指導案を取り上げ、生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相を述べた。その結果、数学Ⅱ「微分の方程式」の円の接線の捉え方と数学Ⅱ「微分の考え」の接線の捉え方で混同が起きている実態を認めることができた。

第5節では、第4節で得られた示唆をもとに実施した調査授業の分析と考察を述べた。その結果、生徒は平均変化率の図形的意味は理解していると考えられるが、極限の考えを用いる微分係数の図形的意味までは理解まで至っていないと考察することができた。

第6節では、第5節を踏まえて微分係数の図形的意味の理解段階を考察した。その結果、生徒は瞬間の速さで必要となる極限の考えを用いることはできるが、曲線上を動く点の動的な動きを一方向のみで考えていることが明らかになった。また、接線の傾きを求めるときに必要な「極限の考え」を用いることができない実態もみられた。これにより、数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線や数学Ⅰ「2次関数」で学習する放物線の接線の捉え方と数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる曲線の接線の捉え方との差を、理解しにくい生徒の状況が明らかになった。

今後の課題は、上に示した極限の考えの理解の困難さを克服させる指導について検討していくとともに、数学Ⅱ「微分・積分の考え」の指導改善を目指した研究を更に進めていくことである。

8. 引用・参考文献

- Boyer, C.B. (1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover.
- Edwards, Jr. C.H. (1937). The Historical Development of the Calculus, New York: Springer-verlag.
- 片寄恵理奈. (2015). 「数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察-瞬間の速さの理解段階に着目して-」. 日本数学教育学会第48回秋期研究大会発表集録. pp. 275-278.
- 片寄恵理奈. (2015). 「高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察」. 上越数学教育研究第30号. pp.85-92.
- 文部科学省. (2009). 高等学校学習指導要領解説 数学編. 実教出版.
- 中村幸四郎. (1980). 近世数学の歴史-微積分の形成をめぐって-. 日本評論社.
- 大塚明彦. (2009). 「平均の速さから瞬間の速さへ」. 教育科学/数学教育. 1月号. pp.60-64.
- 沖山義光. (2004). 「(4)数学(1)コース「円すいの体積はなぜ円柱の3分の1なのでしょう」」. お茶の水女子大学附属高等学校. 研究紀要 Vol.48 pp.83-84.
- 坂井武司. (2015). 「小・中の連続性に基づいた極限の考えの素地指導～学習内容の本質に迫る教材開発～」. 学校数学研究会誌 学校数学研究 Vol.23 No.1. pp.5-11.
- 高橋陽一郎他. (2013). 『詳説数学Ⅱ』. 啓林館.
- 高橋陽一郎他. (2013). 『諸説数学Ⅲ』. 啓林館.
- 塚原久美子. (2002). 「数学史をどう教えるか」. 東洋書店.
- 山口直也. (2013). 「数学Ⅱ「微分の考え」における『極限を用いない微分法』を用いた指導の可能性の検討」. 日本数学教育学会第46回秋期研究大会発表集録. pp.189-192.

現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の

知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みについて

—複数の situation から出発する model の漸進的な自己発達と formal knowledge の洗練—

藤川 亮一

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

小数の乗法及び除法は、子どもにとって理解が困難であると言われている(国立政策研究所, 2015)。例えば、小数倍になると累加の考えを用いることができず、子どもが数量を感覚的にとらえにくい。また、小数の等分除の $1m$ の値段を求めるといった問題場面においても、子どもが日常使っているような、自然数で分けるといった具体的な操作に関連づけることが難しい。そのため、実際の授業場面においては、子どもの活動を促す一方で、数直線や言葉の式などを用いながら立式の仕方を教え込む場面がある。この課題に対し、数直線を有効に用いて小数の乗法及び除法を割合で意味付けるなど、様々な研究(e.g., 中村, 1996; 白石, 2006)がなされているが、未だ解決には至っていない現状がある。

高橋裕樹(2003)は、小数の乗法及び除法における指導場面への有益な示唆を得るために、現実的数学教育(Realistic Mathematics Education, 略称 RME)理論を基にした、Gravemeijer et al.(2000)の理論的枠組みに基づき、子どもの小数の乗法及び除法における知識の形成過程を明らかにしている。他方で、理論的枠組みに関して、授業場面で複数ある問題場面や、文脈に応じてフォーマルな知識を繰り返し用いる中でフォー

ルな知識を更に洗練させていく過程を考慮する必要がある。すなわち、理論的枠組みを精緻化し更なる発展を目指すために、複数の問題場面から出発してモデルを自己発達させる様相やフォーマルな知識の洗練を明らかにする必要がある。

本稿の目的は、現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みを、複数の問題場面から出発するモデルの自己発達という視点からと、フォーマルな知識を洗練させていくという視点から構築することである。

本稿では、第一に、小数の乗法及び除法に関する先行研究を概観することにより、子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件を探る。第二に、現実的な場面から出発して数学化に至る立場を取る現実的数学教育(Realistic Mathematic Education 略称 RME)理論の提唱者であるFreudenthal, Hの思想などを基に、本研究における「現実性」の定義を明確にする。第三に、RME理論に視座を置き、心的構成物であるモデルの自己発達について考察する。第四に、RME理論に基づくVan den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みを精緻化し発展させることで、新たな理論的枠組みを構築する。第五に、

高橋裕樹(2003)における子どもの活動を、構築した理論的枠組みを用いて再解釈することで、その妥当性を検討する。

2. 小数の乗法及び除法における先行研究の考察

2.1. 小数の乗法における意味の拡張

松原(1985)は、小数をかけるということの意味について、「整数倍」の場合は、補助的に累加を「かける」ことの意味として指導できたのであるが、「小数倍」では累加は通用しない。これまでに学習してきた「倍」の意味を、あらためて拡張して見直させるというのが、この指導の眼目である。」(松原, 1982, p22)と述べている。また、中村(1996)は、「乗数が小数になると「同数累加」の意味は適用できない。例えば、 3×2.4 は「3を2.4個たす」とは言えない。そこで、乗数が小数の場合の意味を新たに考える必要がでてくる。」と述べている。そして、中村(1996)は、このように考えていく活動が「拡張の考え」を育てていくことになるとし、この「拡張の考え」を育てるという立場から、乗法の意味づけを「基準量 $\times$ 割合」とする立場を取っている。この立場は、 $A \times B$ について、 A を基準量(単位)、 B は A を単位とした測定数とすることである。この立場は、乗法の意味に関して、乗数が整数のときは同数累加で導入し、乗数が小数になったときに割合に拡張することである。すなわち、小数の乗法の意味づけを行う際には、「同数累加」から「基準量 $\times$ 割合」へと意味の拡張を図ることが重要であると言える。

2.2. 小数の除法における意味の拡張

板垣(2002)は、整数の除法は「分ける」という統一したイメージを抱くことができるが、連続量(小数・分数)のわりざんは「分ける」というイメージで通すわけにはいか

ないとし、そのことを以下の例を用いて示している。例えば、「2ℓが400円のしょうゆ、1ℓの値段は…」と言え、400円を2等分した値段、 $400 \div 2$ の立式は容易であるが、「0.8ℓが160円のしょうゆ、1ℓの値段は…」となると、整数のときの等分という意味では通用しなくなってしまう。この例を踏まえて板垣(2002)は、これまでの「分ける」というイメージから正真正銘「1あたりを求める」または「いくつ分を求める」という意味に拡張させる必要があることを提案している。

白石(2006)は、小数の除法には意味の拡張が必要であり、その意味の拡張を子どもたちに導入する際には、その思考を助ける道具として数直線が有効であるとしている。そして、白石(2006)は小数の除法の学習において、数直線を導入する場面や数直線の形式、操作方法等を指導に加味した授業構成を提案している。その中で白石(2006)は、除法の「意味の拡張」とは「1」へのアプローチを、これまでの「累加、累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとしている。この考えは、中村(1996)と同様に「基準量 $\times$ 割合」に着目し、割合で考えたことを「1」と全体の間を乗除法による「倍」を媒体に関係づけていくことであると捉えることができる。すなわち、小数の除法の意味づけを考えていく際には、「1」と全体の間を既習の乗除法によって関連づけ、「1あたりを求める」という意味に拡張させる必要があると言える。

2.3. 小数の乗法及び除法の意味づけ

中村(1996)は、小数の乗法を割合で意味づけることの問題点として、小数の乗法で子どもが意味の拡張を意識しないことを挙げている。中村(1996)は、その原因を、次の問題場面における一般的な指導を考えていくことで探っている。

1mが180円のリボン、2.4mの値段は何円ですか。

上記の問題において、立式の根拠は、 $(1\text{mの値段}) \times (\text{長さ}) = (\text{求める値段})$ という「言葉の式」である。そのため、子どもは、問題文の数値を「言葉の式」に当てはめて「 180×2.4 」と立式する。さらには、その前段として、子どもに整数の場合について考えさせることで、小数の場合でも考え易くなるように問題の系列が組まれていることが多い。このような指導によって、子どもは乗数が小数の場合でも不都合を感じることなく、整数と同様に乗法で表せる。中村(1996)は、上記の子どもの思考過程により、子どもが意味の拡張の必要性を意識しない原因は「言葉の式」による立式指導にあると考え、子どもに「言葉の式」に頼らない立式を促すために、数直線を立式の根拠とすることを提案している。

小数の除法における意味の拡張を図るため、麻柄(1995)は次のような実践を行った。麻柄(1995)は、実践の中で「分ける」から「1あたりを求める」への意味の拡張を図り、子どもたちの持っている「端があるから割れない」という考えを取り除いていった。

子どもたちは、「 $\div 4$ 」を4つに「分ける」と考えている。そこで、子どもは、はかりの上で羊羹を4つに切るが、それだけでは重さが変わらない。その中のひとつ分だけを取り出して重さを量ったとき、初めて1つ分の重さが出る。ゆえに、麻柄(1995)は、はじめの「4つに切った」だけでは「わりざん」ではなく「分けざん」であるとした。さらに、麻柄(1995)は、4つに分けるのではなく、1つ分だけ切って重さを量っても同じになることから、すべてを切り分けなくてもいいことを実験した。この実験から麻柄(1995)は、子どもに「1」に対する意識が生まれ、それまで彼らに定着していた「分ける」という意味から子どもたちの視

点を「1」に向けることができたことを挙げている。そして麻柄(1995)は、この見方が可能になると、「1」を取り出した残りが、端のある数値で子どもたちにとって等分できないものであっても、「1」を取り出すことが意識されれば、「分けられない」から「割れない」という問題点を乗り越えていけることを示している。

上記の提言に対して白石(2006)は、こういった活動を通して「1」への意識が高まり、わりざんが「1を求める」ことであることが理解されるだけでは不十分であり、小数の除法を解決していくためには、この段階の子どもたちが未習である「1あたりを求める」という見方を身に付けることの重要性を示している。そして、白石(2006)は、「1あたりを求める」ことの背景にある「比例的な見方」を可能にするものについて考えていくことの必要性を指摘している。

日野(2004)は、比例的推論に関して、「一方がm倍になれば他方もm倍になるといったように、伴って変わる2量の間の比例関係を前提として未知の量を求めたり、比較したりすることおよびそれに準じる考え方」とし、小数の乗法及び除法の意味の拡張に必要とされる「比例的な見方」「1あたりを求める」には、数直線とのかかわりを考えていく必要があることを示している。

2.4. 数直線への「比例的な見方」の操作

これまでに、乗法・除法の意味の拡張を図るための「比例的な見方」を子どもに捉えさせるために、「数直線」を用いた研究が多くなされている。白井(1997)は、乗法や除法の演算決定の方法の中では、数直線が最も有効であるという立場にたち、その4つの有用性として、1. 数が小数・分数に拡張されても、数量の関係がとらえやすい、2. 数直線に表すことによって、答えや結

果の見通しがもてる，3. 比例的関係をもとにすれば，演算決定が正しくできる，4. 立式の根拠を正しく説明したり，検証したりできる，ことを示している。その一方，白井(1997)は，演算決定ができるためには次に示す5つの段階，1. 数を数直線上の点に表すまでの段階，2. 異種2量の数直線に移行する段階，3. 数量の対応をつかむ段階，4. 比例的な関係を基に演算を決定する段階，5. 活用する段階，を踏む必要がある，そのための系統的な指導が必要であることを指摘している。

中村(1996)は，小数の乗法において次の問題場면을扱い，数直線に比例関係を表すことで小数倍への意味の拡張を図った。

3mの重さが36gの針金があります。この針金7.5mの重さは何gですか。

中村(1996)は，上記の問題における子どもの思考過程を以下のように示している。子どもはまず7.5mは3mの何倍かを調べる。式は， $7.5 \div 3 = 2.5$ となる。この意味は，「3mを1とみたとき，2.5にあたる大きさは7.5mになる」である。そして，長さが2.5倍になっているから，それに伴って重さも2.5倍になる。中村(1996)は，子どもが数直線への「比例的な見方」を行うことによって，7.5mの重さは 36×2.5 で求められることを示している。

白石(2006)は，次の問題において，数直線への倍関係を表す「矢印」の記入の過程を示すことで，比例的な見方を両方面から可能にできることを示した。

2.4mで120gの鉄の棒があります。この鉄の棒1mの重さは何gですか。

白石(2006)は，数値間の倍関係を矢印にすることで，何に対してその数値が何倍の関係になっているかという流れや方向性を示すことを可能にした。白石(2006)は，数直線への記入の過程として，以下の操作手順を示している。まず1mと2.4mの倍関係を

乗法の考えをもとに求め(①の矢印)，そこから，長さが2.4倍になったら重さも2.4倍になるという見方をして，□と120の関係に気付く(②の矢印)。その後，子どもは，2.4mと1mの関係の $\div 2.4$ を除法の考えをもとに求め(③の矢印)，そこから長さが $\div 2.4$ になったら重さも $\div 2.4$ になるという見方をして，120と□の関係も $\div 2.4$ になることに気付く(④の矢印)。

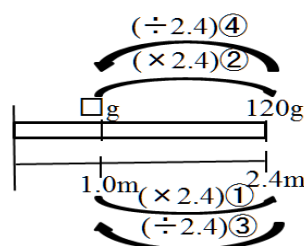


図1 白石(2006)が示した図

白石(2006)は，子どもがこれらの操作の過程を通して，「1」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張できることを示している。すなわち，数直線への「比例的な見方」の操作を行うことで，子どもは小数の乗法及び除法の意味を，累加や累減などの加減法から乗除法による捉えへと拡張することができる。それは「1あたりを単位とした見方」への変化を促し，中村(1996)が示したように，「1」と全体の間の関係を「倍」によって捉えられるようになることを意味する。

一方，教師は子どもの小数の乗法及び除法の意味の拡張を図る際には，子どもが自身の日常生活や，これまでの学習活動で身に付けた既習の知識などの，彼らの素朴な考えを大事にする必要があるだろう。その理由は，子ども自身の経験から形成された知識と，学習場面で教授された知識とが乖離する現象が起こるためである。そこで，子どもの素朴な考えに焦点を当て，それを自己発達させていこうとする研究を概観す

る。

2.5 子どもの素朴な考えに基づいた研究

子ども自身が自らの知識や素朴な考えを土台として、数学的な知識を形式化していく過程を明らかにした研究を示す。

高橋裕樹(2003)は、RME 理論を分析の視点とし、小数の乗法及び除法の問題場面を通して、子どもが自らの数学的知識を生かしながら、小数の乗法及び除法のモデルを発展させていく過程を明らかにした。具体的には、子どものもつ心的構成物である model の発達と形成過程を仮定し、その仮定をもとに単元と授業を構想、実施し、子どもの学習過程を解釈、考察した。その結果、高橋裕樹(2003)は、子どもは活動の過程で、解決のための単位を様々に設定することによる場に応じた活動のモデルを、様々な単位を 1 とみなすことによる場に応じた活動のモデルへと発展させることを明らかにしている。

富田(2010)は、子どもが割合単元の問題を解決していく中で、自らの数学的知識を生かしながら、新たな知識を形成し形式化していく過程を明らかにしている。その結果として富田(2010)は、比の三用法の活用の際には、子どもたちが解決のための単位を様々に設定する活動を豊かにすることが重要であり、彼らが場に応じた単位を柔軟にとり、それを形式化していくことの重要性を示している。

金川(2010)は、関数指導改善の示唆を得るために、子どもが現実事象を意識し、自らの知識を用いて取り組めるような問題を解決していく際の、知識の形成過程を明らかにしている。その結果として金川(2010)は、調査問題を重ねるごとに形成過程が単純化することを示している。具体的には、初期の問題においては、子どもは絵図によるモデルとことばの式によるモデルの間で

発達と逆行を何度も繰り返したが、問題を重ねるにつれて、ことばの式によるモデルを形成する様子が見られたことを金川(2010)は明らかにしている。

これらの研究では、子どもの日常的な現実性を軸にし、彼らが自身の生活体験などから形成してきた知識を基にして、いかにして新たな知識を形成しているかということに焦点を当てている。

3. 子どもの活動を軸とした視点

3.1. RME理論について

子どもの現実性という文脈からカリキュラムや教材を始める一派がある。オランダの Freudenthal の流れを組むチームであり、氏が提唱する理論は現実的数学教育 (Realistic Mathematic Education 略称 RME) と呼ばれ、人間の活動としての数学、と言う数学教育観に根底を置いている(高橋等, 2003)。子どもが現実世界における数学的な活動の中で数学的経験をし、知識を形成することを Freudenthal 派は目指しており、その理念の鍵は活動と現実場面、数学化の 3 つである(高橋等, 2003)。

本研究では、RME 理論の 3 つの理念において、とりわけ、現実場面に焦点を当てる。その理由として、子どもの素朴な考えや自身の生活体験から形成した知識を引き出すためには、子どもが親しみを感じたり、強烈に引きつけられたりする場面が大切であるためである。筆者自身の経験でも、授業で日常的な現実場面の事象に関連付けた問題に取り組んだ際には、思わず自身の経験を想起することがしばしばあった。ここで言う現実場面とは、子どもにとって親しみのある状況であり、多くの場合、日常的な現実性をもつものである(高橋裕樹, 2003)。ただ、先行研究では、算数・数学の授業場面において、子どもが現実性を捉える様相を的確に示していないだろう。

ゆえに、子どもの知識や素朴な考えを引き出すために、算数・数学授業における子どもの現実性を明らかにする必要がある。そこで、先行研究における現実性に対する考えを探ることで、本研究における現実性の定義を明確にする。

3.2. 本研究における現実性の定義づけ

Freudenthal(1991)は、数学と現実性に関して、「数学は現実性にはじまり現実性を持ち続ける」と述べ、児童・生徒が活動することが数学の現実性を作り出していくことを示している。とりわけ、Freudenthal(1991)は、数学の現実性の特徴として、問題を探す活動、問題を解決する活動、そして組織する活動を強調しており、数学学習のプロセスとして、レベルが上がるのが活動の中心的な特徴であることを示している。

熊谷(2000)は Freudenthal(1991)の考えに対して、「あるレベルでの操作的な出来事が次のレベルでの扱う対象となることを強調している。そこには、何らかの扱うことのできる数学的対象が生じている。そこには操作と操作される対象を考えている。」と述べている。熊谷(2000)は、子どもたちが粘土のかたまりと串をもち 30g のだんごを粘土で作る活動を例に挙げ、小学校の授業場面にみられる数学的なリアリティについて言及している。なお、熊谷(2000)におけるリアリティは、現実性と同義であると捉えてよいであろう。

以下では、熊谷(2000)の数学的リアリティとはどのようなものなのか、それを捉えるために、本論に示されている子どもの活動と、その解釈を示す。子どもは、30g の粘土のだんごを作る時に、粘土を少しくつつけたり、削ったりといったような活動を繰り返す。ほんの少し削ることで、秤の針が動くこと、すなわち、ほんの少し重さが変化することを知っているためである。ま

た、子どもはたくさんのものが集まれば、重さが重くなることを経験的に知っている。さらに、だんごが 2 個になると、重さは 1 個のときの 2 倍に、3 個になると重さは 3 倍になることを経験的に知っている。そこには素朴な比例のアイディアがあり、それを発展させるためにだんごが 2 個になれば $30 \times 2 = 60$ 、3 個になれば $30 \times 3 = 90$ ということを見直す必要がある。その見直しによって、だんごが 40 個になったとしても、1200g になると考えることができるようになる。

熊谷(2000)は、子どもは上記の活動を経験することで、素朴な比例のアイディアを意識的に扱えるようになり、経験的にもっている比例の考えを、測定することができるとは限らない範囲へ広く適用することができるようになることを示している。このことは、上記の過程で数学的なリアリティをつくる上では、問題を解決するときの比例関係をつくり出している部分に焦点をあてることの重要性を示すだろう。さらに、熊谷(2000)は、問題が解決できること、または問題が見つけれられ、定式化できることが数学的なリアリティをつくり出している、という立場を取っている。すなわち、授業場面で数学的なリアリティをつくる上では、子どもが活動をする中で何らかの操作を経験し、ある数学的な対象をつくり出すような過程を繰り返す中で、既存の知識が数学的な知識へと発展することが重要であるだろう。

一方、子どもが場面に対して現実性を捉えるためには、子どもにとって日常的な現実性がある文脈が有効だろう。Freudenthal(1991)は、子ども一人一人の現実性を生かし、ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言している。その中で Freudenthal(1991)は、「現実性は、歴史的

に、文化的に、環境的に、個別的に、そして主観的に決定される。」と述べている。すなわち、現実性とは学習者によって変わるものであり、子ども一人一人の現実性に即した場面をつくることで、子どもが現実性を捉えられることを示唆している。

以上より、数学的な現実性と日常的な現実性の両面から、算数授業における現実性を定義づける必要があると考える。端的に示すと、日常的な現実性に関しては、子どもが自身の経験と照らし合わせることが出来るような親しみのある場面という視点である。一方、数学的な現実性に関しては、子どもが自身の経験と問題場面を照らし合わせ、類似性を把握しつつ対象を操作する活動を行うことで、数学的な対象を自らつくり出していくという視点である。

上記を踏まえて、本研究では現実性を「子どもが、自分の経験や知識と環境(問題場面)とを照らし合わせてその類似性を把握したり、その過程で自ら数学的な対象をつくりだしたり、環境に内包される知識構造を把握したり、環境に対して親しみを感じたりする状況」と定め、子どもが現実世界と算数・数学の世界をつなげるために必要不可欠なものであると位置づける。

3.3. 現実性のある場面

現実性のある場면을構成するために、本研究における現実性の定義に基づき、子どもにとって日常的な現実性をもつ文脈に焦点を当てる。そのような視点で教科書を概観すると、日常生活を強く反映した文章題を中心とした教材が登場するのは尋常小学算術(以後、緑表紙教科書)にみることが出来る。実際に緑表紙教科書を概観した結果、以下の2点が明らかになった。1点目は、緑表紙教科書は全体的に、日常性に基づいた情景図や場面図が多く用いられており、構造図や概念図が少ない点である。すなわち、

子どもは緑表紙教科書を用いた学習によって、現実性を捉えつつ問題の解決に取り組めることを示唆するだろう。2点目は、文章表現に関して、登場人物の行動に関する描写が多いなど、問題の解決に必要としない情報が多く含まれている点である。例えば、お買い物や遠足の場面での子どもの行動など、子どもの日常性に即した内容が挙げられる。そのことは、子どもが自身の経験と問題場面を照らし合わせるができ、親しみを感じることにつながるだろう。

緑表紙教科書の今日的意義を明らかにした研究として山澤(2009)が挙げられる。山澤(2009)は、現行の教科書の文章題と、緑表紙教科書の文章題を今日的にしたものの双方の児童の解決過程を解釈することにより、緑表紙教科書型文章題の今日的な意義を明らかにしている。研究成果として、山澤(2009)は以下の2点を示している。1つ目、緑表紙教科書型文章題には、日常生活により近い場面設定が多いため、子どもは複数の解答を得ることが出来る点である。2つ目は、緑表紙教科書型文章題は、現実場面を活用することができる算数的内容を含んでおり、子どもの興味・関心を引きだし、子どもの思考を深める問題である、ということである。すなわち、緑表紙教科書の文章題は、場面と日常生活との関連性という点で、現実性のある問題場面への示唆を与えるものだろう。そのため、問題場面の構成に当たっては、緑表紙教科書の文章題を参考とする。

4. 子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

4.1. Gravemeijer et al. (2000)のmodelの自己発達

Gravemeijer et al.(2000)は、図2に示すように、インフォーマルな知識がフォーマルな数学的知識へと向かうための起点である

べきだとする，モデルの自己発達というRMEの鍵となる理論を提示した。RMEにおけるモデルとは，子ども自身がもつ心的構成物のことであり，問題を解決する際にフォーマルな知識に向かって発達するものである。図2において，situations(問題場面)は現実世界であり，算数の授業では，現実性をもつ問題に相当する。model-ofはsituationsのもとで，心的にモデル化されたものであり，未熟なモデルである。このモデルが数学的形成に向かうことにより，model-forとなり，最後に，標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

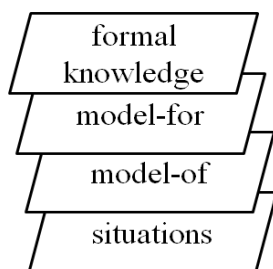


図2 Gravemeijer et al.(2000)の図式

また，その知識の発達の過程を図3に示すように4つのレベルで表現している。situations level(状況的水準)とは，ある特定の知識と方略が，主として学校外の状況の文脈で用いられる水準である。referential level(参照的水準)とは，形式的，一般的な解決には至っていないが，モデルと方略が，主に学校数学の中での提示される問題場面などに対して用いられる水準である。この水準の一般化が目指されることで，数学的な関係に焦点を当てるgeneral level(一般的水準)へと発展する。そしてgeneral levelを土台として形式化させることで，formal level(形式的水準)へと発達していく。

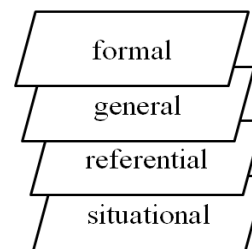


図3 Gravemeijer et al.(2000)の知識発達のレベル

4.2. Van den Heuvel-Panhuizen(2003)のmodelの自己発達

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，Gravemeijer et al.(2000)のモデルの自己発達をさらに発展させ，model-ofからmodel-forへの移行の段階に，さらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図4のように示している。さらに言及すると，model-ofからmodel-forへの移行への段階は，「model-ofがmodel-forへと局所的かつ連続的に翻る」姿で表される(富田，2010)。すなわち，子どもの理解が発達する過程において，一つの活動におけるmodel-forが次の活動におけるmodel-ofへととなり，model-ofからmodel-forへの移行が次々に繰り返されていくということである。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，「model-ofからmodel-forへの移行とは，モデル自体の機能の変化でもあると同時に，子どものモデルの見方の変容である。何をmodel-ofやmodel-forと見なすかはその都度子どもが向き合う文脈，領域，機能に依存する」と述べている。すなわち，教師は子どもの活動を軸とした学習過程の中で，子どもが何をmodel-ofやmodel-forと見なしているかを的確に見極める必要がある。

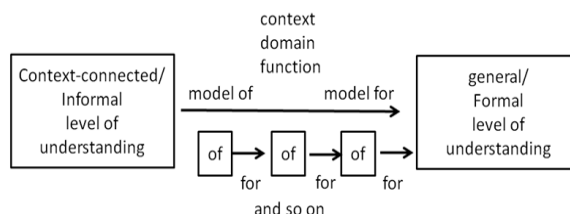


図4 Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は、百分率の教授-学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行の段階として大きく以下の3つを示している。

1. 劇場ホールの着席状況を捉えるmodel-ofが、その後駐車場の満席率など他の文脈を捉えるmodel-forの活動に移行する。
2. 劇場ホールの満席率を表す着色が、占有メーターに発達する。百分率を捉えるモデルにおける問題文の状況、文脈への依存度は低くなる。
3. これまでの活動を通して帯図に表してきた関係を、概算、計算、そして思考の道具として用いるようになる。

上記で示すように、子どもがsituationに取り組む過程で表出された心的構成物であるmodelは、複数のsituationで繰り返し用いられことによって、徐々により洗練されたものになっていく。そしてモデルが漸進的な発達を経た後に、より一般化、形式化されたformal knowledgeへと至るのである。

4.3. Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みの再構築

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)では、複数のsituationで子どもがmodelを自己発達させることで、割合単位におけるformal knowledgeの形成が目指された。具体的に示すと、子どもがインフォーマルな知識の形成を文脈に応じて繰り返すことで、それを洗練させていく姿が見られる。すなわち、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の実践では複数のsituationが存在し、それらに子どもが取り組む中で、formal knowledgeを洗練させていく様相が見られる。実際の我が国の算数・数学教育実践においても、一つのformal knowledgeに対し、複数のsituationから、formal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり、formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の

系統があったりする。

ただ、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)が提示した図式は、それらを反映し可視化することに至っていないだろう。その理由は、複数あるsituationが集約され一つのsituationとして表れていることと、一つのformal knowledgeへの到達が目指されていることが図式から把握できるためである。

そこで筆者は、図5に示すように、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式に多様なsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練を明示化させることで、理論的枠組みを修正し精緻化を行った。

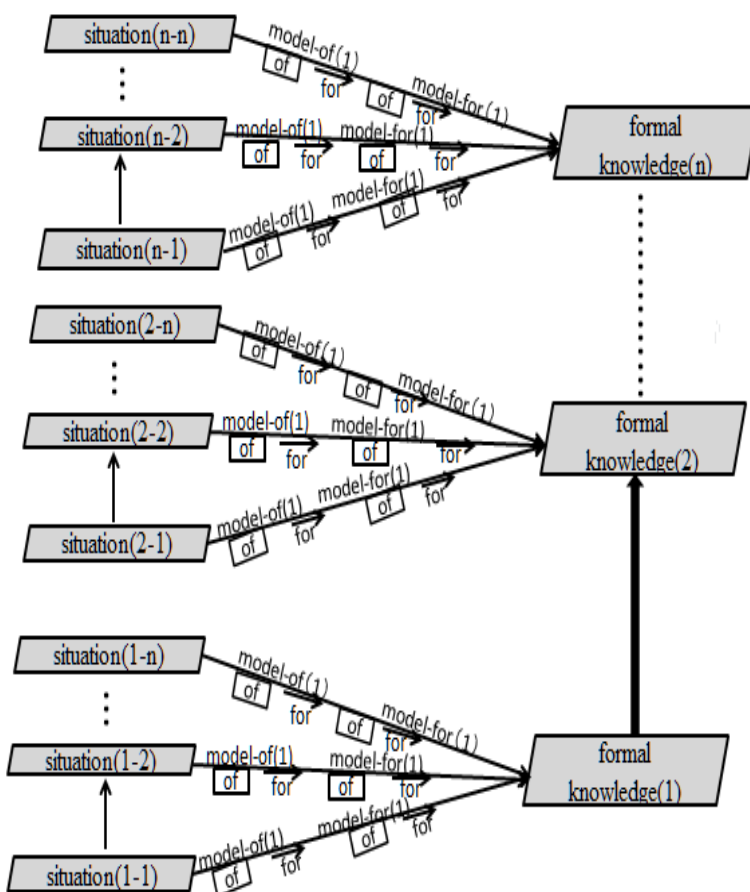


図5 再構築した理論的枠組み

図5において、situation(1-1)はformal knowledge(1)に対しての最初のsituationである。model-of(1)は、situation(1-1)に基づいた

最初のモデルであり，そこからは，formal knowledge(1) に向かって Van den Heuvel-Panhuizen (2003) の図式と同様に model-of と model-for が繰り返される。situation(1-2)は，formal knowledge(1)に対しての第2のsituationである。situation(1-2)から formal knowledge(1)に至るまでの過程は，situation(1-1)の場合と同様である。すなわち formal knowledge(1)に対して，situation(1-1)，situation(1-2)，…，situation(1-n) と複数の situation を設定するのである。formal knowledge(2)は，formal knowledge(1)に対して更に洗練された formal knowledge である。この洗練は例えば，後述する formal knowledge(1)としての1あたりを単位とした見方から formal knowledge(2)としての割合(倍)を求めることへの洗練である。このように，formal knowledge(1) から formal knowledge(N)まで次々と formal knowledge が洗練されていくのである。

5. 新たな理論的枠組みの妥当性の検討

5.1. situation における子どもの学習過程

新たに構築した理論的枠組みの妥当性の検討を行うために，高橋裕樹(2003)における子どもの活動を再解釈する。その際の視点は以下の2点である。1点目は，それぞれの situation において漸進的に発達する model-of と model-for の様相を捉えることである。子どもの素朴な考えに基づいた図や数直線の model が発達していく様子を緻密に検討する。2つ目は，子どもが複数の situation に臨む過程で洗練させる formal knowledge を捉える点である。多様な situation で formal knowledge がどのように用いられ，関連づけられ，そして洗練されていくのか，その過程を精緻に捉えていく。なお，子どもの活動の再解釈に加えて，想定する model の発達を示す場合がある。それは筆者が考える一つの過程で

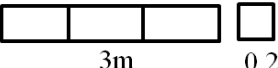
あり，子どもの実際の model の発達とは異なる可能性もある。

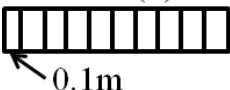
situation(1-1)

1m80 円のリボンを 3.2m 買しました。代金はいくらになりますか。

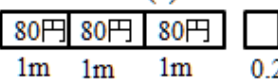
子どもが 0.1 を単位とした既有的整数の乗法や包含除及び等分除の model を発達させることで，1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)($80 \times 3.2 = 265$ (円))の形成が目指される。

実際の子どもの活動として，純小数部分 0.2m の値段を求める解決が活動の焦点となり，0.1m を解決のための単位とする姿が見られた。子どもは，まず問題文の状況を表した図である

model-of(1)を表す。そして，整数の乗

法の model-for(1)より 80×3 を立式し，3m の代金 240 円を求める。その後，子どもは 0.2m の代金を求める活動へと移行する。まず 0.1m に着目し，包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し，その model を基に整数の等分除の

model-for(2)より，0.1m の代金 8 円を $80 \div 10$ より求める。model-of(3)では，model-of(1)より 3.2m の代金が 3m の代金と 0.2m の代金の合計であることを確認する。最後に，整数の乗法の model-for(3)より， 8×2 を立式し 0.2m の代金 16 円を求める。最終的に，代金 240 円と 0.2m の代金 16 円を合計し，3.2m の代金 256 円を求める。その後，子どもは教師との係り合いにより，テープ図を操作することで，80 円を 1 と見なす model-of(4)を

表す。その model を基に，1 を単位と

した割合の考えに基づく model-for(4)を形成することで，formal knowledge(1)である

80×3.2 を表す。

situation(1-2)

10のガソリンで 15km 走るバイクがあります。2.30のガソリンでは、何 km 走ることができますか。

1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)($15 \times 2.3 = 34.5(\text{km})$)が目指される。situation(1-1)と同じく、子どもは既有的整数の乗法、包含除及び等分除の model を用いることで、0.1 を解決のための単位とする解決を行った。その後、テープ図をつなげる活動によって、小数をひとかたまりとして見るなど、formal knowledge(1)を洗練させる姿が見られた。

子どもは、文脈を表す model-of(1)を表出し、その model を基に、整数の乗法の model-for(1)を用いて

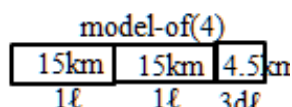
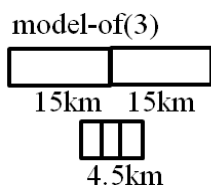
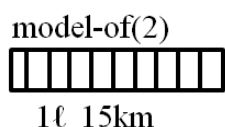
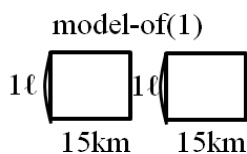
15×2 を立式することで 20に走る距離 30km を求める。次に、0.10が

1d0に単位換算することに気付くと、1d0あたりの距離を求める活動へと移行する。まず包含除の考えに基づ

いた model-of(2)を表し、整数の等分除の model-for(2)より $15 \div 10$ を立式し、1d0あたりの距離 1.5km を求める。

model-of(3)は、3d0の距離に注目した図である。乗法の model-for(3)より 1.5×3 を立式し、3d0に走る距離 4.5km を求める。最後に、20の距離 30km と 3d0の距離 4.5km を足し合わせることで、2.30の距離 34.5km を求める。その後、子どもはテープを用いた

活動へと移行する。子どもは、テープ図を操作することで、15km を 1 と見なす



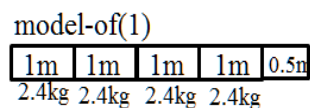
model-of(4)を表す。その model を基に、1 を単位とした割合の考えに基づく model-for(4)を形成することで、formal knowledge(1)である 15×2.3 を表す。

situation(1-3)

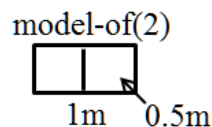
1m の重さが 2.4kg の針金があります。この針金 4.5m の重さは何 kg でしょうか。

1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)($2.4 \times 4.5 = 10.8(\text{kg})$)の形成が目指される。子どもは、テープ図を用いる中で、0.5 や 0.1 を解決のための単位にするなど、解決のための単位を様々設定した。その後、徐々に数直線とテープ図を関連付けた活動へと移行し、比例的な見方を行うことで formal knowledge(1)を洗練していった。

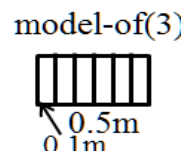
実際の活動として、子どもはまず、文脈を示す model-of(1)を表し、それを基に乗法の model-for(1)より 2.4×4 を立式し 4m の重さ 9.6kg を



求める。次に、子どもは 0.5m あたりの重さを求める活動へと移行する。包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し、等分除の model-for(2)より $2.4 \div 2$ を立式し 0.5m あ



たりの重さ 1.2kg を求める。その後、4m の重さ 9.6kg と 0.5m の重さ 1.2kg を足し合わせることで 4.5m の重さ 10.8kg を求める。解決後、子どもは 0.5 を単位とする解決を確認するために、0.1 を単位とする解決に取り組む。子どもは 0.1m の重さに着目した model-of(3)を表し、等分除の model-for(3)より $1.2 \div 5$ を立式し 0.1m の重さ 0.24kg を求める。次に、 0.24×45 より、4.5m の重さ 10.8kg を求める。



situation への取り組みが終盤となった頃、友達との係り合いの中で、1 を解決のため

の単位とする解決が見られた。初めに、子どもは手や動作を用いながら数直線とテープ図を対応させた図を **model-of(4)** として表す。子どもは倍関係に着目すると、比例的な見方をした **model-for(4)** を表し、それを基に **formal knowledge(1)** である 2.4×4.5 を立式し 10.8kg を求める。

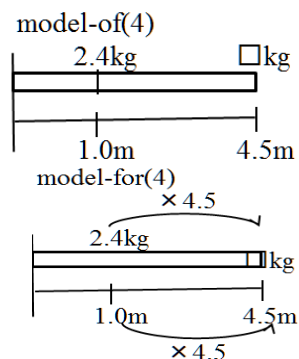
situation(1-1)～situation(1-3) では、子どもは 0.1 を解決のための単位とするために、既存の整数の乗法、包含除及び等分除の **model** を用いた解決を行っている。 0.1 を解決のための単位とした解決は、比例的な操作を子どもが数直線を用いて行うことによって、 1 を単位とした見方である **formal knowledge(1)** へと発展する。

situation(2-1)

1 人に 2.5m リボンを渡したいと思います。 20m のリボンから、何人分のリボンを用意できますか。

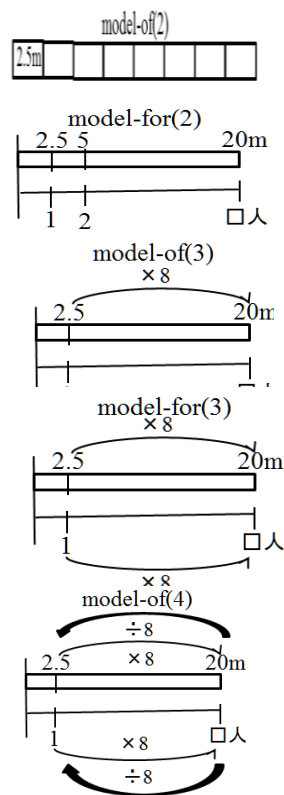
割合(倍)を求めることである **formal knowledge(2)** ($20 \div 2.5 = 8(\text{人})$) の形成が目指される。子どもは、包含除の考えに基づいた **model** により、単位と全体量の関係(いくつつ分)を捉え、取り除いていく操作を行うことで解決に至った。

子どもは、まず文脈を記述する **model-of(1)** を表出し、 2.5cm ずつ区切っていく包含除の考えに基づいた **model-for(1)** を形成することで、答えである 8 人を求めた。その後、子どもは教師との係り合いにより、テープ図をつなぎ合わせ、 20cm を示した **model-of(2)** を表す。そのテープ図と数直線



との対応を示し、**model-for(2)** を形成したところで子どもの活動は停滞した。

以下では、数直線とテープ図を用いた子どもの活動の想定を示す。子どもは、まず 2.5 と 20 の倍関係を示す矢印を記入した **model-of(3)** を表す。そして、比例的な見方に基づき、 1 と $\square$ の倍関係を示す矢印を記入する **model-for(3)** を表すことで、 $2.5 \times 8 = 20$ を立式し、 $8(\text{人})$ を求める。そこから除法的な考えに基づき、矢印が記入された **model-of(4)** が表され、小数の包含除の **model-for(4)** を表すことで、**formal knowledge(2)** である $20 \div 2.5$ を立式に 8 人を求める。



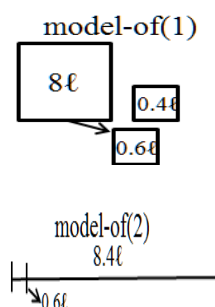
situation(2-2)

8.4l の灯油があります。1 台のストーブに 0.6l ずつ入れると、何台のストーブに灯油を入れることができますか。

formal knowledge(2) ($8.4 \div 0.6 = 14(\text{台})$) の形成を目指す。子どもは、**situation(1-1)** における活動に基づき、整数の乗法と包含除の **model** を用いて解決に取り組み、小数の包含除の **model** を形成した。また、数直線に比例的な操作を行う中で 0.6 を 1 とみるなど、**formal knowledge(1)** を洗練させる姿を見せた。

子どもは、まず文脈を表す **model-of(1)** を図として表し、包含除の **model-for(1)** より $8.4 \cdot 0.6$ を立式するが、その後の活動は止まってしまう。その後、一つを 0.6 ずつ区切っていく **model-of(2)** を表し、その **model**

を基に 14 台を求めた。次に、situation(1-1)の活動を想起し乗法の model-for(2)より $0.6 \times 14 = 8.4$ を立式する。ここでは、0.6 を 1 とみて解決を行うなど、formal knowledge(1)を用いた解決が見られた。



子どもの活動の終盤、授業では除数と被除数を共に 10 倍しても商の大きさは変わらないことが子どもたちから発表され、その子どもたちの発表を基に、(小数)÷(小数)の筆算の仕方を考える展開となった。

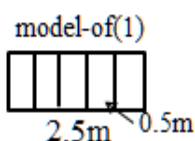
situation(2-1)～situation(2-2)では、子どもは、解決のための基準の大きさをいくつか集めて全体量へ近づけていく操作を行ったり、取り除いていく操作を行ったりするなど、整数の乗法と包含除の model による解決を行った。その後、数直線やテープ図で比例的な操作を行うことで、小数の包含除の model を形成する。その model は、乗法の逆として意味づけされることで発展し、formal knowledge(1)から formal knowledge(2)へと洗練させていった。

situation(3-1)

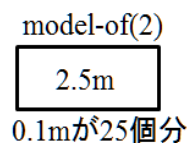
2.5m で 200 円のリボンがあります。そのリボンを 3m 買いたいと思います。3m 買うと代金はいくらになりますか。

1 あたりの量を求めることである formal knowledge(3)($200 \div 2.5 = 80$ (円))の形成が目指された。0.5m や 0.1 を解決のための単位とするなど、整数の乗法と包含除の model に基づいた解決を行った。

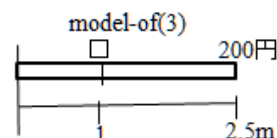
子どもは、包含除の考えに基づいた model-of(1)より、2.5m には 0.5m が 5 つ含まれることを確認する。そして、等分除の model-for(1)より $200 \div 5$ を立式し、0.5m の値段 40 円を求め、それを



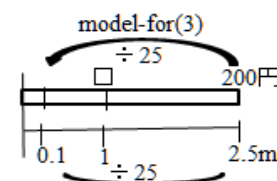
2.5m の値段に加えることで、3m の値段 240 円を求める。その後、0.1m あたりの値段を求める活動へと移行する。包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し、0.1m が 25 個分で 2.5m になることを確認する。その後、整数の等分除の model-for(2)より $200 \div 25$ を立式し 0.1m の代金 8 円を求め、 8×30 より 3m の代金 240 円を求める。



子どもは解決後、友達との係り合いにより 1m あたりの代金を求める活動へと移行する。子どもは、これまでの経験を基に、数量関係を記入した model-of(3)を表す。



そこから、数直線に比例関係の矢印を記入する model-for(3)を形成する。その model を基に、0.1 を解決のための単位とした解決 $200 \div 25 = 8$ 、 8×10 が、0.1m あたりの 10 倍を求める($200 \div 25 \times 10$)として発展し、 $200 \div 2.5$ を表す formal knowledge(3)へと至るのである。

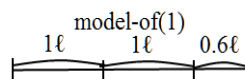


situation(3-2)

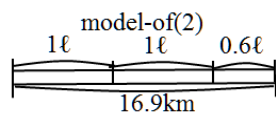
2.6ℓ のガソリンで、16.9km 走る車があります。1ℓ では何 km 走るでしょう。

formal knowledge(3)($16.9 \div 2.6 = 6.5$ (km))の形成が目指される。子どもは 1 を単位とした解決に意味づけを行うために、0.1 を単位とした解決と 1 を単位とした解決との比較を行った。

子どもは、まず文脈を記述する model-of(1)を表し、等分除の model-for(1)より、 $16.9 \div 26$ を立式することで、0.1ℓあたりの値段 0.65km を求める。その後、授業



の展開は、 0.1ℓ を解決の単位とした計算 $16.9 \div 26 = 0.65\text{km}$ と、 1ℓ あたりで走る距離を直接求めた計算 $16.9 \div 2.6 = 6.5$ が発表され、これら 2 つの式の意味と商の意味についての話し合いとなる。子どもは、友達との係り合いの中で



10あたりに走る距離に着目した model-of(2)を表すことで小数の等分除の model-for(2)を形成し、 $16.9 \div 2.6$ を立式する formal knowledge(3)へと至るのである。その後、教師との係り合いの中で、 1ℓ あたりの距離を単位とした解決と 0.1ℓ の距離を単位とした解決を比較した上で、 1ℓ を単位とした解決に意味づけを行った。また、 0.1 を解決の単位とした計算より、簡潔性や能率性などの点から、 1ℓ で走る距離を単位とした解決の方が用いやすいと判断している。

situation(4-1)

(右記の表から)よしこさんのつるの長さをもとにした時、あきらくんとみちこさんのつるの長さは何倍になりますか。

名前	長さ(m)
よしこ	2.4
あきら	3.6
みちこ	1.8

比の三用法を柔軟に用いることができる formal knowledge(4)($3.6 \div 2.4 = 1.5$ (倍), $1.8 \div 2.4 = 0.75$ (倍))の形成が目指される。子どもの活動として、 $3.6 \div 2.4 = 1.5$ の確かめとして $2.4 \times 1.5 = 3.6$ を行うなど、formal knowledge(1)と formal knowledge(2)を関連させ、それぞれを洗練させていく姿が見られた。

子どもは、まず状況を記述する model を表し、formal knowledge(2)に基づき $3.6 \div 2.4$, $1.8 \div 2.4$ を立式し、それぞれの答え 1.5 倍と 0.75 倍を求める。その後、検算として、formal knowledge(1)に基づき、 $2.4 \times 1.5 = 3.6$, 2.4×0.75 を立式し、それぞれの答え 3.6 と 1.8 を求める。

situation(4-2)

あきらは、63 枚のカードを持っています。これは、まるこさんのカードの枚数をもとにすると、1.8 倍にあたります。まるこさんは、何枚のカードを持っているでしょう。

比の三用法を柔軟に用いることができる formal knowledge(4)($63 \div 1.8 = 35$)の形成が目指される。子どもの活動として、 $63 \div 1.8 = 35$ の確かめとして $35 \times 1.8 = 63$ を行うなど、formal knowledge(3)と formal knowledge(1)を柔軟に用いる姿が見られた。

子どもは、個人解決に臨む前の見通しの段階で、「あきらのカードは、まるこさんのカードをもとにして、だいたい、1.8 倍にあたります。」と発言するなど、formal knowledge(1)に基づいた考えをしている。その後、個人解決において、formal knowledge(3)に基づき $63 \div 1.8$ を立式し 35 を求める。その後、友達との係り合いにより、formal knowledge(1)に基づき 35×1.8 を立式し 63 を求める。

5. 2. 子どもの学習過程の考察

5.1 における子どもの学習過程に基づき、子どもの思考過程について考察を行う。とりわけ、複数の問題場面から出発する model の漸進的な発達と formal knowledge の洗練に焦点を当てて提示する。

situation(1-1)～(1-3)において、子どもは既有の整数の乗法、包含除及び等分除の model を用いるために、小数を整数部分と純小数部分に分けて捉えた。その後、テープ図と数直線の中で比例的な操作を行うことで、1 あたりを単位とする見方である formal knowledge(1)を形成していった。

situation(2-1)～(2-2)において、子どもはまず既有の乗法や包含除の model を用いて答えを求めた。その後、数直線やテープ図の中で比例的な操作を行うことで、小数の

包含除の model を形成し、それが乗法の逆として意味づけされることで、割合を求めることである formal knowledge(2)を形成した。すなわち、formal knowledge(1)が洗練されることで formal knowledge(2)へと洗練されることを示す。

situation(3-1)～(3-2)において子どもは、0.5や0.1を解決のための単位とするために、整数の乗法と包含除の model を用いた解決を行った。また、1を単位とした解決に意味づけを行うために、0.1を単位とした解決と1を単位とした解決との比較を行うなどして、1あたり量を求めることである formal knowledge(3)を形成していった。

situation(4-1)～(4-2)において子どもは、これまでの situation で形成した formal knowledge を用いることで、問題を解決することができた。このことは、場に応じて解決の単位を様々な捉え、様々な単位を1とみなすことによって、小数の乗法と包含除、等分除の model が、互いの situation においても用いられるようになり、比の三用法が柔軟に活用できる formal knowledge(4)の形成に至ったと言えよう。

5.3. 再構築した理論的枠組みの妥当性について

子どもの学習過程の考察より、再構築した理論的枠組みの妥当性を得たと考える。その理由は、以下の2点によるものである。

第一に、複数の situation において、子どもが既存の model を用いて解決に取り組み、それを自己発達させることで formal knowledge を形成していった点である。さらには、解決に困難が生じた際には、前に表した model に立ち返ることで解決の糸口を掴み、形成しようとしている model を修正し、そして発展させる子どもの姿が見られた。すなわち、複数の situation において子どもが表出する model が漸進的に発達す

る過程を捉えることが出来たと言えよう。

第二に、子どもが situation で形成した formal knowledge を、文脈の異なる situation で繰り返し用いたり、formal knowledge 相互の意味を比較したりすることによって、formal knowledge を更に洗練させる姿が見られた点である。一方、model の発達と同様に、解決に困難が生じた際には既存の formal knowledge へと立ち返る子どもの姿があった。その中で、子どもは新たに形成しようとする formal knowledge の意味を見出したりしていた。すなわち、子どもは複数の situation に臨む過程で、既存の formal knowledge を次々と洗練させ、新たな formal knowledge を形成していったと言えよう。

6. おわりに

本稿では、現実性のある場面における、子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の程を捉えるための理論的枠組みを構築した。そして、高橋裕樹(2003)の子どもの活動を再解釈することによって、再構築した理論的枠組みの妥当性を得ることができた。

今後の課題として、本稿で定義した「現実性」を基に現実性のある場面を設定し、それを基に調査研究を構想する。そこでの子どもの活動を、再構築した理論的枠組みを基に解釈することで、彼らの小数の乗法及び除法における知識の形成過程を精緻に捉えることになる。

引用・参考文献

- Freudenthal,(1991).RevistingMathematics
Education:China Mathematics education
library.9 Lecture. Kluwer Academic Publc.
Gravemeijer, et al(1997).Mediating between
concrete and abstract.In T.Numes &
P.Bryant(eds.), and Teaching Mathematics:
An International Perspective(pp. 315-345).

UK:Psychology press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

麻柄啓一. (1995). 子どものつまずきと授業づくり: わかる算数をめざして. 岩波書店.

池田敏和. (2015). モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性. 日本数学教育学会誌, 95(5), 2-11.

板垣賢治. (2002). 連続量(小数・分数)の乗除. 日本数学教育学会誌, 84(8), 38-44.

上ノ山達郎. (2000). 「算数教育における文章題指導のあり方に関する研究」. 上越数学教育研究. 25. 39-50.

柄園高士. (1983). 関数の考えを用いた乗法の指導(5年 小数のかけざん): 数直線を使った指導を通して. 日本数学教育学会誌, 65(6), 34-38.

国立教育政策研究所. (2015). 平成26年度全国学力・学習状況調査: 調査結果のポイント. 小学校算数. 文部科学省.

(http://www.nier.go.jp/08chousakekka/01chousakekka_point.pdf).

白井一之. (1997). 乗法・除法の演算決定にはたらく数直線の指導. 日本数学教育学会誌, 79(6), 51-56.

白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究: 数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究21, 69-80.

高橋久誠(2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-. 上越数学教育研究, 15, 85-94.

高橋裕樹. (2003). 小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで

-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

高橋等. (2003). 「子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる」. 上越数学教育研究. 18. 31-48.

田端輝彦. (2001). 小数倍の導入についての一考察-小数倍に表すよさに焦点をあてて-. 日本数学教育学会誌, 83(12).

富田一志. (2010). 割合単元において子どもが知識として形成する固執 model の発達と役割. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

富田一志. (2010). 「割合単元において子どもが知識として形成する固執 model の発達と役割」. 上越数学教育研究. 25. 39-50.

熊谷光一. (2000). 「授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象」. 上越数学教育研究. 25. 39-50.

中村享史. (1996). 小数の乗法の割合による意味づけ. 日本数学教育学会誌, 78(10), 7-13.

藤川亮一・高橋等. (2015). 現実性のある場面から発達する子どもの知識の形成過程について. 日本数学教育学会第48回秋期研究大会発表集録, 483-486.

松原元一. (1982). 算数「子どもの考え方・教師の導き方」. 国土社.

文部省. (1920). 尋常小学算術書第五学年児童用. 国定教科書共同販売所.

文部省. (1935). 尋常小学算術第一学年～第六学年. 新興出版株式会社新興出版社啓林館.

文部省. (2007). 復刻版尋常小学算術教師用解説書. 新興出版株式会社新興出版社啓林館.

山本英一. (1988). 小数の乗法の指導について. 日本数学教育学会誌, 70(12), 2-7.

算数科における活用問題での児童の思考過程に関する研究 —価値を伴った数学的モデル化の理論構築—

佐々木 英男

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

算数・数学は、問題に対して、自分の既習の知識や技能をどのように活用していくかを考え、見通しをもちながら正解にたどり着くことにこそ本来の楽しさがあると考え。児童が実生活の中で算数を活用する場面に直面したときに、自然と既習事項を活用し解決していくことができれば、算数に対する興味関心も向上し、その楽しさも味わえると考え。そのためには、授業の中で、算数そのものや、問題を解くことへの価値を自覚させたり実感させたりすることが重要であると考え。

近年では、2003年のPISA調査による順位の低下以降、学力低下が問題となったが、脱ゆとり路線への転換等により、その後の低下傾向は見られなくなった(国立教育政策研究所, 2012)。一方、全国学力・学習状況調査において、基礎的基本的な知識・技能に関して低下傾向はあまり見られないが、それを日常生活や発展的な学習等に活用する力に関しては依然として課題が残っている(国立教育政策研究所, 2015)。

活用力を育成するための実践として、国立教育政策研究所は、学習指導の充実改善の手立てとして、授業アイディア例を提案してい

る(国立教育政策研究所, 2015)。それをもとに、各自治体で様々な資料が作成され、現場での実践に生かされている(e.g., 群馬県教育委員会, 2014)。

問題場面としては、現実世界に算数を活用する場面を設定し、既習事項を有効に使って解決していくものである。しかし、与えられた問題が解決できれば活用する力がついたと言っているのかという疑問を感じる。その問題は解けても、また別の問題になると解けなかったり、実際の場面で使えなかったりするのでは、本当の意味で活用力がついたとは言えない。

既習事項を活用するためには目的が生じる。その目的には何かしらの価値に関わり、現実場面と算数数学をいかにつなげていくかが重要になる。現実場面と算数数学が結びつくことで活用力も高まっていく。これらを明らかにするためには、現実場面を数学化していく過程が見られる、数学的モデル化を活用場面に取り入れ、そのときの児童の思考過程に焦点をあてることが有効であると考え。

本研究の目的は、「活用力」とは何かを明確にするとともに、児童の思考過程において数学的モデル化が必要な問題を設定し、実践研究から得られたデータを分析するための理

論構築をすることである。特に、既習事項を活用する場面ではどのような価値が形成されているかに焦点をあて、数学的モデル化を要する実践を通して分析することで、児童が算数を「活用した」場面を明らかにし、活用力育成への示唆を得る。

2. 「活用」に関わる理論

2.1 先行研究等における活用

これまでも「活用」や「活用力」に関する研究は多く行われている(e.g.,吉村, 2009;山田, 1998;相馬, 2008)。先行研究を概観し考察することで本研究における「活用」の定義を明確にしていく。

文部科学省(2014)では「活用力」を、「主として「知識・技能等を実社会や実生活の様々な場面に活用する力や、様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」などを指す。こうした「活用力」は、例えば、「事実を正確に理解し伝達する活動」や「概念・法則・意図などを解釈し、説明したり活用したりする活動」、「情報を分析・評価し、論述する活動」、「課題について、構想を立て実践し、評価・改善する活動」等の場面において測ることができるものである。」と述べている(文部科学省, 2014)。

国立教育政策研究所(2015)の全国学力・学習状況調査における調査問題の基本理念では、主として「活用」に関する問題に対して、「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や、様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などに関わる内容」と示されている。

吉村(2009)は、「活用」は、単に実生活や他教科、そしてより進んだ算数・数学に利用するだけではなく、その活用の過程をふり返って、授業者を含めた学習者たちで、学習で

得られたことや学習過程を通して学んだことなどを議論する活動に積極的に取り組むことへの必要性を強調し、これが今求められている活用力の育成の取り組みに必要なものであり、学習意欲の向上につながるものであると述べている。

また、吉村(2009)は、PISA型問題のような調査問題に対応できたということだけで活用する力がついたとは言えず、全く異なる新たな形式で問題提示されたとき、真に算数や数学の学習で培った知識や概念が自己の行動選択として発揮されるかどうか重要であるとし、そのとき不振であれば、またその新たな調査問題に対応できるように学習を進めることが活用力育成の学習となるのであろうかと述べている。

さらに吉村(2009)は、活用の授業場面は学習意欲向上の手段であり、活用力を育成することが目的ではなく、活用の授業場面において「活用した」「活用できた」で終わっては、現代求められている活用力の教育実践ではないとも述べており、「これまでの活用」と「これからの活用」を図1のように示している。

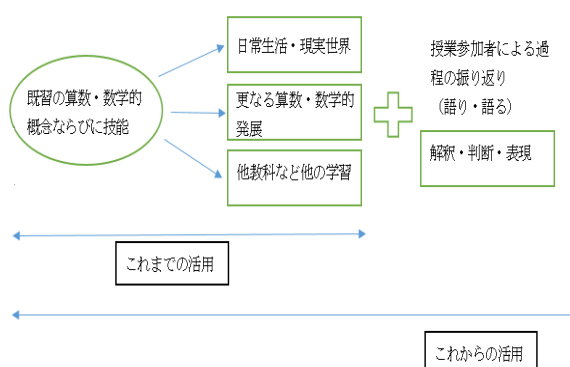


図1 吉村(2009)の「これまでの活用」と「これからの活用」

また、吉村ら(2012)は、「学習者が学校を離れた日常生活において実際に算数・数学を

活用する力」を「真正の活用力」とし、アンケート調査等からその真正の活用力に迫っている。吉村ら(2012)によると、直接的に活用している人たちは、同僚や熟達者とともに、その活動の総体からなる活動共同体の実践家として活用していると述べている。

一方、多くの一般の人たちに関して、吉村ら(2012)は、「大抵の場合で直接的に算数・数学を活用することはなく、多くの知識・技能は忘れてしまうため実際に「役に立っている」という感をもつものは少ないが、自分のものの考え方や見方などに大いに役立っていると感じており、自分の思考や価値観、そして人間性を基礎づけるものとしての算数・数学の影響を実感している。知識・技能は忘れようとも、社会に出ても算数・数学はそれらを学習した人たちにとって確かに生き残っており、「必要」と感じている。つまり、直接的に算数・数学を活用しない多くの一般の人たちにとっての算数・数学の活用の実態は、思考レベル、認識レベルでの活用である。」と述べている。

山田(1998)は、現実世界における数学的知識の活用を促進する授業の在り方を考察している。山田(1998)は、生徒が学校で学んだ数学を現実世界において活用できないことに関わる要因を、獲得した知識について、及び知識を獲得する際の学習形態についての2点から考察している。これらの考察から、山田(1988)は、知識を獲得し、活用していく際の真正の活動の重要性を指摘し、『問題の定式化』『解決方法、方略の主体的な選択・決定』『知識の構成及び再構成』『主体的な意思決定』の4つを伴う活動を真正の活動と捉え、それを実現した事例と合わせて、その意義を考察している。

相馬(2008)は、「算数・数学で「考えるこ

と」が伴わない授業はない。児童・生徒は考えることを通して基礎的・基本的な知識・技能を習得していく。また、習得が活用を促したり、逆に、活用が習得を促進することもある。」とし、「ひとつの授業の中に、「習得」と「活用」をバランスよく、同時に組み込んでいく授業こそが求められる。」と述べている。また、相馬(2008)は、「活用させながら習得させる授業」は「問題解決的な授業」を通して実現されることを述べている。

2.2 本研究における活用

先行研究を概観すると、活用問題を解決することで、現実場面への算数・数学の活用が促されたり、社会に出てから改めて、算数・数学の必要性を実感することができたりするなどの結果が得られている。問題解決に目的を伴わないものではなく、目的があるからこそ価値が生まれる。活用場面ではそれが顕著に表れると考える。そのため、活用場面における児童の思考過程に焦点をあてることに意義があると考えられる。

本研究では、児童の思考過程に焦点を当てるとともに、活用を、「課題に対して、習得している知識を、目的に応じて生じる価値観を伴って発展させていくこと」ととらえる。学習者が、意識的または直観的に課題を解決した際に、どのような価値観をもっていたかを振り返ることで、習得した知識を活用していることを評価していく。「活用」することによって得られるものとしては、「情意が高まる」、「数学的な考えが発展する」、「数学的な価値が高まる」、「日常での数学的な価値が見つかる」、「数学を通して日常の価値を見直せる」などが考えられる。

3. 「価値」に関わる理論

3.1 先行研究における価値

見田(1966)は、「行為を行為者の立場にたっ

て「内側から」理解しようとする主体的なアプローチにおいては、行為の〈動機〉に関する原因～結果の系列ではなく、目的～手段の系列が関心事となる。」と述べている。また、見田は、目的意識・価値意識そのものは、社会的（歴史的・文化的）、自然的（生理的・物理的）諸要因によって規定されているとし、刺激、衝動、本能、習性などを主体的に統合し、一つの「意味のある」脈絡の中に整序する観念的な目的意識・価値意識そのものが、いかにして形成されるかが問題であると述べている。

数学教育における価値や価値観に関しては近年注目されている研究の一つである(e.g., 馬場ら, 2015; 島田, 2015; 山崎, 2015)。馬場ら(2015)は、価値研究において数学教育が、文化言語の伝承や社会的要請などと結びつく社会・文化的な側面も同時に存在していることを挙げ、「「価値」には、個人・集団性、学校内・外性、認知・情意性、変動性（固定性）などの観点が新しく付加されている。」と述べている。また、「「価値」が含意する傾向は、その見えにくさに対して本質的に重要なものを示唆している。」とも述べている。

この「見えにくさ」に迫ることは意義のあることであり、児童の思考に目的や価値がどのように関わっているかを分析することは、本研究における活用との関わりを明らかにすることにおいても重要であると考ええる。

3.2 本研究における価値

本研究における価値とは、個人、または、集団にとってよい、あるいは、他の可能なものと比べてよりよいという意識のことであり、価値の機能を行為の方向付けである(見田, 1966)ととらえる。「行為の方向付け」は問題解決に対する目的にもつながると考える。

また価値観とは、何にどういう価値を認めるかという主体の判断の基準(島田, 2015)ととらえる。島田(2015)は価値観を、数学的価

値観、社会的価値観、個人的価値観の3つに分類し考察している。目的を作るための価値を分析する視点として、これら3つの価値観を基に初等段階における価値観を分類し、自力解決の場面はもちろん、教師と児童、または児童と児童の相互作用によって生じる言語的、または非言語的な行為やその諸結果から分析を試みる。

4 「数学的モデル化」に関わる理論

4.1 先行研究における数学的モデル化

活用問題として用いられることが多い現実的場面を題材とした問題では、与えられた問題場면을数学的に解釈し、それをまた現実場面に戻し評価していく数学的モデル化が重要な過程であると考ええる。

先行研究においては、平林(2015)によると、中等教育段階以降の研究が中心であり、初等教育段階を対象とした研究はまだ十分ではないとされている。初等教育段階では、児童の能力や授業時数の側面から、児童が数学的モデル化を遂行することには制約があると考えられている(平林, 2015)。数学的モデル化の過程は、研究者の視点によってそのとらえ方は様々であるが、先行研究を概観し、本研究における数学的モデル化を定義づけていく。

西村(2001)は、数学的モデルを、「事象を、ある目的に従って、数学的な処理が可能な、数値的表現、グラフ表現、幾何的表現によって表したモデル」と定義し、三輪(1983)の数学的モデル化過程をもとに、定式化の段階を、事象を目的に合った数学的な問題場面に作りかえる段階と、数学的な問題場面から数学的モデルを導く段階に分けて考えている。

阿部(2015)は、「数学的モデル化は、よくわからない現実世界あるいは数学世界の現象を、少なくともそれよりわかりやすい数学的モデルを用いて解決する活動と捉えることができる。」と述べている。また、阿部(2015)

は、「それぞれの数学的モデルを構成する局所的な活動」を、「既知を活用して未知（数学的モデル）を構成する活動」とし、数学的モデル化は、数学化プロセスにおける3つの抽象、現実的な抽象、思考による抽象、実体化された抽象のどの水準にも対応し、したがって、「数学を構成すること」は「数学的モデル化をすること」と解釈できると述べている。

4.2 本研究における数学的モデル化

先行研究では、現実世界から直接数学的モデルへ移行しているものが多く見られるが、本研究では、以下の図2で表されるように、Paul et al.(2003)の数学的モデル化過程を基に考察する。

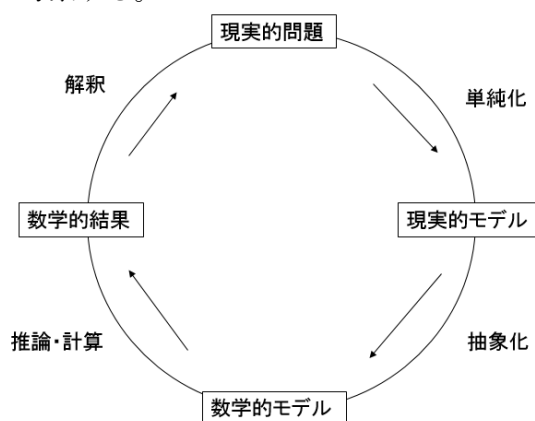


図2 Paul et al.(2003)をもとにした数学的モデル化過程

Paul et al. (2003)は、この過程を「スエズ運河問題」を例に論じている。この問題では、数個の数値が存在しているが、問題自体には正式な数学の文脈は見られない。しかし、解決するにはある種の正式な数学的表現を構成しなければならない。この第一段階の過程を「単純化」と捉え、構成されたモデルを現実的モデルとよぶ。ここに目的や価値も生じてくると考える。

活用問題は解けるが、それに似た問題は解けなかったり、日常の同じような場面で活用できなかったりする要因の一つとして、この

「単純化」の過程を、活用問題を解く場面においてそれほど重要視していないのではないかと考える。日常生活において数学的文脈が常に示されているとは限らないことを考えると、活用問題を解くにあたり、数学的文脈を含まない場面の提示をしたり、解決後に具体的な現実場面を想起させたりすることも重要である。

次に、数学的概念と表記を導入する第二段階の過程を「抽象化」と捉え、数学の記号体系により構成されたモデルを数学的モデルとよぶ。問題解決に際し、表現に関連する元の状況と、特定の数学の問題における数学的表現を発生させることができると、孤立していた数学の問題は明確な数学の問題となる。本研究で用いる「抽象化」とは、日常の事象を数理的にとらえる際、日常の問題場面から性質を抽象して、その意味を明らかにして算数的な問題にしたり、その条件を理想化したりして算数的な処理の対象に問題を作り上げていくこと(日本数学教育学会編, 2004)とする。

第三段階の過程は、結論に至るために、数学的事項の知識、技能を使って、推論していく段階である。初等段階においては、論証による推論は困難であると考えため、計算による数学的処理についてもこの段階として考察する。計算すること自体が論理的であり、演繹的推論が行われているからこそ計算することができる。と捉える。

第四段階の過程では、この推論の結果は、現実的問題の文脈で解釈され適用されるが、適用されなければ新たにモデルサイクルを繰り返す。

以上の第一段階から第四段階までの過程を、本研究における数学的モデル化過程として定義する。

現実場面における活用では、算数や数学の文脈が必ずしも直接現れているわけではない。特に小学校段階においては、現実的問題

を単純化し現実的モデルを構成する過程を入れることで、現実場面での活用をより促すことにつながる考える。

また、Paul et al. (2003)はこの過程の簡易型として非数学的文脈から数学的文脈への転移を図3のように表している。

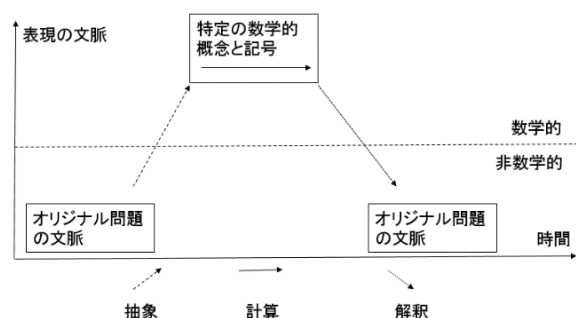


図3 Paul et al.(2003)による非数学的文脈から数学的文脈への転移

これは、非数学的なオリジナル問題（現実的問題）の文脈を、抽象化を経てより高度な表現の文脈である数学的概念を含む記号体系に推移し、計算された結果を解釈することでオリジナル問題へと戻る過程に焦点を当てている。児童が現実的な問題を解決する際に、特定の数学的概念と記号により抽象化した数学的モデルを計算し、それを現実的な問題へ再び解釈して解決に至るという過程を示している。本研究においてはこの数学的モデル化過程に目的や価値という視点を取り入れる。

5.1 思考過程に関する理論的枠組み

児童の思考過程を分析するための視点として、Paul et al. (2003)による記号過程と推論について表される図4のような関係をもとに考察する。

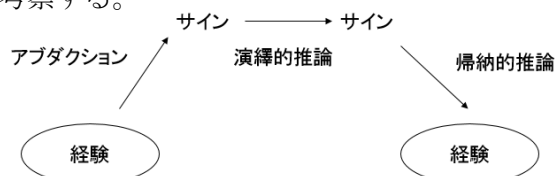


図4 Paul et al.(2003)による記号過程と推論

Paul et al. (2003)は C.S.Peirce の記号論に関わる 3 つの推論である、アブダクション、演繹的推論、帰納的推論を挙げ、図4の過程を考察している。Paul et al. (2003)は日常で遭遇する経験においては、これら3つの推論を意識することなく使っているとも述べている。Paul et al. (2003)は、特に、アブダクションとは、新しい経験に直面したときに、それを理解することが可能な仮説を導き出す推論であると述べており、近年の数学教育研究においても注目されている推論である(e.g., 和田, 2008; 2012)。

しかし、和田(2012)は、この推論は数学教育では軽視されているとし、その要因として、アブダクションの解釈が難解であることや、数学教育におけるアブダクションの意義が明らかになっていないことなどが考えられると述べている。その上で和田(2012)は、演繹的推論や帰納的推論とともに連鎖的に働いているのであれば、アブダクションは数学教育においても重要な推論と考えたと述べており、数学教育においてアブダクションの意義や機能を検討することは、探求的な授業の推測の段階を解明することに寄与するであろうとも述べている。

以上を踏まえ、これらの思考過程を算数科における授業構成との関わりから考察すると図5のようになると考える。

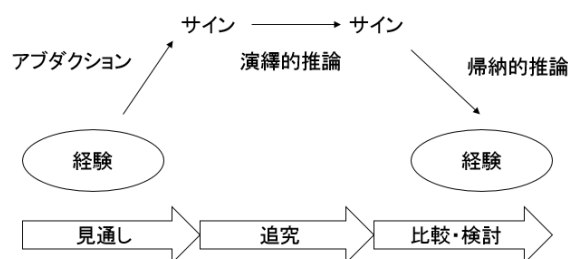


図5 思考過程と学習過程との関わり

一つの経験（現実的問題）を出発点に、アブダクションにより原始的モデルとしての数学的モデルを見出し記号化（数学化）する。前述したアブダクションの性質から、初等段

階においては、学習過程で用いられる「見通し」にあたるものであると考える。

次に演繹的推論により、計算等の数学的処理が行われる。演繹的推論では一般的に論証が行われるが、本研究では小学校での実践を想定しているため、演繹的推論として、数学的概念と記号を用いた計算等の数学的処理も含めるものとする。図2のモデル化過程では数学的モデルから数学的結果に至るまでの「計算」の過程がこれにあたる。学習過程においては「追究」や「説明」にあたると思われる。

最後に、帰納的推論により正しい結果を特定の経験に適用する。図2の解釈がこれにあたる。ここで適用できなければ、再度アブダクションにより過程を繰り返すことになる。学習過程においては「比較・検討」にあたると思われる。

5.2 仮想プロトコルによる分析

図2で示される数学的モデル化過程をもとに、仮想プロトコルにより思考過程を分析する。また、児童の思考に関しては図4を分析の枠組みとして使用する。使用する問題は、平成27年度全国学力・学習状況調査(国立教育政策研究所, 2015)の算数B主として「活用」に関する問題の[2]「場面の読み取りと処理・判断(おつかい)」を例として取り上げる。なお、児童の自由な思考を促すために、原本にある選択肢は考慮しない。また、Tを教師、Cを児童とし、番号は発言順とする。

たか子さんは、おつかいに行きます。

(1) まず、トマトを7個買います。お店では、トマトを次のように売っていました。



図7 H27 算数B[2]「場面の読み取りと処理・判断(おつかい)(1)」

【仮想プロトコル(1)】

T:家庭科の調理実習で使うトマトを7個買いたいと思います。この図のようにトマトが売られていたら、みなさんはどのように買いますか。

C1:おいしそうなのを選んで買う。

C2:1個入りパック7個でいいんじゃない。

C3:7個も持つのは大変だから、パックが一番少なくなるように買うかな。

C4:2個入りパックとか3個入りパックの方がお得な気がする。

T:買い方はいろいろあると思いますが、今回は、どのように買えば安く買えるかを考えてみましょう。そのときの値段も求めてください。

C5:7個の買い方の組み合わせを考えて計算して比べてみよう。

- ・1個入りパックを7つ買うと700円。
- ・2個入りパックを3つと1個入りパックを1つ買うと $180 \times 3 + 100 = 640$ 円。
- ・2個入りパックを2つと3個入りパックを1つ買うと $180 \times 2 + 270 = 630$ 円。
- ・3個入りパック2つと1個入りパック1つ買うと $270 \times 2 + 100 = 640$ 円。
- ・1個入りパックを2つと2個入りパックを1つと3個入りパックを1つ買うと $100 \times 2 + 180 + 270 = 650$ 円。
- ・1個入りパックを3つと2個入りパックを2つ買うと $300 + 180 \times 2 = 660$ 円。
- ・1個入りパックを4つと3個入りパックを1つ買うと $400 + 270 = 670$ 円。

一番安いのは2個入りパック2つと3個入りパック1つ買うときだな。

C6:2個入りパックと3個入りパックは一つ分の代金がどちらも90円だから、なるべく1個入りパックを買わない方法を考えると安く買えると思います。そうすると2個入りパック2つと3個入りパック1つ買う方法しかないでそれが一番安くなります。

買い物の場면을現実的問題として設定した。「買い物」そのものに数学的文脈はないが、3種類のトマトのパックが売っていて、合わせて7個を買いたいという文脈から現実的モデルを与えることになる。「買い物」であれば、C1のように「見た目」という価値によりトマトを選ぶことも考えられる。また「産地」や「味」などの価値も考えられる。しかし、これらの価値の場合、数学化する必要はなくなる。算数を活用するためには、数学的文脈への抽象化が必要になる。

抽象化の過程においてC2は7個買えばよいという目的だけであるため、値段については考えていない。C3も「持ちやすさ」という価値であるため、値段への抽象化はできない。C4の、「お得」という言葉から、安く買うための方法を考えていることが予測される。これにより教師は「安く買う」目的を提示し、抽象化を行った。ここでは、教師による抽象化が行われたが、児童による抽象化も可能であると考ええる。児童による抽象化は目的を自ら設定することになるため、より活用への意欲は高まると考える。また、抽象化は結果を見通す上で重要な過程であると考ええる。

最後に、C5は7個の組み合わせを考え計算によりそれぞれの値段を求めている。結果を比較し解釈することで、一番安い買い方を求めることが出来た。計算（演繹的推論）により導き出された結論を解釈する過程は、図5の帰納的推論として位置付ける。C6は1個あたりの値段に注目し、2個パックと3個パックだけで7個になる組み合わせを見出している。ここでは、アブダクションが行われていると考えるが、演繹的推論が計算等の表記として現れていないため、結果の解釈を表面上捉えることはできない。ここで教師による支援により、表記させたり、発言させたりするなど解釈を表出させることが必要であると考ええる。

(2) 次に、せんざいを買います。家で使っているせんざいが、20%増量して売られていました。増量後のせんざいの量は480 mLです。

増量前のせんざいの量は何 mL ですか。求める式と答えを書きましょう。

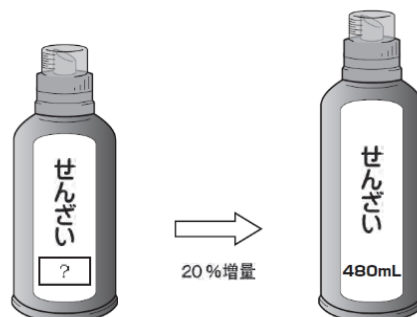


図8 H27 算数 B2「場面の読み取りと処理・判断（おつかい）(2)」

【仮想プロトコル(2)】

T:買い物に行ったときに、洗剤とか、お菓子とか、何%増量っていうのを見たことあるかな。

C7:値段は変わらないで増量していたらラッキーだなんて思うよね。自分で洗剤は買わないからあんまり関係ないけど、お母さんはうれしいだろうし、お菓子とかだったら自分もうれしいな。

T:何%増量って、はじめはどのくらいの量だったのかな。それが分かればどのくらい増えているかも分かるかもね。

C8:20mL 増えたってことかな。

C9:20%と20mL って同じことじゃないでしょ。100mL の20%だったら20mL でいいんだよね。

C10:20%は0.2 だから $480 \times 0.2 = 96$ だけど何かおかしいな。

C11:20%増量っていうときは1.2 倍ってことだから $480 \times 1.2 = 576$ 。これ絶対おかしいよね。

C12:増量前の洗剤の量を求めるということは、 $\square \times 1.2 = 480$ にして、 $480 \div 1.2 = 400$ だよな。

T:買い物をしていて、今回の20%増量っていうもの以外に何%っていう表示を見たことないかな。

C13:値段に20%オフとか50%引きって書い

であるのを見たことある。
C14:消費税は8%だね。

C8 は百分率の意味を理解していないことが予想され、このままでは既習事項の活用は難しい。アブダクションが不十分であったか、そもそも百分率の学習でのつまずきがあったと考えられる。C9 の発言から百分率の意味をふり返ることが可能であると考ええる。

C10 は%を小数で表すことができたが、増量後の20%を求めてしまっている。しかし解答に対する「何かおかしいな」という発言から、帰納的推論による解釈を行ったが、適用できなかったことに気づいていると考える。

同様に C11 は、20%増は $\times 1.2$ であるという知識から、与えられている数値に $\times 1.2$ をしている。ここでも、576 という数値が480 よりも多くなってしまったことで「おかしい」と判断しており、帰納的推論により誤答に気づいていると考える。これらは、基準量と比較量の区別がついていないことも要因の一つと考える。

C12 は既習事項をもとに□を用いて立式すればよいというアブダクションから、演繹的推論により除法の立式を導き、解答を得ている。

最後に教師が増量という言葉以外での使われ方を想起させたことにより、百分率を用いた値段にも今回の学習が活用できることが可能になると考える。

買い物先で何%増量という表示はよく見かける。元の量を求めることによる価値は児童によって異なると予想されるが、割合で示されていたときに、実際の量を計算で求めることができるという数学的価値を感じることで活用することの目的を見出すことができると考える。これにより「お得」という一般的な価値観をより感じることもつながると考える。また、「定価の何%」や「何%引

きの値段」などの場面でも今回の問題と同様に考えられそうだとすることを議論することで活用の幅も広がると考える。

5.3 仮想プロトコルによる分析のまとめ

仮想プロトコルにより、授業過程の中で、児童の思考過程がどの数学的モデリング過程にあるか、また、どの推論の過程にあるかを明らかにすることで、分析の視点が明確になった。さらに、表出していない思考過程を教師が見取ったり、活用の幅を広げるような現実場面の想起をさせたりすることも必要になってくる。

今後は、授業実践で用いる問題を作成し、どのような価値が見出されるかを考察した上で、それらの価値を価値観の3つの分類である、数学的価値観、社会的価値観、個人的価値観のどこに分類されるかという枠組みを作成していく必要があると考える。

6. まとめと今後の課題

本研究の目的は活用力育成への示唆を得ることである。しかし、活用力が育成できたかどうかを短期的に検証することは難しい。算数・数学自体が将来役に立つことを感じられるようにすることはもちろんであるが、算数・数学の問題解決を通して学んだことやその思考過程、思考方法が様々な場面で使われていることを実感できることが重要であると考ええる。実感させるためには、児童の思考過程を見取る教師の能力が必要であり、そのための理論を構築していくことは重要であると考ええる。

今後は、活用場面を取り入れた授業実践を行い、本研究における理論的枠組みをもとに検証していくことで、活用力育成への示唆を得ることを課題とする。

【引用・参考文献】

- Lesh, R. & Doerr, H (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. pp.97-122, Lawrence Erlbaum Associates.
- 吉村直道&東原早織(2012).「算数・数学の有用感・必要感調査からみた真正の活用力についての考察」, 愛媛大学教育学部紀要. pp.1-11
- 吉村直道(2009).「学習意欲の向上を目指した活用力の育成について」, 日本数学教育学会誌第 91 巻第 6 号. pp.8-15
- 山田祐樹(1998).「数学的知識の獲得と活用に関する考察ー現実世界への活用を中心にー」, 第31回数学教育論文発表会論文集. pp.177-182
- 相馬一彦(2008).「考える力と知識・技能を「バランスよく、同時に」ー「活用させながら習得させる授業」をー」, 日本数学教育学会誌第 90 巻第 5 号. pp.23-28
- 文部科学省
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo12/shiryo/attach/1349599.htm (2016.1.12 確認).
- http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/013/siryo/07101711/002.htm (2016.1.12 確認).
- 国立教育政策研究所(2015).「平成 27 年度全国学力・学習状況調査 解説資料」
国立教育政策研究所
http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_result_point.pdf (2016.2.16 確認)
- 島田功(2015).「算数・数学教育における多様な価値観に取り組む力の育成に関する研究ー社会的オープンエンドな問題を通してー」. 広島大学大学院国際協力研究科博士論文. pp.17-57
- 見田宗介(1966).「価値意識の理論」, 弘文堂
- 山崎美穂(2015).「数学教育における価値を捉える視点とその理論的背景」, 日本数学教育学会数学教育学論究第 97 巻, pp.201-208
- 西村圭一(2001).「数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究ー高等学校数学科を中心にー」, 日本数学教育学会数学教育学論究第 77 巻
- 平林真伊(2015).「数学的モデル化における児童による問題場面の解釈の促進ー混み具合の問題に関するインタビュー調査を通してー」, 日本数学教育学会数学教育学論究第 97 巻, pp.169-176
- 阿部好貴(2015).「数学的モデル化と論証の接続に関する一考察ー数学的リテラシーの視点からー」, 日本数学教育学会数学教育学論究第 97 巻, pp.1-8
- 和田信哉(2008).「数学教育におけるアブダクションの基礎的研究ー形式の観点からの検討ー」, 新潟大学教育学部数学教室数学教育研究第 43 巻第 2 号, pp.4-10
- 和田信哉(2012).「探求的な算数・数学の授業における推測の段階に関する研究」, 科学研究費助成事業研究成果報告書
日本数学教育学会編著(2004).「算数教育指導用語辞典 第三版」, 教育出版
- 群馬県教育委員会(2014).「たくましく生きる力をはぐくむ はばたく群馬の指導プラン 実践の手引き」

《翻訳》明日の社会における数学指導 —来たるべきカウンターパラダイムの弁護—

イブ・シュバラル (Yves Chevallard)

エクス=マルセイユ大学 (Université d'Aix-Marseilles)

大滝孝治 (北海道教育大学)・宮川健 (上越教育大学) 訳

本稿は次の論文の全訳である。

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173–187). Springer.

要約

中等段階の数学指導の歴史的分析は、時代に応じて異なった学校教育パラダイムの変遷を明らかにする。本稿は、まだ産まれて間もない新たな教授パラダイムである「世界探究 (questioning the world)」というパラダイムについて述べ、その分析を試みる。このパラダイムは、次の四つの相互に関連する概念によって、それは、「探究 (inquiry)」という概念と、「ヘルバルト的 (Herbartian)」, 「前進認知的 (procognitive)」, 「開かれた人 (exoteric)」という概念である。今日の数学教育の危機がこれらの方向性にそって、願わくは、いかに解決されうのかを簡潔に示すことが、筆者の目標である。これらの方向性は、「作品訪問 (visiting works)」という、依然として支配的である旧来のパラダイムを一時的に取り繕おうとすることだけを求める方略の繰り返しを断ち切るのである。

キーワード：教授人間学理論，探究，数学，世界探究パラダイム，調査と研究の経路

教授人間学理論

40 年以上前、正確に言えば 1972 年の二月に、マルセイユ（フランス）の数学教育研究所 (IREM; Institute for Research on Mathematics teaching) に加わって、私は正式に数学教育に取り組み始めた。私は、この大変光栄に思う名誉あるハンス・フロイデンタール賞の 2009 年受賞者として本稿を執筆する。私が到達した主な結論を概観することで、そして関心のある読者にそれらの見解の適切さを判断して貰うことで、このメダルに報いたいと思う。

まずもって、この発表は私の名前と結びついている理論的枠組みである ATD、つまり教授人間学理論 (anthropological theory of the didactic) を基盤にしている、といっておく必要がある。経済的事実や政治的事実があるのと同様に、教授的事実 (didactic fact) が存在する。以後、私はそのようなものすべてを指して教授 (the didactic) と表現する。教授は人間社会の重要な一側面である。少しばかり簡潔に言えば、それは誰かが何かを「勉強 (study)」 (そして「学習 (learn)」) ^{訳註 1} できるように、誰かが何かをする (あるいはそうすることを意思表示する) 多種多様な社会状況から構成

される、といえる。勉強されるべきもの（そして学習されるべきもの）を、その状況における教授争点(*didactic stake*)と呼ぶ。すでにお気づきであろうが、この教授の定式化では、形として二人の人物に言及されている。第一の人物を示すために文字 y を、そして第二の人物を示すために文字 x を用いる。それにより、 y は x が何かを勉強する（学習する）のを助けるために何かをする（あるいはしようとする）、ということができるようになる。勿論ときには y と x は同一人物となりうる。そのような自律的な学習という（基礎的な）場合には、 x は教授争点を勉強するために自身を助ける。 y がしたりしようとしたりする「何か」は、教授行為(*didactic gesture*)と比喩的に呼ばれ、それは教授全体の一部を為す。

基本的に教授学は、そのような「教授状況(*didactic situation*)」^{訳註 2}、つまり x , y , 教授争点 O から構成される「教授三項(*didactic triplet*)」によって定まる社会状況を支配する諸条件を研究する科学である。数学教授学は、教授争点 O が数学に直接的に関連するとみなされる場合に携わるものである。より一般的に言えば、 O は ATD において「作品(*work*)」と呼ばれるものである。それは、ある決まった機能を果たすことを目的に、人間の意図的な行為によって作り出された物質的もしくは非物質的な何かである。更なる一般性をもたせるために、人物 x を人物の集合 X で置き換えよう。これにより得られる教授三項(X, y, O)によって、典型的な高等学校の授業をモデル化できる。 X は生徒のグループ、 y は作品 O を指導することになっている教師である。勿論、我々は(X, Y, O)の形式の教授三項を考えることもできる。そこでは、 Y は教授「支援者」のチームであり、一人前の教師や様々な種類の「アシスタント」がここに含まれるだろう。ここで一言つけ加えておきたいのは、ATD において、ある条件が少なくとも短期的に人物(*person*)や制度(*institution*)^{訳註 3}によって

修正されえないのであれば、その条件はその人物や制度にとって制約(*constraint*)と呼ばれる、ということである。よって教授学における基本的な問いはおおよそ次のように述べられる。諸制約の集合 K が教授三項(x, y, O)に課されているとすると、 O に対する何らかの決められた関係を x が達成するために、 x や y はいかなる条件を創造したり修正したりすることができるのか、つまりいかなる教授行為を行なうことができるのか？この問いが以下に続く議論の出発点である。

作品訪問パラダイムとその欠点

私が明示しようとしている（そして明確であることを願っている）我々の社会における教授的な側面に関する見通しは、ある決定的な歴史的事実の内に要約されうる。すなわち、数多くの学校制度において未だに繁栄している古い教授パラダイムは、まだ第一歩を踏み出したばかりの新しいパラダイムに道をゆずる運命にある、というものである。長い話を手短にすまずために、教授パラダイムを、勉強されるべきもの（教授争点 O になりうるもの）やそれらを勉強する形態となるものを暗黙裡にではあるが規定する規則の集合と定義する。

私がいままさに述べた「古い」パラダイムというのは、ときには長らく忘れ去れている様々な独特なパラダイムの後続くものである。これらのパラダイムのうち最も古風なものは、19 世紀の間に多くの国々から姿を消した。数学や他の多くの知識領域において、この最古のパラダイムでは、原理や体系（数学や哲学などの）の勉強が中心的に計画されていた。この原理や体系は、人間の創造の歴史において傑出した成果と考えられるものであり、それらに外からアプローチするのである。このパラダイムの内では、我々の多くがプラトンやヘーゲルの哲学体系を今なお勉強している方法で（あるいは勉強したいと熱望して

いる方法で), ユークリッドの『原論』を勉強していた。「名作称賛(hailing and studying authorities and masterpieces)」パラダイムと呼んでいるこの最初のパラダイムは、学校パラダイムに次第に取って代わられていった。学校パラダイムは、今日、否が応でも我々全員が大いに楽しむことになっているもので、「偉大な体系」を勉強するという、より古いパラダイムから数世紀をかけて進化してきた。体系を著してきたとされる「偉大な人物」は退けられ、体系そのものは知識の小片へと砕かれた。数学に限れば、ピタゴラス、タレス、ユークリッド、ガウスなど、知識の小片を権威づけるラベルが未だにその起源を示している。

教授人間学理論の枠組みでは、このパラダイムは、「作品訪問」パラダイム、あるいはATDにおける比喩に従って「記念碑訪問」パラダイムと呼ばれる。なぜなら、三角形の面積に関するヘロンの公式のような知識の小片それぞれがそれだけで自立した記念碑のように扱われるからであり、生徒はたとえその過去や現在における存在理由(raisons d'être)についてほとんど何も知らない場合でさえも、それに感嘆しそれを楽しむことが期待されるからである。

数多くの教師や教育者の果てしなき知的巡礼の旅への永きにわたる献身にも関わらず、そして数多くの生徒がガイドとしての教師にしばしば称賛に値するほど従順であったにも関わらず、この一度普及したパラダイムは今日終わりを迎えようとしている。なぜそうなったのか。次のようにいうことができる。つまり、記念碑訪問パラダイムでは、訪ねられる作品がほとんど理解されない傾向にあるからである。「なぜこれがここで起こったのか?」、「その有用性は何か?」といったことは、一般的に答えられることのない問いとして取り残される。関心のある読者は、このことがどれだけ多くの数学的なものにもいえる

ことかを確認してみたい。例えば、優角という概念はどのような目的のためにあるのか? 同様の問いは角一般についても生じるし、平行線、交線、半直線、線分などについてもまた然りである。勿論、同じことは分数の約分や多項式の展開にもいえるし、10進数という概念、そしてその他にもいえる。もし全くやむをえないというわけではないのなら、どのような状況においてそしていかにこの数学的なものが有用であることを示せるのであろうか? これらの問いはたいていの場合もみ消されるため(記念碑訪問には「何のために?」や「だからどうした?」という疑問の生じる余地はない)、教育者が熱意をもって生徒らに数学作品の純粋なスペクタクルを「楽し」ませようとしているときでさえ、生徒らはほとんどただの観客に矮小化される。

いくつもの要因が、記念碑としての作品を訪問するパラダイムの長期にわたる優勢と近頃のその衰退(そして私の示唆する迫りくる終焉)を、少なくとも部分的に説明する。歴史的にみて、第一の原因は、このパラダイムと、かつて非民主主義であった国々の社会構造もしくはもっと最近の弱々しい不完全な民主主義の社会構造との一致にあるようである。そのような社会は、命令の立場にいる者と服従の立場にいる者とを不可分につなげる広く行き渡った様式(pattern)に基づいている。ほぼすべての制度(家族、学校、国家)は、この基礎的な二元論的様式の複製によっている。ここで私はこの古い社会の構造化について議論する気はない。この広く行き渡っている権力構造の仕組みが権限、権力、もしくは階級(好きなように呼ばばよい)の乱用という形で容易に生み出してしまいう固有の危険性を強調したいだけである。権限をもつ者と服従する者という二元論的構成の存在は、制度を存続させるために必要だったということで、「技術的」には確かにその正当性を証明できるかもしれない。しかしそのような技術的に正当

化される二重構造は、通常は時間的に限られており、そして何よりも範囲が限られている。権限は決められた数の特定の状況に制限されるか、あるいは制限されるべきであり、したがって、生活のあらゆる側面への侵害を控えるべきである(それが圧政に変わらない限り)。しかしすべての人がこの規則を尊重するわけではない。「知識の記念碑」訪問という古典的パラダイムは、今日、権力の二元論的様式との歴史的な関連が無意識的に生み出す教育権力の繰り返される乱用に、たとえ些細なことでも、多くのレベルで苦しんでいる。

この歴史的状況がもたらす帰結は多い。何よりもまず、既にほのめかされている認識論的「記念碑主義(monumentalism)」という形態への学校数学カリキュラムの無抵抗な展開という帰結について述べよう。この記念碑主義では、知識は伝統によって神聖化される塊や小片になり、その想定される「美」は歳月を重ねた風格によって高められる。そして生徒はそれを訪問し、それにお辞儀をし、それを享受し、それを楽しみ、それを「愛し」さえないとしない。しかしこれらはすべて、多くの生徒に関する限り(ほとんど配慮を必要としない幸運な少数の生徒ではなく)、勿論夢想でしかない。

この長期的な状況の主たる結果は、生徒らが「公式」との関係を作り上げる傾向が増大することである。それは、「ゴミ箱」の原理(指導されたすべての知識は、試験が終わるとすぐに当然のことにように忘れられるか、より正確にいえば無視される)と私が呼ぶものと一致する学校の知識との関係である。勿論これは学校一試験システムと同じくらい古いだろう。しかしそれは、制度的で短期的で不安定な動機によって促進される知識との関係を形作ってきた。こうした関係は、取り組んでいる問題について更なる研究を可能にするために、状況(それが数学的であろうとなかろうと)を理解したり、決断を下したり、決

断を延期したりするといった、現実世界の有用性に基づいた知識への機能的アプローチとはかけ離れたものである。

正確には帰結ではないかもしれないが、関連することがさらに困難な事実の中にある。すなわち、学校教育の後に残っている僅かな知識が学校の外で人が直面する状況に耐えるとはほとんどないであろうということである。このことは数学的知識の場合に特によく当てはまる。したがって、学校で生み出された知識は、その「残骸」がそれに固有の機能を発揮できないという点で、使えない傾向にある。しかし問題はそれだけではない。記念碑の訪問は、ガイドとしての教師によってなされる、訪問される記念碑についての報告や説明を聞くことに基本的に帰着する。これはATDのフランス語において発表(exposé)と呼ばれるものである。この文脈では、この言葉が英語で持っている否定的な意味は取り去る必要がある。いかなる説明、報告、あるいは発表においても、その本性より、「詳細」が省かれる。その詳細とは、多かれ少なかれ選択者が恣意的に無視したり完全に削除したりした側面である。フランスのカリキュラムから例を一つだけ挙げれば(おそらく世界中の数学カリキュラムにおいても似たようなものであろうが)、昔から三次方程式の代数的解法は取り扱われない一方、二次方程式は徹底的に考察されることになっている。それゆえ、生徒は数学的世界への学校での訪問によってある終着点に達するが、その終着点の先にはたいてい生徒らにとっていつまでも未開の地のままとなる数学の地が広がっている。もしも生徒らが後の人生で、三次方程式とは何で、どのようにそれが解けるのかを知る必要がでてきたら、この生徒はどうするのだろうか? 現在のパラダイムの方向性に従った学校教育は、この問いへの明確な答えをもっていないようである。

数学作品の訪問に伴う知識と無知との関係

は、人々の需要や要求にますます相応しくな
いものになってきている。今日では、数学的
な知識は全くそれなしに済ますことができる
ようなものである、という信念が人々に広く
共有されるにまで至っている。一方、一昔前
は、数学は膨大な数の個人の問題や集団の問
題を解くための鍵としてみなされていた。こ
の点において、記念碑訪問パラダイムにおけ
る主要な欠陥は、このパラダイムが生じた非
民主主義的なエートスに関わっており、学校
で訪問すべき「記念碑」の選択に関わる。い
うまでもなく、この選択は、たいていの場合、
長く続く伝統と不規則な間隔でおこる大忙し
の改革の複合的な結果である。おそらくその
決定は、この選択を担う人々がこれからの世
代の啓蒙に相応しいとか、合っているとか、
もしくは「よい」とさえ考えるものを、少し
も越えるものではない。訪問されるべき記念
碑の選択は、少しも実験に基づいておらず、
少なくとも豊富かつ適切な経験に基づいてな
されてはいないようである。以下において、
「世界探究パラダイム」と私が名づける新た
な教授パラダイムを選択することにより、「離
れ業」が達成されうるという根拠を提示して
みたい。

世界探究：新しい教授パラダイムに向けて

ある程度まで、我々は新しい教授パラダイ
ムに賛同して現在の教授世界をまもなく捨て
去るだろう。それは、古いパラダイムと対比
すれば カウンターパラダイム
(*counterparadigm*) のようなものである。しか
し以下でみるように、それは先人とのすべて
の関係を絶つ運命にあるわけではない。私が
強調する主な変化は、わずかではあるが抜本
的である。ここで再び三項(X, Y, O)を考えて
みよう。伝統的な教育におけるほとんど目立
たないが決定的である原則は、 X のメンバー
である x は子どもか若者であるということ
である。伝統的に、教育的な企ては成熟以前の

若い人々に関するものである。成熟した時点
ですべての者は教育されている、ということ
になっており、その教育のよしあしはまた別
問題である。この教育観とは対照的に、世界
探究という教授パラダイムでは、教育は生涯
的なプロセスである。教授三項(x, y, O)におけ
る x は幼児でもあり、成人でもあり、老人で
もある。社会の教授的な企ては、すべての者、
つまり将来の市民以上に市民に適用されるも
のである（そして評価される）。したがって、
この決定的な取り組みの評価は、もはや若者
だけに焦点を当てるものではない。我々は 15
歳の人間が知ることになることを検討すべき
であるだけでなく、30 歳から（少なくとも）
70 歳までの人々へと取り組みを広げるべき
である。何といても、社会の教授の成果は、
人々が何を知っているかによって単純には知
れないということである。成果は、人々が何
を学習することができるのか、そしてどのよ
うにそれを学習できるのか、に基づいて判断
されなければならない。

世界探究パラダイムのもう一つの中心的な
原則は、何らかの作品 O について何かを学習
するために、 x は、しばしば何者か y の助け
を借りながら、 O を研究しなければならない
ということである。偶然によって三次方程式
の解法を学習することはない。目の前に生じ
た問いに立ち止まり、考えなければならない。
今日のよくある文化では、おそらく多くの
人々は、答えが明確でないようなあらゆる問
いを避けようとする傾向にある。新しい教授
パラダイムが作ろうとするのは、何らかの問
い Q が生じた際に、 x がそれについて考察し、
多くの場合、 y から少しの助けを借りながら、
価値ある答え A に到達するために、可能な限
り頻繁にそれについて研究するような、新し
い認知的なエートスである。換言すれば、 x
は、出会ったことも解いたこともない問題
を含む状況に常に尻込みしない、ということが
想定されている。詳しくは述べないが、私は、

未回答の問いや未解決の問題に対する理解ある態度を、ドイツの哲学者であり教育学 (pedagogy) の創設者であるヨハン・フリードリヒ・ヘルバルト (1776–1841) にちなんで、ヘルバルト的 (Herbartian) と呼ぶ。この態度は、通常では科学者の研究領域における態度であるが、すべての活動領域における市民の態度となるべきである。

新しい教授パラダイムは、未来の市民や成熟した市民がヘルバルト的になることを望む。十分生じそうな「オープンな」問いの簡単な、多岐にわたる事例を三つ紹介しよう。事例①：社会科学研究に携わるが学校や大学で統計にほとんど触れたことのない多くの人々が、ピアソンのカイ二乗検定に出会い、自由度という理解しづらい概念に突きあたり、『『自由度』とは一体何なのか?』という問題に悩まされる。事例②：物理を専攻する学生は、「に比例する」の奇妙な記号 ($\propto$: 《8 を横にしてその一部を取り去ったもの》 (Miller, 2011)) の操作が数学的にいかに正当化されうるのか少しもわからずにこの記号を使わなければならないことに動揺するであろう。とりわけ変数 z が変数 x と変数 y に比例するならば、 z はそれらの積 xy とも比例する、というようなおもしろい結果に関してである。事例③：生物の多様性の問題に関心のある誰もが次のような数式と出会うであろう。

$$H_e = 1 - \frac{1}{1 + 4N_e\mu} \quad (1)$$

頑固な非数学者にとって、第一の疑問は「それは何を意味するのか? それは何をもたらすのか?」というものである。我々皆にすぐ生じる第二の疑問は「それはどこから来たのか? それはどのように到達されえたのか?」というものである。勿論、前ヘルバルト的な市民は、数学的にみえるどんなものからもたいてい尻込みするので、これらすべての問いを一般的には無視する。しかし、新しい教授パラダイムと同調する市民は問いに直面し、

可能のときはいつでも、それらの問い各々に取り組む。いかにそれが可能であろうか?

記念碑訪問パラダイムによって形作られた教授世界では、ほとんどの人々は「後退認知的 (retrocognitively)」にふるまう。私は「後退認知」という言葉を、古い超心理学的な意味においてではなく、単に、既知の知識を優先的にそしてほとんど排他的に引き合いに出すように人を導く認知的態度を表現するために用いる。この意味での後退認知は、次のようなほとんど前提のようなものに支配されている。それは、一度学校や大学を卒業してしまえば、もし直面する問いへの答えを前もって知らなければ、賢明な答えに達するためのあらゆる強がりを放棄した方がよいというものである。勿論これは、前例のない問いを回避するという上で述べた傾向と関連する。対照的に、世界探究パラダイムはかなり異なった態度を求める。それは、前進認知的 (procognitive) (「精神錯乱や方向感覚喪失を和らげる」薬に関わる言葉遣いと関係のない意味で) と私が呼ぶものであり、この態度は、まるで知識が基本的には今でも発見すべきそして勝ち取るべき (もしくは再発見し新たに獲得すべき) ものであるかのように行動することに人を方向づける。したがって、後退認知的な性向においては、知ることは「後ろ向きに知ること」である一方、前進認知的な献身においては、知ることは「前向きに知ること」である。

私が提示するシナリオでは、人はどのように問い Q に対する答え A を構成しその正当性を確認するのか? 基本的に問い Q の探究は、二つの動きを必要とする。最初に、「探究者」 x は問い Q への既存の答えを求めて関連文献を調べる。この動きは伝統的に学校では禁止されるが、科学研究においては反対に不可避である。ATD では、文字 A の肩に小さいひし形もしくはダイヤ (細長のひし形) をつけた $A^\diamond$ を用いて既存の答えを表記するのが通

例である。これは、そのような既存の答えが、ある意味、それを認証した何らかの制度によって創造され発信されてきたことを表わすためである。勿論、答え A° は「真実」であったり「有効」であったりする必要はなく、答え A° が適切であるかどうかを検討しその答えを評価するのは x の責任である。この行為もまた、教師の与える答えが保証されているという学校の慣習から逸脱したものである。自分自身の答え（「作った者の印」とみなされる小さいハートを肩につけた $A^\bullet$ で通常示される）に達するために、探究者 x は数学的であったりなかったりする「ツール」、すなわち本性の異なる作品を使用しなければならない。 $A^\bullet$ に向かう研究の過程は、「認証された」答え A° と作品 O （答え A° を勉強するためと答え $A^\bullet$ を構築するための両方のためのツールとして用いられる）の複合的な研究から始まる。

x によって導かれる Q の探究は、調査と研究の経路 (research and study path)^{訳註 4} と呼ばれる経路を切り開く。この経路に沿って進むために、探究チーム X は、メンバーがまだ未知の知識（答え A° や他の作品 O と関連している知識）を用いなければならない。この知識は、答え $A^\bullet$ へ向けた道を進むためには精通しなければならないものである。要するに、この点における必要条件は、 X や X のあらゆるメンバー x が、新しい知識（新しい作品）との出会いを望みながら、前進認知的にふるまうことである。

ここでいくつかのより教授的な側面を強調すべきである。第一に、世界探究パラダイムでは、調査と研究の経路に沿って新しい知識に出会ったり、古くて半ば忘れ去られている知識に再会したりすることが、探究者 x の学習方法であるということである。探究者らは、答え A° や仕事道具 O 、最終的には答え $A^\bullet$ を学習したり再学習したりする。すると、記念碑訪問パラダイムでの通常のものとは反対に、この文脈では、学習される内容が事前に計画

されず、次の二つの要素によって本質的に決定されるということは明らかである。それは、まず研究する問い Q であり、それから歩まれる調査と研究の経路である。後者は、答え $A^\bullet$ を作り上げるために遭遇し勉強する A° や O によってさらに決定されるのである。第二に、（数学的あるいは非数学的）作品 O の勉強（答え A° についても同様）は、答え $A^\bullet$ に到達する企てによって決定されるということを強調しなければならない。作品訪問パラダイムにおける x と y に強いられるフィクションとは反対に、与えられた作品 O の「標準的」もしくは「自然な」勉強のようなものは存在しないのである。すべての発表は特別であり、すべてやり尽くすということではなく、多くがそれらの恣意性を隠し損なうのである。何らかの問い Q の探究の文脈における作品 O の勉強は、質的にも量的にも、答え $A^\bullet$ を作成する際の O の使用に大いに依存している。このように文脈に束縛される O の勉強において明らかにされるべきことは、研究者によって獲得される O についての知識が、それが問い Q の探究によってまとめられているため機能的に首尾一貫しているということ、そのため適切な事例においてその使用を説明する O の存在理由が容易に明白になるということである。

社会、学校、新パラダイム

世界探究パラダイムとそれを実現する探究は真空には存在しない。それらは社会と学校に基盤を持たなければならない。これまで概説してきたヘルバルト図式 (Herbartian schema)と呼ばれる教授図式の関連領域は、学校に制限されるものではなく社会全体に渡るということを、ここでもう一度強調しておきたい。あらゆる個人は教授三項(x, y, O)における x でありうる。（教授「支援者」 y は存在しないかもしれないが、そのような場合は($x, \emptyset, O$)と表記され、したがって教授三項は二項へと本当は削減される。）勿論、目立った差異に

気づくのは簡単である。多くの現代社会において、人生の最初の部分（つまり子どもである間）で学校へ通うことが強制される。確かに、一般的には大人のための義務教育のようなものは存在しない。この点において、ここで提唱されているシナリオは根本的な変化を前提とする。その変化は、教育の権利を、「学校(school)」と呼び続けることができる適切なインフラによって提供される万民のための生涯教育の権利へと拡張することを伴う。しかし、ここでの学校は古代ギリシャ、より正確にはギリシャ語 *skhole* の意味でのものである。そもそもこの言葉は余暇に充てられている予備的な時間を指していた（例えば、プラトンの時代ではまだこの意味で使われていた）。後にそれが「勉学に励む余暇」、「知的議論のための場所」、「自由な勉強のための時間」という意味に変化した。このように、我々の社会における教授の新しい役割は、以下で私がより純粋に *skhole* と呼ぶような広く行き渡った制度の開発を示唆する。勿論、我々が知っているような学校は、その今日的な形態において、新しい教授パラダイムにとってかなり異質ではあるが、*skhole* の鍵となる一構成要素である。しかし学校が *skhole* のすべてであるわけではない。例えば、大人にとっても子どもにとっても、*skhole* の大部分は家庭で生じる。家庭での *skhole* 教育(home *skholeing*)は、すでに *skhole* の主要な構成要素であり、今後ともそうであろう。以下では、たとえ *skhole* のいくつかの部分が未だに古い学校パラダイムの支配下にあるとしても、世界探究パラダイムの展開と繁栄を促進するために、*skhole* の可能性に迫ってみたい。

私は大人の *skhole* 教育(*skholeing*)の場合を考えることから始める。今日の「大人の学校教育(schooling)」と我々が呼ぶものは、*skhole* 教育の些細な構成要素でしかない。実際、多くの市民は、部分的にはあるが、例えば日常生活において悩まされる多くの問いを自ら

探究できるように、すでに準備ができています。そうであれば、大人の *skhole* 教育の発展を妨げている主な制約は何だろうか？また大人の *skhole* 教育の発展を助ける条件は何だろうか？第一の条件は、 x は問いに直面したときに逃げるのではなくきちんとそれに向き合う、という事実にある。そのようにするために x は、少なくとも自らに対してそれらの問いを明確に定式化しなければならない。単純に聞こえるかもしれないが、そのようなふるまいは、「親分(master)」と「子分(underling)」の分離とでもいえるような、我々の文化の根本的な決定要因と対立する。この文化では、「親分」は世界（自然世界や社会世界）について子分が問いを立てること、あるいは慣用句にもあるように世界について「問う」ことを禁止し、「親分」ひとりが世界を問い世界を変える正統性をもつ。純然たる観察（しかしこの結論は容易に実験することができる）により、多くの人々がほんの少しの問いを自ら立てることも興奮することがわかる。問いを立てることは市民の絶対の権利になってきたが、歴史的にみれば、それは強力な支配者の特権であった。しかし、この権利は、十分に発達した民主主義においてあるべきようには、未だ行使されていない。

ある市民が何らかの問い Q を探究しようと決心した、つまり教授三項($x, ?, Q$)における探究者 x になったと想定しよう。この研究の段階において、二つの問題が生じる。一方で、 x は何者か Y から助けをもらおうと考えるだろう。もう一方で、問い Q の答え A° と関連作品 O を求めて「世界を調べる」必要がある。これら二つの問題のうち第一のものには今のところ決まった解決策はないが、第二の問題にはおおむねよい方法がある。それはインターネット特にウェブによって与えられる情報の全体にある。実際、私は *sensu latissimo* な（最も広い意味での）インターネットへ言及したい。つまりここでいうインターネットとは、

今日の語法とは異なり、世界中のすべての図書館を含むものである。というのも、どんな文献もすでにインターネット上で利用可能であるか、もしくはまだ利用できないだけとみなすことができるからである。ここで例を一つだけみてみよう。「に比例する」の記号($\propto$)についての数学の探究事例において、Jeff Miller の『関係記号の初期使用』(2011)についての有名なウェブサイトから始めたとき、人は数学的表記の歴史に関する Florian Cajori の古典(1993, vol. 1, p. 297)へと辿り着く。この本は今度は三冊のより古い本、記号「 $\propto$ 」を導入した Emerson (1768), そして Chrystal (1866), Castle (1905) へと次々に探究者を向かわせる。今日、これらの本はすべてオンラインで無料利用できる。加えて、インターネットは、例えばインターネットのフォーラムや議論スレッド上で、多くの探究者 x が臨時の支援者 y から助けを得ることを可能にもする。第二の問題への主な解決策が第一の問題へも(部分的な)解決策も提供しているのである。

sensu latissimo なインターネット上での探究は、よく知られている困難と出会う。第一に、もし少なくともいくつかの適切な資料が見つかることを x がほぼ知っているならば、研究される問いをさらに深めていくことを可能にする文献は多くないであろう。第二に、探究者 x は、既存の適切な文献を見つけだすことも、集めてきたわずかな情報を最大限利用することも、いずれもできないことがある。このように、探究者の知的装備(より正確には、ATD 特有の プラクセオロジー(*praxeology*)の語の意味では、探究者の プラクセオロジー 装備(*praxeological equipment*))は、オンラインやオフラインの資料の場所を突き止める能力と、それらをうまく活かすために必要な知識という、二本の柱に支えられている。これは、集められた作品 O をうまく使用するという問いへと導く。最も一般的な問い Q は様々

な知識領域と関連する作品 O の使用を伴うため、 Q の研究は、共通の企てのために様々な「学問」からツールを集めて行なわれる、学際的な追求であらねばならない。この点で、私が市民と呼ぶ者は、ある政治的コミュニティのメンバーという意味での個人ではないということを強調しなくてはならない。それとは全く反対に、市民は、自身の成果や可能性、特にあらゆる種類の問いの探究者としての成果や可能性に照らして認められるのである。このことから次のことが生じる。つまり、新しい教授パラダイムの前進認知的な視座では、市民は多くの領域で教育されるべきであるというだけではなく、自らにとって新しい知識の領域を、たとえゼロからであっても、勉強し学習する準備ができていなければならないことである。市民とは単なる遵法の民に留まらない。探究は勉強を要求するのだから、市民は聡明でなければならないし、いつまでも未知の作品を勉強する心構えができていなければならない。

私がここで描く市民は、自らに要求されていることに従って行動することができずと感じるかもしれない。この感情は、基本的に学校や社会の古い教授体制(*didactic organisation*)から生じる。それは、我々が経験するどんな知識の欠乏に対しても、知りたいことを何でも教えることができる神がかった人物がどこかに存在するという幻想を押し付ける。そのような幼稚な信念は、我々の届く範囲外の催しへの無抵抗と服従に通ずる。世界探究パラダイムでは、何らかの関心のあるテーマについての授業や会議に出席することは、勿論軽視されない。しかし我々はそれを、共通の結末へと至るための手段、つまり問い Q への答え A^* を生み出すために役立つと考えられる何らかの確固とした作品 O について何かを学習するための手段として捉えなければならない。そのような状況では、古い学校パラダイムにさらされていることから生じ

る無知と知識との関係のために、我々は必要とされるすべての知識をもっていないことにいら立ちを感じがちである。その知識とは、歴史学、生物学、数学、物理学、化学、哲学、言語学、社会学など、いつまでも続くすべての知識である。ここで暗黙裡に空想されている性格は、私が閉じられた人(esoteric)（したがって形容詞を名詞としても使用している）と呼ぶに至ったものであり、必要とされるすべての知識を既に知っていると思定される者である（「歴史学者」、「生物学者」、「数学者」、「物理学者」などに対して多くの人々がもっている考えは、このファンタジーと一般に類似している）。対照的に、開かれた人(exoteric)はいつまでも勉強し学習しなければならず、閉じられた人という捉えどころのない地位へは決して達することがない。確かにすべての真の学者は開かれた人であり、学者であり続けるためにはそうであり続けなければならない。私がここで定義するものとしての閉鎖主義(esotericism)は寓話である。

したがって、新しいパラダイムにおける市民は、ヘルバルト的であり、前進認知的であり、開かれた人であるよう求められる。この新しい市民性をいかに促進できるだろうか？純粋な無知から十分な知識へのすべての道を進むために必要な認識論的な情熱に取り憑かれること以上に、決定的な条件となるのは、大人の生活において研究と調査に割り当てられる時間であると確実にいえる。たいていの場合、この時間は年月が経過するうちにどんどんゼロに近づいていくようである。この点に関して、私は、古代ギリシャが打ち立てたトリックを何度も繰り返していいたい。つまり一部の現代人が大いに謳歌しているようである余暇の時間を研究と調査の時間に変えるといった、真正な *skhole* の伝統におけるトリックをである。そのような追求は、フロイトが一度 *Kulturarbeit* 「文明的仕事(civilisational work)」と呼んだものに関連しており、抜本的

な変化はまだ起こっていないが、それは新しい教授パラダイムの出現に絶対不可欠なものである。

研究と調査に割り当てられる時間の問題には、普通の学校教育の場合は簡単な解決策がある。若者は *skhole* の定義する原理に従って、研究をしに学校へ通う。しかしどの程度学校は新しい教授パラダイムを受け入れるのだろうか？私はこの問題に長居するつもりはない。しかしながら、あまりに多くの場合において、いわゆる「探究ベース」の指導が何らかの形で「偽探究」を講じているということを述べたい。大抵そのような探究を生み出す問い *Q* は、教師が事前に決めた作品 *O* を生徒に見つけさせ勉強させるための単なる浅はかなトリックだからである。勿論、これは作品訪問パラダイムによる支配のわかりやすい帰結である。このパラダイムは、カリキュラム内容が複数の作品 *O* によって定められるということの意味する。対照的に、世界探究パラダイムでは、カリキュラムは複数の問い *Q* によって定められる。しかしながら、これらの問い *Q* を探究した結果として勉強した作品 *O* は、カリキュラムを定めたり改善したりする過程において中心的な役割を果たす。「初源的」な問いの集合 *Q* から始め、最終的に勉強されるカリキュラム内容 *C* は、答え *A*^o や作品 *O* とともに、問い *Q* や答え *A*^o を含んでいるであろう。

しかしここで二つの疑問が生じる。第一の疑問は、「初源的」な問いの集合 *Q* に関わる。これらの問いはどこからどのような仕組みで現れるのか？国定カリキュラムの場合、学校で研究されるべき初源的問いの集合は、「コア・カリキュラム」つまり社会と学校の間の国家的取り決めの基盤を構成する。結局、集合 *Q* が何から構成されるかを注意深く民主主義的に決め、カリキュラムの耐久年数の慎重なモニタリングに基づいてその内容を定期的に改訂・更新するのは国家の責任である。それは社会とその学校教育システムとの関係に

とって本質的なので、コア・カリキュラム（つまり「初源的」問い）は、社会の *skhole* において決定的な役割を果たす。しかし、カリキュラムが初源的問いのみによって定められるわけでは必ずしもない、ということは明らかである。これらの問いによって引き起こされる探究は、決して一意的に定められない。周知のように、探究は様々な研究と調査の経路を辿り、そこで探究する問いや、遭遇しある程度勉強するその他の作品は、確かに経路に依存している。結果として、たとえコア・カリキュラム（上で定めた意味で）が詳細にされたとしても、結果としてのカリキュラムはそれに内在する変動性のため曖昧に定められるであろう。この状況に対して、いかによりうまく対処できるだろうか？

問いの（有限の！）族を *O* としてもつ教授三項(*X*, *Y*, *O*)を考えてみよう。生徒の集まりに対して二種類の教授三項が想像できる。第一に、初源的問いとそれらの研究が生み出す問いから成る問いの動的な族が *O* となるセミナーである。（ここで描かれるシナリオは幼児から上級の生徒にまで適用することを想定しているため、私がここで使用している用語はかなり広い意味、つまり多種多様な具体的状況へ適応できるような意味でとらえなければならないことに注意してほしい。）このセミナーは、初源的問いがただ一つの学問領域へ分類されることはほとんどないため、基本的に学際的である。第二に、セミナーにおいて提案された、ある特定の学問に本質的に関わる問いや作品を勉強するための、学問的ワークショップである。例えば、化学のワークショップ、数学のワークショップ、歴史学のワークショップ、生物学のワークショップなどがある。実際のワークショップは、セミナーにおいて研究された初源的問いに大いに依存するだろう。鍵となる事実は、この二段階の過程（セミナーたすワークショップ）において、いくつかの作品 *O* といくつかの学問は、

探究において頻繁に必要とされるので、何度も繰り返し出てくるということ、その一方で他のものはたまにしか出会わなかったり全く生じなかったりするということである。ある作品 *O* についての「流通の程度」は、もしそれがあある学校段階で行われているすべてのセミナーに渡り全国的な平均値を取れば、絶え間なく改定される曖昧な集合（実際のカリキュラムの本質に対するより適切な見方）と比喩的にみなされるカリキュラムにおける作品 *O* の「メンバーシップの程度」となる。上で指摘したように、そして基本的に主観的な意見に基づいて作られたカリキュラムを押しつける昔からの習慣とは反対に、世界探究パラダイムは、自然世界や社会世界を問うたり知ったりする試みにおいてどの資料が本当に利用されているのか、有機的な方法により浮き彫りにすることを可能にする。

数学をどう位置づけるのか？

ある時点で、何らかの便利なツールが探究者にとって利用不可能であることがわかると、探究がストップするであろう。探究が急停止する主たる理由は、進展し続けるために理想的には必要となる、何らかの作品 *O* の本質的な部分の習得が探究者の手に負えないものになっていることである。ここで強調したいのは、これは、学校での探究にも研究チームの探究にも共通に見られる法則であり、決して「レベルの低い開かれた人」だけに限ったことではない、ということである。それは探究という芸技の本質的な部分であり、そのような「出来事」は探究者の冒険における曲折の一つにすぎない。しかし、ある探究において辿った経路は、その決定要因がなんであれ、上で示した教授シナリオにおいて重大な結果をもたらす。つまり、もしある作品 *O* が国中のセミナーやワークショップにおいてほとんど引き合いに出されなければ、この作品 *O* は国家カリキュラムから結局は消えることにな

る。より率直に言えば、これは伝統的な教科の一部の消滅という結果を生み出しうる。なぜなら、新しいカリキュラムにおいてある学問が占める場所は、カリキュラムの生み出す問いを探究するために、その学問がどれだけ有効なツールを提供できるかに依存するからである。その場所は、疑問も呈されない過去の遺産であった、昨今に確立されたどんな学問階級にももはや依存しないのである。伝統的に繁栄してきた学問は、学校における自身の未来が気になるころだろう。栄え続けるのか？今にも衰えるのか？この問いはすべての学問に突きつけられている。特に数学に。

もし知識が、我々が合理的に理解したり達成したりできるようにするものによって価値づけられるならば、我々が直面する問題は、学問の運命というよりも、むしろセミナーやワークショップにおいて行なわれている探究の価値や質である。この点からすれば、先述のシナリオは、カリキュラムに関わるあらゆる問いに「制御の問い」を追加する可能性を認めることによって、大幅に改善されうる。これはある意味、セミナーやワークショップから全国規模へと広まるボトムアップの情報の流れに、監督する権威者によってもたらされるトップダウンの学校の規制についての制御を加える。どんな問い Q も確かに、問い Q の探究の質や徹底さや深遠さを制御するための試金石となるような一つあるいは一連の「補助的な問い(side question)」 Q^* によって、有意義に補足されうる。このような方法で、研究される問いを深めるために何らかの作品 O の有用性を有意義に（全くの強がりからではなく）指摘することが可能になる。例えば、生物多様性について問いに、遺伝的多様性についての問いや、上述の数式 (1) の意味や興味深さについての問い、つまり遺伝的多様性の探究における数学の重要性に探究者の注意を引くような問いが、適切に加えられるであろう。

知識の様々な領域と関連する無数の作品にとってと同様に数学にとって、そのような制御の問いのシステムは x と y に次のようなことを思い出させるために不可欠なようである。それは、問いの探究には、 x と y が越えることがまさに期待される文化的境界の内側からすれば、研究下にある問題から遠くかけ離れたもののように最初は思われるツールの使用が必要になる、ということである。数学作品の場合、これに特に当てはまる。根深い歴史的な事情から、数学は今日、形式的に崇められていると同時に、精力的に避けられている。多くの人々は、数学を「する」義務がなくなるやいなや数学から逃げていく。このことは、俗にいう「数学って楽しい！」ということをして「数学不信心者」に納得させ、彼らに再度気に入られるために誘惑方略に取り組む決心を多くの数学教育者にさせてきた。ここで簡潔にいつておきたいのは、この方略には二つの主要なデメリットがあり、私の考えでは、それは完全に捨て去られるべきものである、ということである。第一の欠点は今日の教育世界において寛大に無視されているようである。深い政治的理由や道徳的理由から、学校でなされる指導は、感情や信念を操作することを控えなければならない。 x (と y) の信心の自由に関わる限り、我々は非の打ちどころのないようにしなければならない。その結果、数学教育者は、生徒が数学を「愛する」ように仕向けようという誘惑に耐えなければならない。数学教育者の唯一の使命は、生徒が数学を知るようにすることであり、それはもう少し大変な仕事である！好き嫌いは、真に私的な空間に属する個人的な秘められた感情である。勿論、数学をよりよく知ることが数学に向けた何らかの形の熱中をもたらすことは大いにありうるだろう。しかしこれはすべて個々人の信心に関わる。

非常に定評のある誘惑方略の第二の欠点は、いわせていただければ、その非常に低い生産

性である。他の学問と同様に数学も抱えている問題は、大衆の問題である。私の考えでは、その根元は、数学がこれまで長い間苦しんできた文化的拒絶の過程にある。それは、真に数学的な制度の外では、数学は「一般人」の景色から完全に消えてしまい、そのため数学と全然無関係というわけでもないトピックについての多くの文献に数学の足跡が一切みられないという重大な帰結を伴うものである。これは、多くの探究の質を危険にさらす事実である。ここで簡単な例を与えよう。「なぜ氷は水に浮くのか？」という問いを考えてみよう。「氷は液体の水よりも密度が小さい」はその答えの一部である。ではなぜ氷は液体の水よりも密度が小さいのか？よくある答えは、 H_2O 分子の配列が液体の水よりも氷においてより広い空間を占めるからである、というものである。この答えの吟味はいくつかの簡単な計算へと通ずる (Ravera, 2012)。確かに、特定の条件下で、氷の単位格子が、長さ 452 pm の辺と 60° の角をもつひし形を底面に、737 pm ($737 \times 10^{-12} \text{ m}$) の高さであることは示しうる。単位格子の体積は、そのため以下の通りである。

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 452^2 \times 737 \times 10^{-33} \text{ L} \quad (2)$$

水のモル質量はおおよそ 18 g/mol である。氷の単位格子の質量は四つの水分子の質量であると知られている。アボガドロ数はここでは $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ とする。これより単位格子の質量 M は次のようになる。

$$M = \frac{4 \times 18}{6.02 \times 10^{23}} \text{ g} \quad (3)$$

氷の密度はしたがって以下のようになる。

$$d = \frac{M}{V} \approx 917 \text{ g/L} \quad (4)$$

この（おおよその）結果は氷が液体の水よりも軽いということを裏づける。この計算はすべて 15 歳で習得する（ことになっている）初等的なツールを使用している。それにも関

わらず、この計算はインターネット上で利用可能なもっとも適切な説明にもたいてい出していない。これは例外的事態ではない。数多くの場合、提示されているトピックについての数学が明らかに欠けており、まるでそれが全く存在していないかのようなのである。これがまさに数学教育者が戦わなければならないものである。この点においては、数学に関わる限り、研究することを提案されるどんな問いに対してもとりあえず追加されるべき「試金石となる問い」は、次のようなものになる。「その事柄についての数学は何か、そしてそれに気づくことでいかに答えの質は高まりうるのか？」

これが本当に数学が誘い込まれてきた歴史的トラップから抜け出す方法になるのだろうか？私はそう信じる。ごく僅かな人々に対してだけうまくいっている誘惑方略という手だけでは落とし穴にすぎない。私の考えでは、唯一の現実的な解決策は、次のことについて、市民を合理的に説得する試みにあり、さしあたり生徒を説得する試みにある。それは、数学を省くことは、自然世界と社会世界の両方において我々の理解を決定的に貧弱にし、そして我々の取り組みの質を劇的に悪化させるということである。勿論、これは立派な言葉だけでは達成されない。学校の内外において、特に生活を豊かにするために国民により学習に割り当てられた余暇の時間において、日々の行動が必要となる。この追求において、数学教育者は、これまでとは異なる決定的な役割を果たすことになる。

何世紀もの間、文化的な制度としての数学は、二つの自己表現をまとめて繁栄してきた。つまり数学は、広く浸透したエートスとやや帝国主義的な気配とともに、「純粋」数学と「混合」数学から構成されるものとして理解されていた。後に「応用」数学と呼ばれる「混合」の部分は、ここ数十年の間、学校において着実に衰えてきた。それに対して、前者の部分

の内の残ったもの（初等的ではあるが、純粋数学）は古の「帝国」を象徴化し維持しようとした。この時代は今終わろうとしている、と私は考える。今日、混合数学の認識論的精神を復活させねばならない。しかしそれは、文化的な傲慢さをもつことなく、しかし数学が我々人類にとって問題ではなく解決策であるという考えを活性化するために必要な政治的そして社会的意図をもってなすべきである。

引用・参考文献

- Cajori, F. (1993). A history of mathematical notations (Vols. 1-2). Mineola, N.Y.: Dover.
- Castle, F. (1905). *Practical mathematics for beginners*. New York: Macmillan.
- Chrystal, G. (1866). *Algebra: An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges* (vol. 1). London: Adam and Charles Black.
- Emerson, W. (1768). *The Doctrine of fluxions*. London: Richardson.
- Miller, J. (2011, November 11). *Earliest uses of symbols of relation*. Retrieved from <http://jeff560.tripod.com/relation.html>
- Ravera, K. (2012). Pourquoi la glace flotte sur l'eau. In Tangente (Eds.), *Mathématiques et chimie. Des liaisons insoupçonnées* (pp. 80-82). Paris: Pole.

訳註とそれに関わる引用・参考文献

訳註 1：今回の訳出において、「勉強」はすべて「study」の、「学習」は「learn」の訳である。「study」は文脈次第では「研究」とも訳されている。訳註 4 も参照。

訳註 2：「didactic situation」や「didactical situation」はしばしば「教授学的状況」と訳されるが(cf. 宮川, 2011), この翻訳では他の「didactic～」の訳語との統一性を重視し、「教授状況」と訳出する。意味に違いはない。ちなみにブルソー(G. Brousseau)の理論

では「didactical」が、シュバルールの理論では「didactic」が、形容詞としてそれぞれ用いられる傾向にあるようである。

訳註 3：ATD において「institution」は特殊な意味をもっており、例えば、宮川(2011)はそれを「知的集合体」と翻訳しているが、本訳文内では簡潔のため一貫して「制度」と訳出する。

訳註 4：フランス語では「*parcours d'étude et de recherche*」である。これに対して様々な英訳が当てられてきたが、最近では「研究と調査の経路: Study and Research Path」に統一されつつあるようである。この用語における study と research の併用について、シュバルールは次のように述べている:《ここでは「study [研究]」は包括的な用語として扱われており、意味として調査(research)を含んでいる。しかし、もし以下で私が明確にしようとしている意味でこの言葉が理解されるようであれば、学校での study [勉強] は、しばしば調査の邪魔をする。[...] 今日、ほとんどの学校の study [勉強] は事柄を見つけること(finding things) [...], つまり必要な活動(praxeology)を与えたり記念碑になったりする作品を見つけることから成り立っているようである。そのような諸作品は、それらがそこにある理由を見つけ出す(find out)作業を試みられることもなく、ただ訪ねられるのみである。「研究と調査の経路」における「調査」には、調査する、つまり「事柄を見つけ出す(find things out)」可能性を生徒に与えるためにそのような経路がデザインされる、という考えが込められている。》(Chavallard, 2006, p. 29).

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

宮川健(2011).「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 94, 37-68.

謝辞

日本語訳版の掲載をご快諾いただいたばかりでなく、訳者の素朴な質問に丁寧に答えてくださった、エクス=マルセイユ大学（フランス）名誉教授イブ・シュバラール先生に感謝の意を表したい。加えて、本訳文のベースとなった本論文の草稿の翻訳をチェックしてくださった福田博人さん（広島大学大学院国際協力研究科院生）と森山健さん（島根県中学校数学科教諭）、シュバラール先生へのインタビューをサポートしてくださったヨハンソン浅見由紀子さん（イエーヴレ大学、スウェーデン）にもお礼をいわねばならない。ありがとうございました。

（大滝孝治・宮川健）

訂正とお詫び

渡 部 一 嵩

上越数学教育研究第 30 号（2015）の掲載論文，渡部一嵩「算数教育におけるオープンな問題の活用に関する再考－作成したオープンな問題と生起した算数的活動の關係に着目して－」（pp. 73-84）において，文献の引用に関して著者御本人から引用の不備についての指摘がありました。

つきましては，下記のとおり，訂正してお詫びいたします。

記

【訂正】

本文（p. 79，右段落 3 行目）「これは，周りの長さが 60 cm のエジプトひもを用いて行うオープンエンドの問題である。」を「これは，周りの長さが 60 cm のエジプトひも（亀井，1980）を用いて行うオープンエンドの問題である。」に改め，引用・参考文献に以下の文献を追加する。

亀井喜久男（1980），「新作教材エジプトひもと a ひもに関する実践研究」，『すべての子どもに学力を－第四回・日本標準教育賞入選論文集－』，日本標準教育研究所，株式会社日本標準，pp. 391-404.

後記

「上越数学教育研究」第 31 号の発行に臨み、多くの方々より御協力を賜りました。心から感謝を申し上げます。

今年度は、教員の研究論文、2 名の今年度修了の院生と 3 名のその他の院生の研究論文とともに、2009 年フロイデンタール賞受賞者であるイブ・シュバラール先生の受賞講演の際の発表原稿の翻訳を掲載しております。シュバラール先生には、翻訳の掲載に快諾いただき大変感謝しております。

第 31 号掲載論文はインターネット上でも公開しますので、そちらも是非ご覧ください。 <http://www.juen.ac.jp/math/journal.html>

(2016.2.25 宮川健)

「上越数学教育研究」投稿規定

1. 投稿資格 上越教育大学に關係する研究者
 2. 投稿内容 数学教育および数学に関する研究論文、報告、資料
 3. 編集・審査 投稿された論文は必要に応じ審査委員を委嘱し審査する
 4. 投稿期限 毎年 1 月 31 日
-

編集委員

高橋 等	伊達 文治	宮川 健
布川 和彦	岩崎 浩	松沢 要一

上越数学教育研究 第 31 号

発行日	平成 28 年 3 月 16 日
発行所	上越教育大学数学教室 〒943-8512 新潟県上越市山屋敷町 1 番地 TEL 025 (522) 2411 (代表)
印刷所	(株) 明間印刷所 TEL 0256 (32) 3090