上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.11-18

幾何や代数の区別のない数学の始原のところ

－掛け算九九の指計算の方法と仕組みを探る－

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

１．はじめに

《算数は，記号代数の理論や理論の関数概念の侵入と対決すべき性格を負わされているもの，と考える。西欧数学の歴史にたとえれば，初等数学教科が志向するのは，ギリシャ以前の，いわば，幾何や代数の区別のない数学の始原のところである。どこかを拓くことによって，今日の算数が児童の将来にとって，魂のふるさとになる部分を担えることになると考えたい。》（板垣，1986b，p. 9）

これは,板垣先生の論考の中の言葉である。

今日の学校数学は，子供の将来にとって，魂のふるさとになる部分を担っているであろうか。幾何や代数の区別のない数学の始原のところを大切にしていると言えるであろうか。

本稿は，幾何や代数の区別のない数学の始原のところを，掛け算九九の指計算の方法と仕組みから，探ろうとするものである。この探究は，ほんの僅かな一例に過ぎないかもしれない。しかし，数学や数学のアイデアには全て始原がある。これから数学や数学のアイデアの始原を探っていく取り組みへと発展させていく出発点にできればと考えている。

本題に入る前に，数学史における代数の展開について概略を確認しておきたい。次の 2 節･3 節は，伊達(2008)からの抜粋を一部修正・加筆の上で記載することにする。

２．数学（主には代数）の展開段階

中村(1980)によると，ネッセルマン(Nesselmann ,1811-1881)は,『ギリシャの代数学』(Nesselmann,1842)（pp. 301-302）において,「代数的演算や方程式の形式的表現に関連して，我々は歴史的にいって本質的に異なる 3 つの展開段階に区別することができる」と述べている。3 つの段階は次のものである。

第 1 段階　「言語代数」 ； 記号が全く無く，計算の全過程が言語で詳しく述べられているもの。

第 2 段階　「省略代数」 ； 第 1 段階と同じく言語的であるが，繰り返し用いられる概念や演算については，言語で表現する代わりに，決まった省略記号が用いられる。

第 3 段階　「記号代数」 ； 全ての式や演算が，完全に展開した記号的言語によって表現される。

数の計算とその規則は，きわめて古くから知られていたものであり，全く実用上の目的から出発したものであり，どの文化圏でも見られるものである。日常生活のための知恵や建築・測量のための「数の知識の領域」を超えて，数そのものの理論を組織的に追求しようとする段階に至って，はじめて数論という一つの数学が形成されていく。

数学は論証的構造をもつ言語であるという捉え方があるが，近世以前において数学は，

幾何学はもちろん代数的なものまで殆ど，この言語をもって綴られていたと言える。ユークリッド『原論』第Ⅴ巻「比例論」や第Ⅹ巻「無理量論」等にも，代数的記号法というものが全く欠如し，代数方程式という考えが全く存在していない。ギリシャ人は記号なしの言語数学を，言語を誤り無く使いこなす言語論理と文法をもって構成していった。これらは，もちろん上の第1段階「言語代数」に属するが，アラビアやペルシャの代数学，さらには近世になってのイタリアの古い数学者達のものもこれに属する(中村,1980,pp.14-15)。

記号法の始原は，ディオファントス(Diophantus)(3 世紀頃)の数論の中で未知数の最初の記号化が成されていることに見出される。この写本はルネッサンス期に再発見され，16･17 世紀の代数学形成の原動力となった。ディオファントスは上の第2段階「省略代数」に属し，また17世紀半ば頃までの代数学者たちのものもこれに属する。

近代代数学の始原はヴィエタの論著であり，少し後のデカルトによって完成される。これが第3段階「記号代数」である。

３．代数表現の展開

今日の学校数学の基盤をなしている代数表現の確立に至るまでには，古代バビロニアからみると，4 千年もの年月を要している。代数は,数の代わりに文字を使って計算したり，定理法則を研究したりするところに本領がある数学であるが，一般的な数を文字で表して現在のように文字式を自由に操作し始めたのは16世紀のヴィエタである。代数はそこ当たりから始まると言える。図 1. のように，そこに至るまでには，ネッセルマンが明らかにしたように,「言語代数」の時代と「省略代数」の時代を経なければならなかった。記号代数学に至る長い道程は全てこの「前代数」段階に当たる。この段階での展開の系列は，大きく２つに分けられる。「計算法」の展開と「記数法」の展開である。「計算法」はさらに２つ，インドを中心に展開しアラビアを経由しヨーロッパに伝播した「筆算」，ヨーロッパのアバックス，中国・日本の算木・算盤・そろばんなどによる「道具的計算」に分けられる。「記数法」も大きく２つ,「命数的記数法」と「位取り記数法」とに分けられる。それらは他と関わりを持ちながらそれぞれ展開していった。

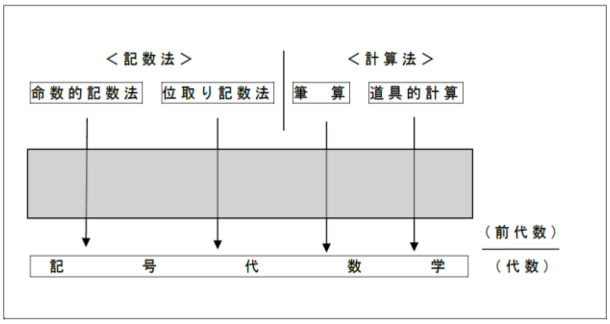


図１：代数学の展開

（図 1.の系列の展開を表す矢印を包括する長方形は，矢印の示す各々の展開が他と関わりを持ちながらのものであることを示している。）

その長い道のりの後，ヴィエタ・デカルトの「記号代数学」が誕生した。これが，ネッセルマンの第3段階「記号代数」であり，真の「代数」段階であると言える。その後，この記号や式の力によって，数学や科学が急速な発展を遂げることになる。

では，なぜ,「記号代数」に至るまでにこれほどの長く困難な道のりが必要であったのか。1 つには，未知数を文字に置き換えることに比べ，既知数を文字に置き換えることには相当な困難さがあったと考えられる。先に見てきたように，古代バビロニア・ディオファントス・アラビアで扱われた2次方程式には，未知数は文字で置き換えられることはあっても，既知数（定数項や係数）が文字に置き換えられることはなかった。そのため，そこで

扱われる2次方程式は個々別々のものになっていて，そのときの計算法で可能な型に限られたものになっていた。それに対し，「記号代数」段階のヴィエタ・デカルトの扱う2次方程式は，既知数（定数項や係数）も文字に置き換えられ，そこでは一般的な代数方程式としての自覚が認められる。ヴィエタが既知数も文字に置き換えることができた理由は，その直前の時の状況を見なければならない。ヴィエタは3次方程式も扱っているが，3次方程式を完全に解くという問題は,既に16世紀のイタリアの代数学者の主要な課題になっていた。また，中世にインド・アラビア数字の西欧への渡来があったが，15世紀には0,1,2から9に至る殆ど現在に近いものが既に使われ，16世紀には完全に現在のものと同じ数字と,それによる10進位取り記数法が既に使われていた。この方程式研究の進歩と最終段階の記数法の定着,そしてディオファントス『算術』に接すること等によって，先に述べた既知数も文字に置き換えることの困難さを乗り越えることができたと考えられる。

４．掛け算九九の指計算の方法とその説明

掛け算九九の指計算の起源は明らかではないが，2節・3節で述べたような，記号はもちろん言語でも述べられてはいない。口伝えに伝承されてきたものであろう。それは余りに巧妙な方法であり，偶然に経験的に発見されたとは言い難い感は拭えないのである。

何か，幾何や代数の区別のない数学の始原のところのものが，隠されているような気がしてならない。

掛け算九九の指計算の方法は，各誌で紹介されている。筆者の手元にあるものを全て発行年順に，ここに引用することにする。

4-1. 片野善一郎(1964)

片野（1964)『問題形式による数学史』に紹介されているものを，次に引用する。（ここで参考にされている元の文献は明記されていない。）

《フランスやロシアの農民の間でごく最近まで行われたおもしろい掛け算があります。

たとえば，6×8の計算をするのに，まず左手の指を6−5＝1本折り，右手の指を8−5＝3本折ります。すると折った両手の指の数の和1＋3＝4が答の10の位の数字,おらずに残った指の数の積4×2＝8が答の1の位の数字になります。この方法を使えば5×5＝25 以上の九九を知らなくてもすむから怠け者には大変つごうがよいわけです。

（問）　この指計算の原理を説明しなさい。

（注）　2数を5＋a，5＋bで表してみると折った指の数の和は a＋b ，折らずに残った指の数の積は（5−a)(5−b) となります。

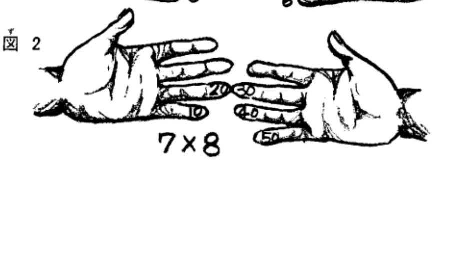
$$10(a+b)+(5-a)(5-b)=(5+a)(5+b)$$

ですから，この指計算は正しいことがわかります。》(p.125)

4-2. アービング・アドラーら (1970)

アービング・アドラー，ルース・アドラー（1970）『数いまとむかし』に紹介されているものを，次に引用する。（ここで参考にされている元の文献は明記されていない。）

《指をつかって，かけ算をする方法もあります。ヨーロッパの農民は，よくこのやり方でかけ算をしました。しかし，これは6から10までの数にしかつかえません。図1にしめしてあるように，指が数をあらわします。



7と8をかけるには，図2のように7の指と8の指をくっつけます。さて，答えは二つの部分にわけてだします。まず，くっつけている指と，その指より下にある指の本数をたして，それを10倍します。このばあいは,図2に示したように,50になります。次にのこりの指の本数を左右それぞれかぞえ,この左右の数をかけます。この場合は，3×2で6ですね。そこで，この二つの数を足すと50＋6で56になり，これが7×8の答えです。6から10までの数でほかに何かためしてごらんなさい。》(p.41)

4-3. イー・ヤー・デップマン(1985)

イー・ヤー・デップマン(1985)『算数の文化史』に紹介されているものを，次に引用する。（ここでは,「数学の諸文献では，指計算がモルダヴィア人や南ルーマニアの民族のあいだでは大変広く使われていて，あたかも古代ローマ人から伝わったかのようにしばしば指摘されている。」(p.16）と述べられているだけであり，その諸文献については明記されていない。そして，その文献に掛け算九九の指計算のことがどの程度述べられているかについても不明である。）

《指計算は，共通の言語をもたないいろいろな民族の代表者が顔をあわせる市場では必要であった。そこで，実際の必要から，話さなくても理解できる共通の指計算が創造され，しかもこの計算方法は，小学校で生徒たちに教え込まれたのである。ローマのキケロー（紀元前1世紀）は，ローマでの学校教育の程度の低さをののしっている。ローマの学校では,掛け算の表(九九の表)は5までしか暗唱させず，それ以上は指による計算でおぎなっていたのである。こうした方法が可能であることは，つぎの等式から明らかである。

$$10[(a-5)+(b-5)]+(10-a)(10-b)=ab$$

この等式は，5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすには，aとbに与えた1桁の数が5をこえたぶんだけ，両手の指を伸ばせばよいという，実用的な法則にあてはまっているのである。伸ばした指の数の合計は,それの10倍をあらわしていて,この数に，残っている曲げられた指に相当する数(10－a)と(10－b)の積をくわえればよい（双方の括弧内の数は5より小さい)。

［例］　7×8　を求めよ。

一方の手に2本の指（つまり7－5＝2),他方の手に3本の指（つまり8－5＝3）をのばす。曲げられている指は，一方の手に2本，他方の手に3本残っている。そうすると，伸ばされた指の数の合計である5は2桁の数（つまり50）をあらわし，また，曲げられた指の双方の積2×3＝6は1桁の数となっている。つまり，

$$7\times 8=(5\times 10)+6=56$$

となるわけである。》(p.16)

4-4. 小川雄三(2010)

小川（2010)「指で「掛け算九九」」に紹介されているものを，次に引用する。(ここで参考にされている元の文献は明記されていない。)

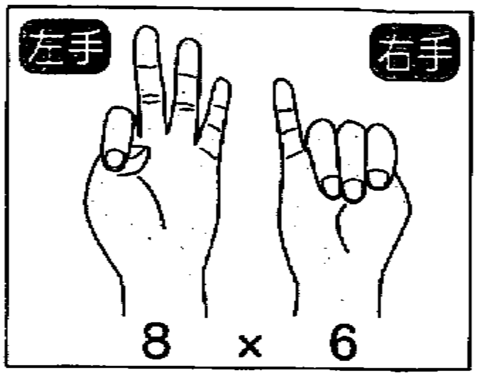
《今回も掛け算九九の話をしましょう。

誰もがお世話になったリズムよい「九九」は，日本の算数教育を支える財産です。そのおかげで日本人は小学2年生の1年間で九九を暗唱できるようになります。でもともすると「8×6･･･？」と，迷うこともあります。小学校の太郎さんも，そんな大失敗をお父さんに話しています。

（太郎）お父さん，今日のテストで大失敗をしてしまった。8×6が頭の中から急に消えて出てこないんだよ。

（お父さん）お父さんもあったなあ。そんな時のために,「指九九」を教えてあげよう。太郎が困った「8×6」で考えるよ。

① 両手の手をパーの形に開き，まず左手で8を指で折る。8は5を三つ超えるので，小指と薬指と中指の3本が立つね。
② 次に右手で6を指で折る。6は5を一つ超えるので，小指の1本だけが立つね。



③ 立っている指を加えた数が十の位。
　3＋1＝4　→　40
④ 折れている指を掛け合わせた数が一の位。
　2×4＝8
⑤ 最後にこれらの二つの数を加える。
　40＋8＝48

8×6＝48で正しい積が出るだろう。
（太郎）すご〜い！　僕は7の段が少し苦手だから，7×7をやってみよう。
右手・立っている指2本　折れている指3本，左手・立っている指2本　折れている指3本
　2＋2＝4　→　40　　3×3＝9
ほんとだ。49とちゃんと答えが出る。
　隣で聞いていた中学生の花子さんが，ちょっと首をかしげています。
（花子）ちょっと待って。7×6は「指九九」ではうまくいかないと思うわ。7×6＝42なのに，立っている指が右手2本と左手1本で，30にしかならないわ。
（お父さん）さすが中学生。できない例（反例）を考えるなんて，目の付け所がいいね。でも，折れている指も考えてごらん。
　右手・折れている指3本，左手・折れている指4本
　3×4＝12　だから 30＋12＝42 で正しいわけだ。
（花子）そうか，繰り上がるんだね。
（お父さん）花子は中学生だから，「指九九」で正しく積が出るわけを考えてごらん。
（花子）よ〜し，文字式で考えてみよう。数を一般化して a ×b として考えるね。
① 十位の数は立っている指の数の和
$\{(a-5)+(b-5)\}\times 10$
② 位置の位の数は折っている指の数の積
$(10-a)\times(10-b)$
③ 二つの数（式）を加える
$\{(a-5)+(b-5)\}\times 10+(10-a)\times(10-b)$
$=10(a+b-10)+100-10(a+b)+ab$
$=ab$
「指九九の式」＝a×b　になるわ。
（お父さん）その通り。

×　　　×

　「指九九」は昔のフランスの農民の間で用いられていた計算法ということです。九九を全部覚えなくとも，1の段から5の段までを暗唱していれば，九九全部の積を求めることができるわけです。》（11面）

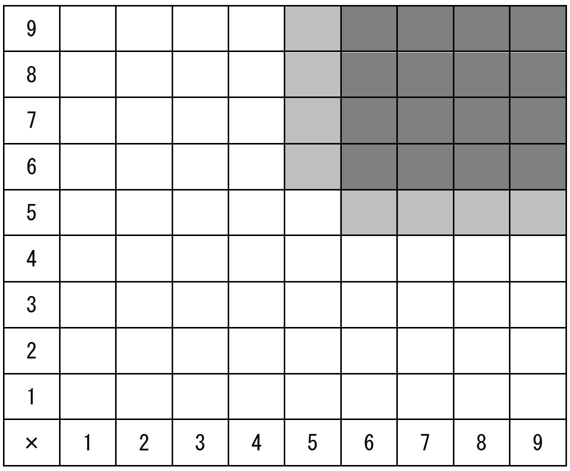
5．掛け算九九の指計算の背景とその仕組み

　掛け算九九の指計算の起源は明らかではないが，背景をある程度は次のように考えることができる。イー・ヤー・デップマン（1985）によると，この指計算は古代ローマから伝えられたものであり，日常の必要から生まれたものである。指計算は，共通の言語を持たない民族同士が顔を合わせる市場では必要であった。そこで，実際の取引などの必要から，話さなくても理解できる共通の指計算が生み出された。この計算方法は，小学校で生徒たちに教え込まれた。ローマの学校では，掛け算の表（九九の表）は5までしか暗唱させず，それ以上は指による計算で補っていた（p. 16）。

こうした掛け算九九の指計算の方法には，前の4節に紹介したように次の3種類がある。

① 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手でそれぞれa−5本の指とb−5本の指を折り曲げて計算する方法。（前節の4-1がこれに当たる。）
② 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手でそれぞれa−5本の指とb−5本の指を伸ばして計算する方法。（前節の4-3と4-4がこれに当たる。）
③ 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手の各指に6〜10の数を対応させ，a，bの数に対応する指をくっつけて計算する方法。（前節の4-2がこれに当たる。）

掛け算 $a\times b$ において，掛け算九九の指計算の適用範囲は，上に記述したように，$5<a<10$，$5<b<10$ であり，図示すると下図の網掛けの色の濃い部分になる。前の4節の4-4で検討した繰り上がりを考慮するならば，上の3種類の方法の③以外の①と②においては，例えば5×7のような計算も適用範囲に入り，$5\leqq a<10$，$5\leqq b<10$ となり，適用範囲は図示すると下図の網掛けの色の薄い部分にまで広がる。したがって，4の段までの九九と五五を暗唱することができれば，この指計算によって，九九の答えは全て得られることになる。



こうした掛け算九九の指計算の方法が正しいことの説明には，前の4節に紹介したように，次の文字式による2種類の説明がある。

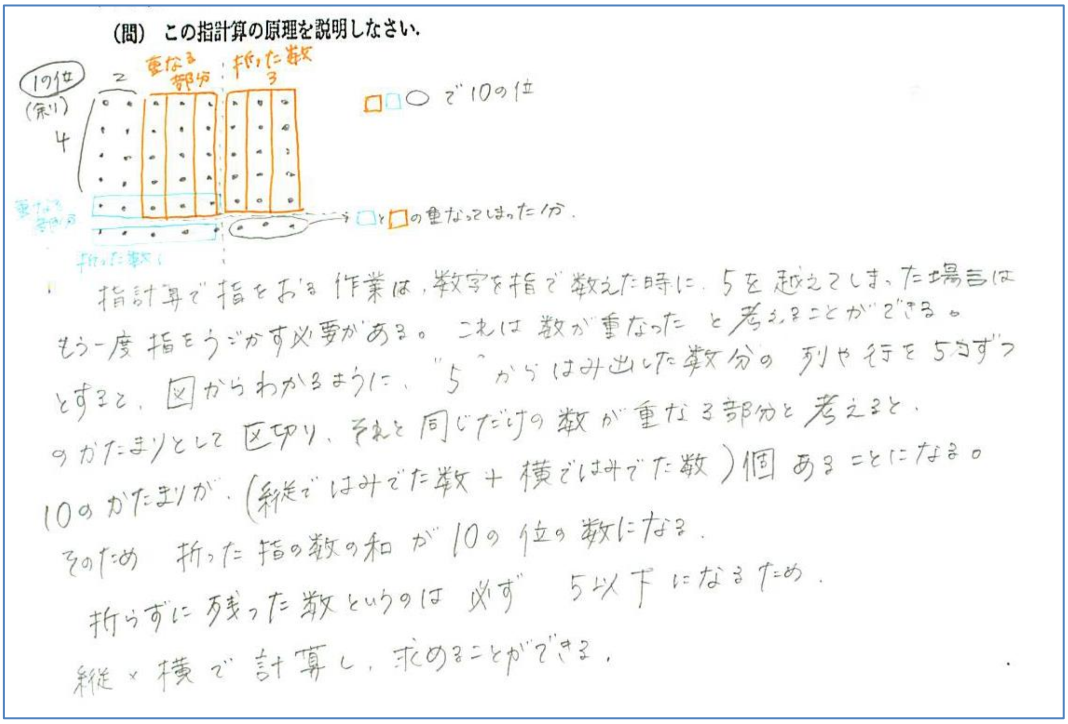
① 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすとき，次のようになる。
$10[(a-5)+(b-5)]+(10-a)(10-b)=ab$
② 5より大きく10より小さい5+aと5+bの数を掛け合わすとき，次のようになる。
$10(a+b)+(5-a)(5-b)=(5+a)(5+b)$

このように，私たち現代の人は，文字式を使用した代数的な説明により，掛け算九九の指計算の方法が正しいことを説明できる。文字式の存在しない頃の古代の人には，このような文字式を使用した代数的な説明などはもちろんできなかったであろう。「こうしたら正しい答えが出る」というように帰納的に考え，経験的にこのことを確認して，この方法が正しいことを説明したのではないだろうか。

この方法が正しいことは帰納的・経験的に説明できたかもしれないが，では，なぜこのような方法を生み出すことができたのかは，依然，闇の中である。次の節では，その闇に僅かながらでも光を当てることを試みたい。

6．掛け算九九の指計算にみる数学の始原

本学において，後期の主には学部2年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業の5コマを担当している。その授業で，殆ど毎回，簡単なレポートを課している。そのレポートの1つに，4-1の片野(1964)の(問)「この指計算の原理を説明しなさい。」というものがある。提出されたレポートは，殆ど全部と言ってよい，前の5節に示した2種類の方法の内の①，文字式による説明である。この授業は8年に及ぶが，唯一，3年前，当時学部2年生のSさんから，文字式に依らない指計算の原理の説明が提出された。次のようなものである。



（問） この指計算の原理を説明しなさい。

1の位 (余り) 2 4 重なる部分 折った数 3 □□○で10の位

重なる部分 折った数1 □と□の重なってしまった分。

指計算で指をおる作業は，数字を指で数えた時に，5を越えてしまった場合はもう一度指をうごかす必要がある。これは数が重なったと考えることができる。とすると，図からわかるように，"5"からはみ出した数分の列や行を5こずつのかたまりとして区切り，それと同じだけの数が重なる部分と考えると，10のかたまりが，(縦ではみでた数＋横ではみでた数)個あることになる。

そのため 折った指の数の和が10の位の数になる。

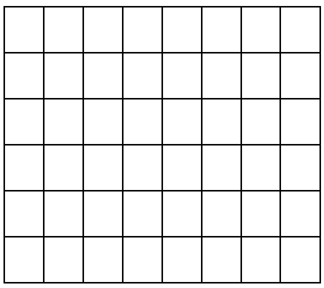
折らずに残った数というのは必ず 5以下になるため，

縦×横で計算し，求めることができる。

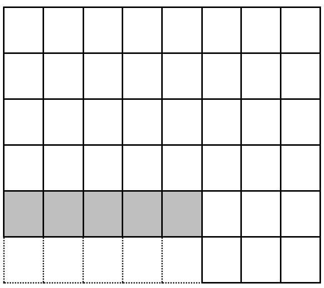
この説明には，文字式は使われていない。掛け算九九の指計算（前節の方法①）が生み出される前の数学的なアイデアのイメージを表す図で説明されている。この図による説明を，次にもう少し詳しくしてみよう。

6×8 の計算を考えてみよう。

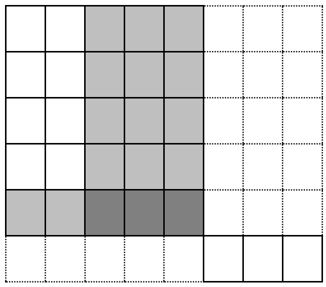
求める答えの数は，右図の縦（左手）6，横（右手）8 のマス目の数である。



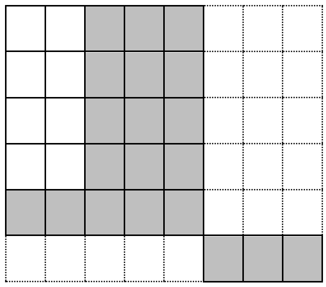
まず，左手の指を 6－5＝1 本を折ると右図のようになり，指 1 本分が重なってマス目 10 個分を数えたことになる。



次に，右手の指を 8－5＝3 本を折ると右上図のようになり，指 3 本分が重なってマス目 30 個分を数えたことになる。



ただし，網掛けの色の濃い部分は，左手の折った指 1 本と右手の折った指 3 本が重なったところであり，そのマス目 3 個分を重複して数えていることになる。

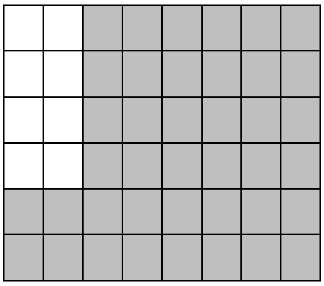


そこで，重複して数えたマス目 3 個分を右図の右下のまだ数えていないマス目 3 個分の所に移す。

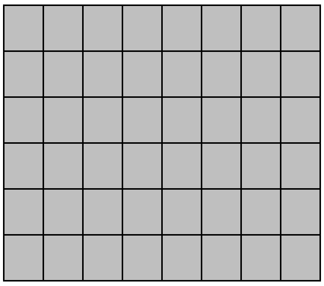
ここまでで，結局，折った指の数の合計の 1＋3＝4 本分のマス目 40 個分をもれなく重複なく数えたことになる。

あと，まだ数えていないところは，次頁の左上の図の網掛けのない白い部分である。ここは折っていない指，左手は 5－1＝4 本，右手は 5－3＝2 本のところであり，ここの

部分の積を4×2＝8 と求めれば，白い部分マス目 8 個分を数えたことになる。



先に求めたマス目 40 個分にこのマス目 8 個分を加えて得られるマス目 40＋8＝48 個分（右図）は，最初の縦（左手）6，横（右手）8 のマス目の数をもれなく重複なく数え上げたものである。



すなわち,このような数え上げによって，6×8 の答え 48 を得たのである。

このＳさんの説明は，文字式はもちろんのこと，言語にも依らない，ごくごく素朴な掛け算のイメージ（数学的なアイデアの素と言ってもよいようなもの）による簡潔・簡明な説明である。代数と幾何の区別のない数学の始原のところが，そこにあるように思える。もしかすると，掛け算九九の指計算を生み出した古代の人には，自分の両の手のひらに「5×5」が，そして自分の折った指の重なりには，5 と 5 の重なりの「10」がみえていたのかもしれない。

７．おわりに

本稿は，幾何や代数の区別のない数学の始原のところを，掛け算九九の指計算の方法と仕組みから，探ろうとしてきた。

「はじめに」に述べたことの繰り返しになるが，この探究は，ほんの僅かな一例に過ぎないかもしれない。しかし，数学や数学のアイデアには全て始原がある。これから数学や数学のアイデアの始原を探っていく取り組みへと発展させていく出発点にしたいと考えている。

引用・参考文献

アービング･アドラー,ルース･アドラー 著／植野香雪 訳／石橋教子 画(1970)，『数いまとむかし』，福音館書店.

イー・ヤー・デップマン 著／藤川誠 訳(1985),『算数の文化史』,現代工学社.

ファン・デル・ヴェルデン（B.L.van der Waerden）著／加藤文元 他 訳(2006)，『ファン・デル・ヴェルデン　古代文明の数学』，日本評論社.

フェリックス・クライン（Felix Klein）著／遠山啓 監訳(1959)，『高い立場からみた初等数学』，商工出版社.

板垣芳雄(1986a)，「藤澤の『算術条目及教授法』を読む（Ⅰ）－理論流儀の普通教育上における弊害－」,日本数学教育学会誌『算数教育』,第 68 巻,第 6 号，pp. 2-8.

板垣芳雄(1986b)，「藤澤の『算術条目及教授法』を読む（Ⅱ）－日本算術と現在－」,日本数学教育学会誌『算数教育』，第 68 巻，第 8 号，pp. 2-9.

伊東俊太郎(1987),「序説　比較数学史の地平」,『中世の数学』，伊東俊太郎編，共立出版，pp. 1-29.

小川雄三(2010),「指で「掛け算九九」」,『新潟日報(2010 年 4 月 26 日刊)』,11 面.

片野善一郎(1964)，『問題形式による数学史』，富士短期大学出版部.

伊達文治(2008),「数学教育における文化的価値に関する研究－高校数学の基盤をなす代数表現とその文化性－」,全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第 14 巻，pp. 51-58.

伊達文治(2013)，『日本数学教育の形成』，溪水社.

中村幸四郎(1980),『近世数学の歴史　微積分の形成をめぐって』，日本評論社.